Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学
最后冲刺超越135分
（数学一）

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

赠送MP3光盘

◎ 清华大学 王 欢
◎ 北京大学 王德军 主编
◎ 首都师范大学 童 武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

Yan Yuan
燕园教育

2015 考研专家指导丛书

考研数学
最后冲刺超越135分
（数学一）

超值赠送

- 800元原命题组成员考研数学大串讲视频
- 命题人归纳每章知识结构图
- 考研数学公式定理背诵手册（数学一、二、三）
- 命题人密押试卷2套及精解（数学一、二、三）
- 北京大学状元考研数学备战锦囊
- 清华大学状元考研数学备战锦囊

赠送MP3光盘

◎ 清华大学　　王　欢
◎ 北京大学　　王德军　主编
◎ 首都师范大学　童　武

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教育出版中心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学最后冲刺超越135分. 数学一／王欢主编. —3版. —北京：中国石化出版社，2014.4
ISBN 978-7-5114-2698-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第040931号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街58号
邮编：100011　电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail：press@sinopec.com
北京富泰印刷有限责任公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本5.75印张133千字
2014年4月第3版　2014年4月第1次印刷
定价：19.80元(赠送MP3光盘)

前　言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展；规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学标准模拟试卷精解数学一》
《考研数学标准模拟试卷精解数学二》
《考研数学标准模拟试卷精解数学三》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　98考点全突破数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　70考点全突破数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题考点与题型分类精解　102考点全突破数学三》
《阅卷人精讲考研数学高等数学高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学线性代数高分强化版》
《阅卷人精讲考研数学概率论与数理统计高分强化版》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学一》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学二》
《阅卷人点拨考研数学历届真题15天突破　数学三》
《考研数学主观题23天突破500题　数学一》
《考研数学主观题13天突破500题　数学二》
《考研数学主观题22天突破500题　数学三》
《考研数学客观题26天突破1500题　数学一》

《考研数学客观题15天突破1500题　数学二》

《考研数学客观题27天突破1500题　数学三》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学一》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学二》

《考研数学最后冲刺超越135分　数学三》

本套丛书的编写特点如下：

1. 配合最新考试大纲，反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上，力求反映最新考试要求，紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套丛书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编写。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

最后冲刺试卷一

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设 $f(x) = x\sin x + \cos x$，下列命题中正确的是(　　)。

(A) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　(B) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

(C) $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值　　(D) $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta > 0$，当 $x \in (a-\delta, a+\delta)$ 时，必有(　　)。

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)] \geqslant 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)] \leqslant 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2} \geqslant 0\ (x \neq a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2} \leqslant 0\ (x \neq a)$

3. 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1+e^x)$，渐近线的条数为(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

5. 设 A 为反对称矩阵，且 $|A| \neq 0$，B 可逆，A、B 为同阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $[A^TA^*(B^{-1})^T]^{-1} = ($　　$)$。

(A) $-\dfrac{B}{|A|}$　　(B) $\dfrac{B}{|A|}$　　(C) $-\dfrac{B^T}{|A|}$　　(D) $\dfrac{B^T}{|A|}$

6. 设向量组(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，其秩为 r_1，向量组(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$，其秩为 r_2，且 $\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 均可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，则(　　)。

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

7. 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 也发生，则(　　)。

(A) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$　　(B) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$　　(D) $P(C) = P(A \cup B)$

8. 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布，且 $D(X_i) = \sigma^2$，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，则(　　)。

(A) S 是 σ 的无偏估计量　　(B) S 是 σ 的最大似然估计量

(C) S 是 σ 的一致估计量　　(D) S 与 $\overline{X}$ 相互独立

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$，$f(2)=1$，则 $f'''(2)=$ ________。

10. 设 $f(x)=xe^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 的极小值为________。

11. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $dz|_{(1,0)}=$ ________。

12. 曲线 $r=3\cos\theta$，$r=1+\cos\theta$ 所围图形的公共部分面积 $A=$ ________。

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$，且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 $k=$ ________。

14. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为________。

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 19 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$。

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$。

17.（本题满分 11 分）

计算 $I=\oint_L\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 是绕原点旋转一周的正向光滑闭曲线。

18.（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$，求 $f(x)$。

19.（本题满分 10 分）

假设曲线 l_1: $y=1-x^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴，y 轴所围成区域被曲线 l_2: $y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值。

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$。

（Ⅰ）求 x 与 y 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。

21.（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$。

(Ⅰ)已知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为3，试求 y；

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵。

22.(本题满分11分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1\\0, & 其他\end{cases}$，记 $Z=X+Y$。

(Ⅰ)求 $P\{Z\leqslant 1/2\mid X=0\}$；

(Ⅱ)求 Z 的概率密度。

23.(本题满分11分)

一台设备由三大部分构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为0.10、0.20和0.30，假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布、数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$。

最后冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的最(极)大值、最(极)小值

【解题分析】因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上可导，$f'(x)=x\cos x>0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上成立，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加，所以 $f(0)<f(x)<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即 $f(0)$ 是最(极)小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是最(极)大值，故选(B)。

2.【考点提示】极值点

【解题分析】由题设连续性及 $f(a)$ 为极大值知 $(x-a)(f(x)-f(a))$ 在 $x=a$ 左右两侧变号，从而(A)(B)都可排除，当 $x\neq a$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\dfrac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}$，由于 $f(a)$ 在 $x=a$ 点为极大值，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 的小邻域内连续，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0$，因此，选(C)，而排除(D)。

3.【考点提示】渐近线的求法

【解题分析】$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，则 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

$\lim\limits_{x\to -\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$，则 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=1$，则 $y=x$ 是曲线的斜渐近线。故应选(D)。

4.【考点提示】分段函数的高阶导数

【解题分析】$3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $\varphi(x)=x^2|x|$，它是分段函数，$x=0$ 是连接点。

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0,\\ x^3, & x\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow \varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x<0,\\ 3x^2, & x>0,\end{cases}$$

又 $\varphi'_+(0)=(x^3)'_+|_{x=0}=0$，$\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0$；

同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0\\ 6x, & x>0\end{cases}$，$\varphi''(0)=0$；

即 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant 0,\\ 6x, & x\geqslant 0\end{cases}=6|x|$，因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导 $\Rightarrow\varphi'''(0)$ 不存在，应选(C)。

5.【考点提示】矩阵的计算

【解题分析】$[A^TA^*(B^{-1})^T]^{-1}=[(B^{-1})^T]^{-1}(A^*)^{-1}(A^T)^{-1}$

$$=[(B^{-1})^{-1}]^T\frac{A}{|A|}(-A)^{-1}=-\frac{B^T}{|A|}$$

应选(C)。

6.【考点提示】向量组的秩

【解题分析】设 α'_1，α'_2，…，α'_{r_1} 为 α_1，α_2，…，α_s 的极大无关组，

则它也是 α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_s 的极大线性无关组，所以(D)结论成立。

7.【考点提示】利用随机事件之间的关系及其概率性质

【解题分析】由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，知 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$。

因为 $AB\subset C$，所以 $P(AB)\leqslant P(C)$，

又 $P(A\cup B)\leqslant 1$，故 $P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1$。

故应选(B)。

8.【考点提示】随机变量的无偏估计量

【解题分析】$\because\quad S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)$

由辛钦大数定律可知 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X_1^2)$，$\overline{X}\xrightarrow{P}E(X_1)$

根据依概率收敛的性质可知

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\xrightarrow{P}E(X_1^2)-[E(X_1)]^2=D(X_1)=\sigma^2$$

$\therefore\quad S=\sqrt{S^2}\xrightarrow{P}\sqrt{\sigma^2}=\sigma$，故选(C)。

二、填空题

9.【考点提示】一元复合函数求导法则

【解题分析】已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，$f'(x)=e^{f(x)}$，所以 $f'(x)$ 在 $x=2$ 的同一邻域内可导，即在该邻域内函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)=[e^{f(x)}]'=f'(x)e^{f(x)}=e^{2f(x)}$。

于是 $f''(x)$ 也在 $x=2$ 的同一邻域内可导，即在该邻域内函数 $f(x)$ 三阶可导，

且 $f'''(x)=[e^{2f(x)}]'=2f'(x)e^{2f(x)}=2e^{3f(x)}$，将 $f(2)=1$ 代入可得 $f'''(2)=2e^3$。

10.【考点提示】先求 n 阶导数，再求极值

【解题分析】

$$f(x)=xe^x$$

$$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$$

$$f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x$$

$$f^{(n+2)}(x)=(n+2+x)e^x$$

令 $f^{(n+1)}(x)=0$，解得 $f^{(n)}(x)$ 的驻点 $x=-(n+1)$，

又 $f^{(n+2)}[-(n+1)]=[n+2-(n+1)]e^{-(n+1)}=e^{-(n+1)}>0$，

故 $x=-(n+1)$ 为 $f^{(n)}(x)$ 的极小值点，$f^{(n)}[-(n+1)]=-\dfrac{1}{e^{n+1}}$。

11. 【考点提示】全微分的四则运算、一阶全微分形式不变性

【解题分析】因为 $dz=e^{x+y}dx+xde^{x+y}+\ln(1+y)d(x+1)+(x+1)d\ln(1+y)$

$$=e^{x+y}dx+xe^{x+y}d(x+y)+\ln(1+y)dx+(x+1)\frac{dy}{1+y}$$

$$=e^{x+y}dx+xe^{x+y}(dx+dy)+\ln(1+y)dx+\frac{(x+1)dy}{1+y}$$

所以 $$dz\big|_{(1,0)}=edx+e(dx+dy)+2dy=2edx+(e+2)dy$$

12. 【考点提示】曲线积分

【解题分析】解方程组 $\begin{cases}r=3\cos\theta\\ r=1+\cos\theta\end{cases}$，得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

故 $A=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{2}(1+\cos\theta)^2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(3\cos\theta)^2d\theta\right]=\dfrac{5\pi}{4}$。

13. 【考点提示】矩阵的秩

【解题分析】由题设，$r(\boldsymbol{A})=3$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，即

$$\begin{vmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{vmatrix}$$

从而 $k=-3$ 或 $k=1$。当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，

则 $r(A)=1$，与已知矛盾，所以 $k=-3$。

14. 【考点提示】相关系数

【解题分析】由题设，$D(Z)=D(X)$，

$$cov(Z,Y)=cov(X-0.4,Y)=E[((X-0.4)-E(X-0.4))(Y-E(Y))]$$
$$=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=cov(X,Y)$$

因此 $$\rho_{YZ}=\frac{cov(Z,Y)}{\sqrt{D(Z)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}=0.9$$

三、解答题

15. 【考点提示】数列的极限

【解题分析】解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\ln\sqrt[n]{n}}$，$\underline{\underline{令\sqrt[n]{n}-1=x}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1$。

16.【考点提示】介值定理、微分中值定理

【解题分析】由题设，$f(x)$在$[0,3]$上连续，则$f(x)$在$[0,2]$上也必然连续，则在$[0,2]$上$f(x)$必有最大值M和最小值m，因而$m\leqslant f(0)\leqslant M$，$m\leqslant f(1)\leqslant M$，$m\leqslant f(2)\leqslant M$，从而$m\leqslant\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M$。

由连续函数的介值定理，知存在一点$\eta\in[0,2]$，使$\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=f(\eta)$。

由已知条件$f(0)+f(1)+f(2)=3$，可推知$f(\eta)=1$，因此$f(\eta)=f(3)=1$，$\eta\in[0,2]$。

由罗尔定理，知存在$\xi\in(\eta,3)\subset[0,3]$，使$f'(\xi)=0$。证毕。

17.【考点提示】格林公式

【解题分析】令$P(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\dfrac{x-y}{x^2+y^2}=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$，显然$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$。

令L_r: $x^2+y^2=r^2$，其中$r>0$，L_r在L内，方向取逆时针，由格林公式得

$\oint_{L+L_r^-}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中$D$为$L$与$L_r^-$所围成的平面区域，则

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_r}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

而$\oint_{L_r}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{-r(r\cos\theta+r\sin\theta)\sin\theta-r(r\cos\theta-r\sin\theta)\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta$

$$=-2\pi$$

所以 $I=\oint_L\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-2\pi$

18.【考点提示】先在等式两边对x求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数$f(x)$的微分方程，再求解该微分方程。

【解题分析】方程$f(x)=\displaystyle\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$两边对$x$求导得$f'(x)=3f(x)+2\mathrm{e}^{2x}$，

即$f'(x)-3f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$，令$x=0$，由原方程得$f(0)=1$。

于是，原问题就转化为求微分方程$f'(x)-3f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$满足初始条件$f(0)=1$的特解。

由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\left(\int 2\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{3x}\left(\int 2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$$

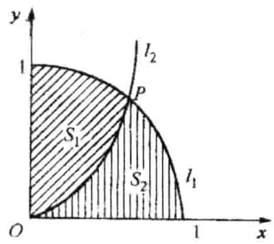
代入初始条件$f(0)=1$，得$C=3$，从而$f(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$。

19.【考点提示】先求出曲线l_1与曲线l_2的交点，然后利用定积分求平面图形面积的公式计算出S_1和S_2，由$S_1=S_2$求a的值。

【解题分析】如图，由$\begin{cases}y=1-x^2\\y=ax^2\end{cases}$$(0\leqslant x\leqslant 1)$得曲线$l_1$与曲线$l_2$的交点为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$，

所求平面图形面积为

$S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}(1-x^2-ax^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\frac{1+a}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2}{3\sqrt{1+a}}$



$$S_1+S_2=\int_0^1(1+x^2)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

因为 $S_1=S_2$，所以 $S_1=\frac{2}{3\sqrt{1+a}}=\frac{1}{3}$，得 $a=3$。

20.【考点提示】若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$ 对所有 λ 均成立，由此可定出参数 x，y，故其特征多项式相同。

【解题分析】(Ⅰ) 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故其特征多项式相同，即 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y)$$

令 $\lambda=0$，得 $2(x-2)=2y$，即 $y=x-2$，

令 $\lambda=1$，得 $y=-2$，从而 $x=0$。

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，

对应于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的共同的特征值 -1、2、-2 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,2,-1)^T,\ \boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^T,\ \boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1)^T$$

则可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$。

21.【考点提示】由定义有 $|3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，由此可定出参数 y。考虑到 $\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵，而 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，化其对角矩阵方法有两种：转化为对应二次型 $x^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$，通过非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为标准形，相应求出 $\boldsymbol{P}$；或者求出 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值、单位化，最后构造出正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，本题所求 P 不唯一。

【解题分析】(Ⅰ)因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]=0$。

当 $\lambda=3$ 时，代入上式解得 $y=2$，于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$。

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，得 $(\boldsymbol{AP})^T(\boldsymbol{AP})=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$，而矩阵 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{bmatrix}$。

考虑二次型 $x^TA^2x=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4=x_1^2+x_2^2+5\left(x_3+\frac{4}{5}x_4\right)^2+\frac{9}{5}x_4^2$。

令 $y_1=x_1$，$y_2=x_2$，$y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4$，$y_4=x_4$，得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}$，

取 $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，则有 $(AP)^T(AP)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$。

22.【考点提示】随机变量的条件概率与概率密度

【解题分析】(Ⅰ)因为 $Z=X+Y$，所以

$$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=0+\int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

(Ⅱ)因为 $Z=X+Y$，故随机变量 Z 的分布函数 $F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$。

显然当 $z\geqslant2$ 时，X，Y 的所有取值均满足上式，即 $F(z)=1$；

相反当 $z<-1$ 时，有 $F(z)=0$；而当 $-1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$

$=P\{Y\leqslant z+1\mid X=-1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\mid X=0\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\mid X=1\}P\{X=1\}$

$=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\})$。

当 $-1\leqslant z<0$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+0+0)=\frac{1}{3}\int_0^{z+1}1\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z+1)$；

当 $0\leqslant z<1$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+0)=\frac{1}{3}\left(1+\int_0^z\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{3}(z+1)$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F(z)=\frac{1}{3}(P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\})$

$$=\frac{1}{3}\left(1+1+\int_0^{z-1}1\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{3}(z+1)。$$

故可得到随机变量 Z 的分布函数和概率密度分别为

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<-1,\\ \frac{1}{3}(z+1), & -1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant2,\end{cases}\quad f(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2。\\ 0, & 其他。\end{cases}$$

23.【考点提示】先确定 X 的所有可能取值，然后分别求出每一取值的概率，再按定义求数学期望和方差即可。

【解题分析】设事件 $A_i=\{部件i需要调整\}$，$i=1,2,3$，则 A_1，A_2，A_3 相互独立，并有 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.2$，$P(A_3)=0.3$，由题意知，X 的所有可能取值为0，1，2，3，

且 $P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$

$=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504$

$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=0.1\times(1-0.2)\times(1-0.3)+(1-0.1)\times0.2\times(1-0.3)+(1-0.1)\times(1-0.2)\times0.3$

$=0.398$

$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$=0.1\times0.2\times(1-0.3)+0.1\times(1-0.2)\times0.3+(1-0.1)\times0.2\times0.3=0.092$

$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

即 X 的概率分布

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

因此 X 的数学期望 $E(X)=0\times P\{X=0\}+1\times P\{X=1\}+2\times P\{X=2\}+3\times P\{X=3\}$

$=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$。

又因为 $E(X^2)=0^2\times P\{X=0\}+1^2\times P\{X=1\}+2^2\times P\{X=2\}+3^2\times P\{X=3\}$

$=0\times0.504+1\times0.398+4\times0.092+9\times0.006=0.82$,

所以 X 的方差 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.82-0.6^2=0.46$。

最后冲刺试卷二

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 已知$f(x)$在$x=0$某邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处$f(x)$(　　)。

   (A) 不可导　　(B) 可导但$f'(x)\neq 0$　　(C) 取得极大值　　(D) 取得极小值

2. 曲线$y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$的渐近线有(　　)。

   (A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

3. 设α为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$(　　)。

   (A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

   (C) 发散　　(D) 收敛性与α的取值有关

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义，在开区间(a,b)内可导，则(　　)。

   (A) 当$f(a)\cdot f(b)<0$时，存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$

   (B) 对任何$\xi\in(a,b)$，有$\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

   (C) 当$f(a)=f(b)$时，存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$

   (D) 存在$\xi\in(a,b)$，使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

5. 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，记向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，(Ⅲ)$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$，如果向量组(Ⅲ)线性相关，则(　　)。

   (A) 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)都线性相关

   (B) 向量组(Ⅰ)线性相关

   (C) 向量组(Ⅱ)线性相关

   (D) 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)中至少有一个线性相关

6. 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，且$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}$(　　)。

   (A) 必有一列元素全为 0

   (B) 必有两列元素对应成比例

   (C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合

   (D) 任一列向量是其余列向量的线性组合

7. 设两个相互独立的随机变量X和Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，则下列结论正确的是(　　)。

   (A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=1/2$　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=1/2$

   (C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=1/2$　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=1/2$

8. 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则(　　)。

(A) $Y\sim\chi^2(n)$　　(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$

(C) $Y\sim F(n,1)$　　(D) $Y\sim F(1,n)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$________。

10. 方程 $yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=1$，$y'(0)=0$ 的通解为________。

11. 设曲线 L：$y=\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$，则 $\int_L(x^2+2xy)\mathrm{d}s=$________。

12. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的微分为 $\mathrm{d}z=$________。

13. 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\ -x & -x & -x\\ 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是________。

14. 投掷 n 枚骰子，则出现点数之和的数学期望________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

16. (本题满分 10 分)

已知二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，作变换 $\begin{cases}x=uv\\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$，且 $f(x,y)=g(u,v)$，若 $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求 a，b。

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(Ⅱ) 存在两个不同的点 η，$\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

18. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$。

19. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，$|f'(x)|\leqslant q<1$，令 $u_n=f(u_{n-1})$，$n=1,2,3,\cdots$，$u_0\in[a,b]$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛。