高职高专公共基础课规划教材

GAOZHI GAOZHUAN GONGGONG JICHUKE GUIHUA JIAOCAI

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

邱香兰 ◎ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专公共基础课规划教材

经济数学基础

主　编　邱香兰
参　编　程丽萍　贺妤函
主　审　林元重

机 械 工 业 出 版 社

本书根据高职高专学生的特点及经济类各专业对数学课程的要求编写而成. 全书共分为两篇：上篇为微积分部分，包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元微分学简介；下篇为线性代数与概率统计部分，包括线性代数初步、概率论初步、数理统计初步. 建议总学时数为130学时.

本书既可作为高职高专经济管理类各专业的教材，也可作为经济管理类人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/邱香兰主编. —北京：机械工业出版社，2010.10

高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-31967-2

Ⅰ.①经… Ⅱ.①邱… Ⅲ.①经济数学－高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第184012号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：李大国 责任编辑：李大国 责任校对：樊钟英

封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京富生印刷厂印刷

2011年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 15.75印张 · 304千字

0001—4000册

标准书号：ISBN 978-7-111-31967-2

定价：23.00元

前　言

本书根据高职高专学生的特点及经济类各专业对数学课程的要求编写而成．全书共分为两篇：上篇为微积分部分，包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元微分学简介；下篇为线性代数与概率统计部分，包括线性代数初步、概率论初步、数理统计初步．建议总学时数为130学时．

在编写过程中，作者充分考虑了以下几点：

1. 在内容取舍、结构安排和讲述深度上，充分照顾专科学生学习的特点，文字通俗易懂，例题由浅入深，便于自学．

2. 为了提高读者运用数学分析方法处理实际经济问题的能力，除简单介绍建模知识外，几乎每章都选有与经济应用相关的例题和习题．

3. 为了使读者能够及时巩固所学的知识，书中每一节内容后面都附有习题，并在书后提供了习题参考答案．

本书由邱香兰主编，参加编写的老师还有程丽萍、贺好函．林元重老师认真审阅了全书并提出了宝贵的修改意见．在本书的编写过程中还参阅了大量的文献资料，在此向文献资料的作者致以诚挚的谢意．

本书配有电子课件，选用本书的老师可以登录机械工业出版社教材服务网 www.cmpedu.com 下载．咨询邮箱：cmpgaozhi@sina.com．咨询电话：010-88379375．

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编者

目　　录

上篇　微　积　分

第1章　函数与极限

1.1　函数的概念及其基本性质

函数概念的形成历经了不同时期数学家的不断发展及完善过程．虽然在中学里我们都学习过函数概念，但是现在要从全新的视角来对它进行描述．

1.1.1　常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量，如气温、身高、产量、收入、成本等．这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称为**常量**．例如，圆周率 π 是永远不变的量；而某种商品的价格、某个班的学生人数是在某一段时间内保持不变的量，这些量都是常量．另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它们称为**变量**．例如，一天中的气温、生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量．研究变量的意义在于：人们对于所关心的事物，总是想了解描述此事物的某几个关键量的属性，这些量是常量还是变量？如果是变量，那么它的变化范围是多大，变化方式如何，变化趋势怎样等．通常，将变量的可能取值范围称为变量的**变化范围**．当变量的变化范围由一个或几个区间构成时，称之为**连续型变量**；当变量的变化范围为有穷数集或无穷数集时，称之为**离散型变量**．

1.1.2　函数的定义

在日常的实际活动中，人们在面临错综复杂、瞬息万变的事件或问题时，需要弄清事件或问题中的关键的变量之间的相互关系及影响程度，从而做出合理而科学的决策，而这便导致函数概念的引入．例如，生产某种产品的固定成本为8000元，每生产一件该产品，成本增加50元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出

$$y = 50x + 8000.$$

上式刻画了产量 x 与总成本 y 之间的依从关系．通常称以这种方式定义的 x 与 y 的关系为解析形式的函数．函数的较一般描述如下所述．

定义　设 x，y 是两个变量，X 是 x 的变化范围，Y 是 y 的变化范围，f 是一个对应法则．若对于每个 X 中的 x 值，依据对应法则 f，Y 中有确定的并且唯一

的一个 y 值与之对应，则称对应法则 f 是从 x 到 y 的一个**函数**. 记作

$$y=f(x),\ x\in X \quad 或 \quad f: x\to y,\ x\in X.$$

并称 x 为**自变量**，y 为**因变量**；X 是 f 的**定义域**，$f(x)$ 是 f 在 x 处的**函数值**；当 x 在 X 中变动时，函数值 $f(x)$ 的全体(是 Y 的一个子集)

$$G=\{y \mid y=f(x),x\in X\}$$

称为函数 f 的**值域**.

关于这个定义，我们必须作几点重要说明：

(1) 与初等函数中称因变量 y 是函数的说法不同，定义中称对应规则 f 为函数，这一方式表明，函数的本质是变量之间的对应关系.

(2) 在定义 1 中，并未规定对应法则 f 必须是用数学公式来表现的，尽管这是最常用的形式. 依据定义，描写一个对应法则的方式不限于这一种形式，还可以采用曲线、表格，甚至文字等各种方式表示.

例如图 1-1 中的心电图表示了一位受检者的心电情况，是电流信号随着时间 t 变化的一个函数. 尽管我们也可以构造出该曲线的一个近似的数学公式，但是对于医生来说，并不需要函数的解析形式，直接对曲线形状进行分析，更能得到所需要的病情信息.

图 1-1

又如，某商店一年中各月份毛线的销售量(单位：$\times 10^2$kg)，见表 1-1.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

表 1-1 表示了月份 t 到销售量 y 的函数关系. 当自变量 t 取 1 ~ 12 之间任意一个整数时，从表格中可以查到一个 y 的对应值.

(3) 在定义 1 中，对法则 f 的一个基本要求是，它必须能以确定的方式指定唯一的一个 y 值与 x 值对应. 这种可操作性与唯一性是十分重要的. 例如，以下几种文字描述的对应法则不符合函数定义中的这一要求：

1) 有少许白头发的男士可以免费领取一瓶染发水；

2) 任给实数 x，$f(x)$ 是满足 $y^2=x$ 的实根 y.

因此，一个对应法则及一个使该法则成立的定义域便构成了函数概念的两个基本要素. 两个函数相同的充分必要条件便是这两个基本要素完全一样，即定义域相同并且自变量取相同的值时所对应的因变量之值也完全相同. 鉴于此，人们有时也把函数中的因变量省去不写，而将函数 $y=f(x)$ 简记成

$$f(x),\ x\in X.$$

例 1　指明以下两对函数中哪一对是相同的.

(1) $f(x)=\ln x^2$，$x>0$，　　$g(y)=2\ln y$，$y>0$；

(2) $f(x)=\ln x^2$，$x\neq 0$，　　$g(x)=2\ln x$，$x>0$.

解　(1) 中两个函数所用的字母虽然不同，但其定义域相同，都是正实数，并且在自变量取相同的值时函数值也一样，如当 $x=2$，$y=2$ 时，有 $f(2)=\ln 2^2=2\ln 2=g(2)$，可见对应规则也一致，故两函数相同.

(2) 中两个函数的定义域不一样，故两函数不相同.

1. 函数的图形

函数 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 的图形(见图 1-2)定义为平面直角坐标系 xOy 中的点集 $G_f=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$.

虽然有时候 G_f 并不是一条通常意义上的曲线(比如它是断开的几条线段或一些点的集合)，但仍称之为曲线，简称为曲线 $y=f(x)$.

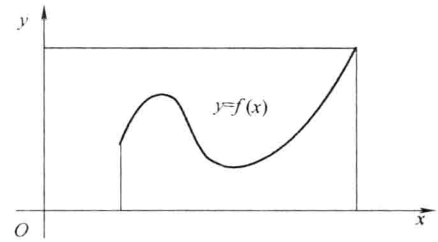

图 1-2

就像心电图的例子一样，曲线 $y=f(x)$ 以直观的方式给出了函数的整体分布及 x 与 y 的动态关系，这对于理解函数性质或探索可能结果十分有益. 在本书中，我们将常常画出函数的图形以便于对问题的理解.

2. 自然定义域

当函数 $y=f(x)$ 表现的是某个实际问题时，它的定义域便完全由此问题中 x 的实际意义来确定. 但是人们在数学处理过程中，为了更好地表现函数关系本质，往往去掉了函数问题中变量所依存的背景空间，而仅将函数作为变量之间的一种纯粹的对应法则来研究. 这种情况下，人们对于以数学公式形式写出的函数，将其定义域规定为使得公式有意义的所有 x 的取值范围，并称之为**自然定义域**. 例如对函数(不考虑其实际背景)

$$y=50x+8000$$

来说，其定义域便是全体实数$(-\infty,+\infty)$.

例 2　求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$的定义域.

解　对分数$\dfrac{u}{v}$来说，运算规则要求分母不为零，故应当有 $x\neq 0$，$x-1\neq 0$，于是其定义域为三个区间$(-\infty,0)$，$(0,1)$及$(1,+\infty)$的并集.

例 3　求函数 $y=\lg(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$的定义域.

解　由初等数学知，对数的真数 $1-x$ 必须为正数，开平方根的数 x 必须非

负，再结合分母不能为零，便可以写出约束自变量的条件为

$$\begin{cases}1-x>0\\ x>0\end{cases},$$

联立求解，便得到所求定义域为$(0,1)$.

例 4 求函数 $y=\arcsin\ (\mathrm{e}^x-1)$ 的定义域.

解 由初等数学知，反正弦函数的定义域是$[-1,1]$，故有

$$-1\leqslant \mathrm{e}^x-1\leqslant 1,$$

于是，$-\infty<x\leqslant \ln 2$，所求定义域为$(-\infty,\ln 2]$.

例 5(分段函数) 某客运公司规定的行李收费规则为：每位乘客可免费携带至多 20kg 的行李，超过 20kg 的，对超出部分按 2 元/kg 的价格加收运费. 于是行李的重量 w 与乘客为行李所支付的费用 p 之间的函数关系可写成以下形式

$$p=\begin{cases}0 & 0\leqslant w\leqslant 20\\ 2(w-20) & w>20\end{cases}.$$

函数的图形如图 1-3 所示.

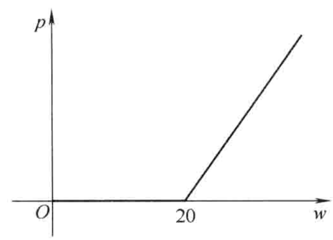

图 1-3

通常称这种形式的函数为分段函数，其对应法则由几个分规则构成. 每个分规则不重叠，各自适合于自变量的某一段变化范围. 在商业活动中存在着许多分段函数，如电话计费采用分时计价，同样的商品在不同地区之间实行价格歧视策略等.

1.1.3 几个常用函数

以下通过实际问题来引入一些常用的函数，并介绍这些函数的代数特征与几何图形，以期对它们有较全面的理解.

例 6(比例函数) 如果每千克大米的价格是 3.6 元，则购买 x 千克大米所需支付的价钱 y 便与 x 成比例关系，比例系数是单价 $p=3.6$，故 x 与 y 的函数关系为

$$y=f(x)=px.$$

它的代数特征是：y 与 x 的比(即价格)保持为常数，如图 1-4 所示.

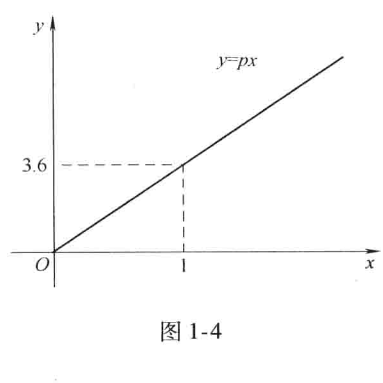

图 1-4

例 7(反比例函数) 在一个电流为 I，电阻为 R，电压为 V 的电路中，若电压 V 是常数 V_0，则 I 与 R 的关系即为反比例关系

$$I = f(R) = \frac{V_0}{R}$$

其代数特征是：自变量 R 与因变量 I 的乘积保持为常数，如图 1-5 所示.

例 8（**线性函数**）　一个理发店的经营成本 y 由固定成本及可变成本两部分构成. 固定成本 c 由店面租金、理发员的基本工资构成，无论是否有人来理发，这个费用都得开支；可变成本则是顾客来了之后，由耗材、电费、理发员的提成工资等构成，通常这是与顾客人数 x 成比例的（设为 kx），则经营成本 y 便是 x 的线性函数

$$y = kx + c.$$

函数图形如图 1-6 所示. 它的一个重要性质为，无论目前顾客人数是多少，每增加一位顾客所带来的经营成本的增加是相同的，即

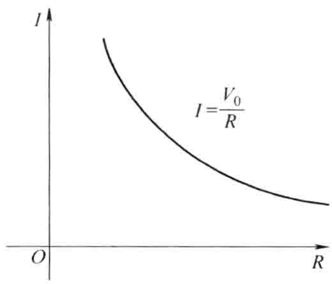

图 1-5

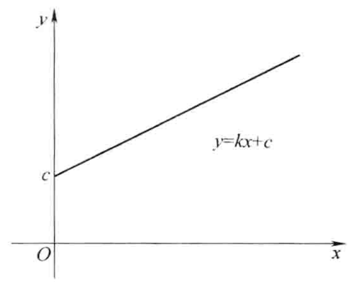

图 1-6

$$y(x+1) - y(x) = k$$

对这一现象的本质化的理解则是：y 的增量与 x 的增量之比是常数

$$\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = k$$

例 9（**指数函数**）　某一地区的人口统计数据，见表 1-2.

表 1-2

t/年	1980	1981	1982	1983	1984	1985
y：人口/百万	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60
人口改变量/百万		1.75	1.80	1.84	1.89	1.94

从表 1-2 中可以看出，随着时间 t 的增大，人口总数不断增加，并且每年的改变量也呈逐年上升趋势.

为了知道总人口数 y 与时间 t 是什么函数关系，以 1980 年总人口数为基准，则可以发现一个规律

$$\frac{1981\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{69.13}{67.38}=1.026,$$

$$\frac{1982\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{70.93}{67.38}=(1.026)^2.$$

于是我们推测 1980 年后的第 t 年时，总人口数 $y(t)$ 为

$$y(t)=1980\text{ 年人口数}\times(1.026)^t.$$

这是一个指数函数．通常记作

$$y=ka^t.$$

其代数特征为：相同间隔(相邻 1 年或相邻 Δt 年)年份的总人口数之比是常数

$$\frac{y(t+\Delta t)}{y(t)}=\frac{y(s+\Delta t)}{y(s)}.$$

对依从指数函数 $y=ka^t(k>0)$ 变化的函数，当 $0<a<1$ 时，y 关于时间变量 t 递减，当 $a>1$ 时，y 关于 t 递增．设当 $t=0$ 时，y 的值为 y_0，而当 $t=T$ 时，y 的值为 $y_0/2$(或 $2y_0$)，则称 T 为变量 y 的**半衰期**(或**倍增期**)．其图形分别如图 1-7、图 1-8 所示．指数函数在增长和衰减问题中有着广泛的应用.

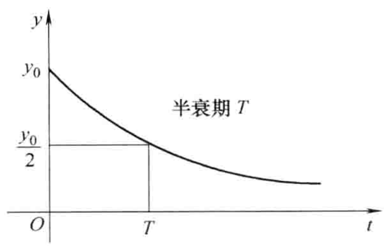

图 1-7

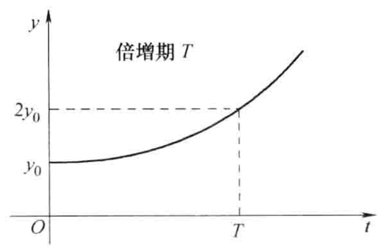

图 1-8

例 10 一段用粘土制成的发动机排气管可用来吸收废气中污染物，且 1m 长的管道可使污染物减少 20%．设废气在进入管道之前的污染物含量 y 的初始量是 y_0，问变量 y 衰减到初始量的一半所需要的管道长度(即半衰期)是多少？若要将污染物减少到初始量的 1/16，应使用多长的排气管？

解 设 x 表示排气管长度，则依题意有

$$y(0)=y_0,\ y(1)=0.8y_0,\ y(2)=0.8^2y_0,$$

故推测

$$y(x)=y_0(0.8)^x,$$

求解方程

$$\frac{y_0}{2}=y_0(0.8)^x,$$

得

$$x=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln 0.8}\approx 3.1.$$

可见使用 3. 1m 长的管子可使污染量减少一半，为$\frac{1}{2}y_0$；再使用 3. 1m 长的管子，又可使污染量减少一半，为$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y_0\right)=\frac{1}{4}y_0$. 由此推得，4 个 3. 1m(即 12. 4m)的排气管可以使污染量减少到$\frac{1}{16}y_0$.

1.1.4　函数的几何性质

在研究函数的代数性质的过程中始终保持对其几何图形的理解是十分重要的. 以下四个关于函数的几何性质的内容便是从对曲线形态的直观印象入手，使用代数语言来准确描述的.

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间，且有

$$f(-x)=f(x)\,(\text{或} f(-x)=-f(x)),\quad x\in D,$$

则称 $f(x)$ 是偶函数(或奇函数).

如图 1-9 所示，从几何上看，奇函数的曲线 $y=f(x)$ 关于原点对称，偶函数的曲线 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称.

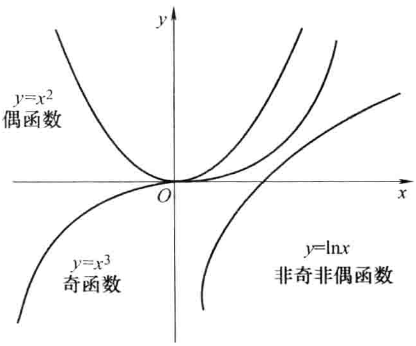

图 1-9

例 11　直接依定义可以验证以下函数是奇函数

$$y=x,\ y=x^3,\ y=\sin x,\ y=\tan x.$$

而以下函数则是偶函数

$$y=1,\ y=x^2,\ y=\cos x,\ y=x\sin x,\ y=|x|.$$

在绘制奇(偶)函数的图形时，可以先画出函数在正半轴$(0,+\infty)$上的图形，然后对称地复制出另一半的图形.

应当说明的是，有些函数既非奇函数，也非偶函数. 例如指数函数 $y=e^x$ 及对数函数 $y=\ln x$.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 于区间 D 上有定义，并且对于 D 中任意的两个数 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,(\text{或} f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加(或单调减少)；

若总有

$f(x_1) < f(x_2)$（或$f(x_1) > f(x_2)$），

则称$f(x)$在区间D上严格单调增加（或严格单调减少）.

如图1-10所示，从几何上看，单调增加（或单调减少）的函数$y=f(x)$的曲线是沿着x轴的正向逐渐上升（或下降）的.

依据单调函数的定义知，严格单调增加（或严格单调减少）的函数也是单调增加（或单调减少）函数. 通常将这四类函数称为单调函数，而称相应的区间D为单调区间.

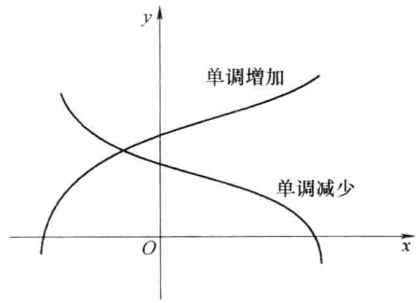

图1-10

例12 函数$y=x^2$在其定义区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数. 但它在区间$(-\infty,0)$上是严格单调减少函数，在区间$(0,+\infty)$上是严格单调增加函数（图1-9）.

3. 函数的周期性

设有正常数T，使得对每个$x\in D(x+T\in D)$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$是**周期函数**，T是$f(x)$的一个周期. 如果函数存在最小正周期T_0，则称T_0为$f(x)$的**基本周期**.

从几何上看（图1-11），周期函数的曲线可以由一个基本周期区间$[0,T_0]$上的图形经**平移复制得到**.

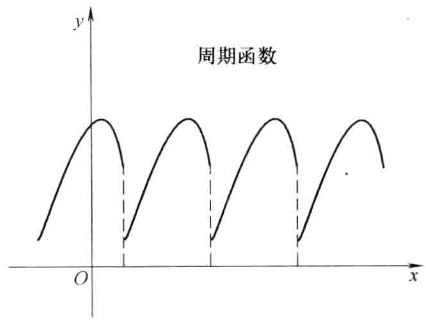

图1-11

例13 函数$y=\sin x$及$y=\cos x$是以2π为基本周期的. 而$y=|\sin x|$，$y=\cos^2 x$，则是以π为基本周期的.

周期函数的应用十分广泛. 它可以用来表示诸如四季的更替、行星的运动、生命的延续等周而复始的客观现象.

4. 函数的有界性

设有常数$M>0$，使得对每一个$x\in D$，有

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M \text{ 或 } |f(x)|\leqslant M.$$

则称$f(x)$为D上的有界函数，或称$f(x)$在D上有界. 当$f(x)$不是D上的有界函数时，称$f(x)$为D上的无界函数或称$f(x)$在D上无界.

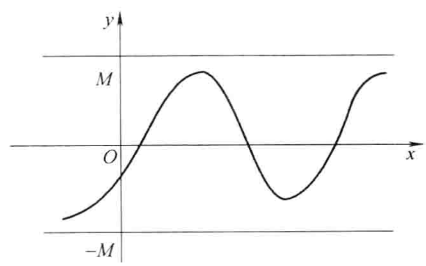

图1-12

从几何上看（图1-12），有界函数的曲

线 $y=f(x)$ 位于两条水平直线 $y=-M$ 及 $y=M$ 之间.

例 14　正弦函数 $y=\sin x$ 由于满足 $|\sin x|\leqslant 1$，故它是有界函数. 类似地，可以说明余弦函数也是有界函数.

例 15　反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上的每一点都有定义，函数值都是实数，但是却找不到常数 $M>0$，使得每个函数值均比 M 小，因而该函数是开区间 $(0,1)$ 上的无界函数. 事实上，无论 M 多么大，不妨设 $M>1$，只要取 $x_M=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$，则有 $f(x_M)=2M>M$，如图 1-13 所示，因此没有常数 M 使 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in(0,1)$ 成立.

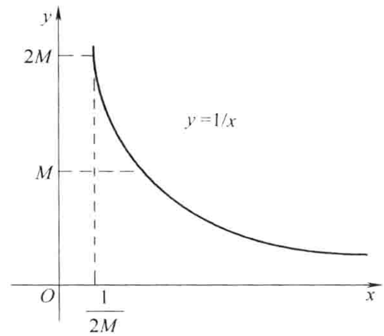

图 1-13

但是，该函数在开区间 $\left(\dfrac{1}{100},1\right)$ 上却是有界的，因为此时可取 $M=100$，使得下式成立

$$0<f(x)=\frac{1}{x}<100,\quad x\in\left(\frac{1}{100},1\right).$$

可见，函数的有界性与所关联的区间是紧密相关的.

当函数 $y=f(x)$ 于 D 上有界时，相当于说因变量 y 的变化范围包含于某个有限区间 $[-M,M]$ 之中. 我们称这样的变量为**有界变量**. 在对未知变量进行研究时，该变量是否有界是一个十分重要的属性.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x}$;　　(2) $y=\sqrt{1-x}$;

(3) $y=\ln(1+x)$;　　(4) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

2. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x\sin x$;　　(2) $y=x+\sin x$;

(3) $y=\ln(1+x)$;　　(4) $y=\ln(1+x^2)$.

3. 判断下列函数 f, g 是否相同：

(1) $f(x)=1$，$g(x)=\dfrac{x+1}{x+1}$;　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sin x(-\infty<x<+\infty)$，$g(x)=\sin x(x>0)$;

(4) $f(x)=\tan x$，$g(y)=\tan y$.

4. 判断下列函数是不是有界函数：