俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Mathematical Analysis

数学分析

[俄]庞特里亚金 编著 周概容 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学分析

Mathematical Analysis

[俄] 庞特里亚金 编著

周概容 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

这本小册子供初学数学分析用. 它包括中学所讲授的数学分析各章节的全部内容. 书中讲述多项式的导数、三角函数的导数、指数函数和对数函数的导数. 积分定义为微分的逆运算、图形的面积及有穷和的极限. 书后附有各章的练习. 本书并不着意于讲述的严格性, 而是注意给学生以计算技巧的训练.

本书的对象是中学教师和高年级学生、师范院校数学专业的学生, 以及初学数学分析的读者.

本书的作者 Л · С · 庞特里亚金 (Л. С. Понтрясин) 是著名数学家, 前苏联科学院院士, 莫斯科大学数学系教授.

图书在版编目 (CIP) 数据

数学分析/(俄罗斯)庞特里亚金编著; 周概容译. —
哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014.4
书名原文: Математический анализ
ISBN 978 - 7 - 5603 - 4087 - 6

Ⅰ. ① 数… Ⅱ. ①庞… ②周… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 106322 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王 慧
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 6 字数 63 千字
版 次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 4087 - 6
定 价 28.00 元

◎前言

这本小册子是给中学作数学分析课本用的，它包括各类教学大纲所规定的内容.本书不是从极限及其运算法则讲起，而是从切线和导数的概念讲起.书中把极限当作某种显而易见的东西，并且根据切线和导数的定义予以阐明；接着是求多项式的导数和三角函数的导数，给出函数之积与商的微分法则，以及复合函数的微分法则；此间证明了罗尔定理，导出了拉格朗日公式，并在此基础上对函数进行研究：讨论函数的递增区间和递减区间，求函数的极大值和极小值.积分是从三个不同的角度来定义的，即作为微分的逆运算、图形的面积以及有穷和的极限引进了积分.此后，深入地研究了函数 e^x.我们把函数 e^x 看作自然数 n 无限增大时多项式列 $(1+\frac{x}{n})^n$ 的极限，进而求出函数 e^x 和 $\ln x$ 的导数.在书后面为各节配备了练习题，这些题虽为数不多，但是有些是相当难的.本书着眼于计算技巧，而不追求逻辑上的严格.它是一种普及性读物，适用于数学分析的初步学习.由于我本人从未教过中学，在写本书时我所依据的只是一个成熟了的数学家的合理思维，以及我自己对中学时代接受数学分析的情景的回忆.尽管当时中学没有数学分析这门课程，然而在进大学之前我已经相当熟悉有关内容，知道什么叫导数和积分，并且学会用这些工具解题.然而当时我没有丝毫关于极限理论的概念，只有到大学我才知道极限理论的存在，这当时使我觉得非常惊奇.因此，我认为在中学讲数学分析不应从极限理论讲起.要知道极限理论在历史上是在数学分析出现之后很久才形成的.深入研究极限和连续函数之类的东西会使学生感到

枯燥无味,甚至感到厌烦.记得在上中学时,当我在一份分析材料中读到关于连续函数遍取一切中间值的定理证明时,使我感到莫名其妙.把函数的图象看作经过精细加工制成的金属薄板的光滑边缘,这是一般人都能接受的.如果这样想象函数的图象,那么就可以把图象凸部位的切线看作紧贴金属板边缘的直尺的边缘,从而无论对切线的存在还是对导数的存在都不致产生怀疑,因而也就不会怀疑积分的存在了.我希望中学生在学几何时,把三角形看作特制的金属薄板,因此可以把它拿在手中,把它从一个地方挪动到另一个地方,并且可以任意翻转.这不是说应当这样来定义三角形,而是说应当这样来想象三角形.我认为讲述数学分析应从切线和导数的定义讲起,而不应从极限的定义讲起.

我觉得中学教学大纲只应包括第1章到第7章的内容.至于第8章到第10章深入地讲述函数 e^x,有些过于繁杂,不过鉴于教学大纲的要求,我还是这样讲了.同样,为适应教学大纲的要求,我在后记(第13章)中写了有关极限和连续函数的内容.

对于这本小册子的编写和校对工作,B. P. Телеснин 曾给予很大帮助,我在此对他表示感谢.

庞特里亚金

◎ 目录

导　数

第1章

函数的导数在函数的研究中起着重要作用. 假设

$$y=f(x) \tag{1}$$

是一给定的函数. 那么可以求出一个函数 $f'(x)$,称作函数 $f(x)$的导数,用它的值表征变量 y 随变量 x 变化而变化的速度. 当然这并不是导数的定义,而只不过是导数概念的一种直观描述. 现在讨论一种特殊情形,以充实这种描述. 如果函数关系(1)是正比例关系 $y=kx$,那么 y 对于 x 的变化速度自然为 k,即这时应有 $f'(x)=k$. 导数在这里有明显的力学意义. 如果把 x 看成时间,而把 y 看成在这一段时间内某质点所走过的路程,则 k 就是质点运动的速度. y 相对 x 的变化速度 $f'(x)$在这里是一常数,但是当式(1)表示 y 对变量 x 更为复杂的依赖关系时,导数 $f'(x)$本身也是变量 x 的函数.

导数常用于物理过程的研究. 对于这些物理过程,各种不同的物理量随时间的流逝而变化,而它们的变化速度起着重要作用. 不过,我们从导数的几何应用开始,并以此为例来更加确切地说明导数的概念.

导数和切线　我们在某笛卡儿直角坐标系中描出由式(1)给出的函数 $f(x)$的图象. 一般,为此首先在平面上引一条水平的横坐标轴并选自左而右的方向为其正向,然后再画一条铅直的纵坐标轴并选自下而上的方向为其正向(图 1). 在此坐标系中,函数的图象是一条曲线. 我们用 L 表示该曲线. 现在提出如下问题:从理论上定义曲线 L 在它的某一点 M 上的切线,并求

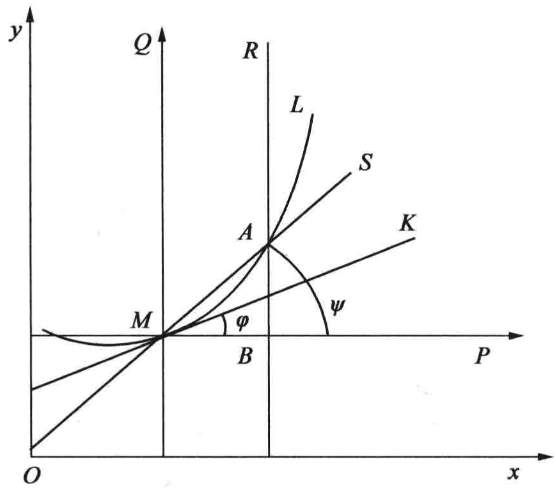

图 1

出决定这条切线的量. 为从理论上定义切线,暂时固定点 M,并在点 M 的邻近处取不同于它的一动点 A. 过点 M 和 A 引一直线 S. 我们称直线 S 为曲线 L 的**割线**,因为它与曲线 L 在 M 和 A 两个点上相交. 曲线 L 上的动点 A 可能位于点 M 的左侧也可能位于它的右侧. 现在沿着曲线 L 移动点 A,使之无限地接近点 M. 当动点 A 沿曲线 L 向点 M 移动时,如果过定点 M 和动点 A 的割线 S 不断变换位置并无限接近某过点 M 的直线 K,那么就称这条直线 K 为曲线 L 在点 M 的**切线**. 这时,要求直线 K 与动点 A 与从定点 M 的左侧还是右侧接近 M 点无关. 当点 A 沿曲线 L 向点 M 运动时,如果割线不靠近任何一个确定的位置 K,则曲线 L 在点 M 没有切线. 切线 K 总是过一固定的点 M. 如果直线 K 不与纵坐标轴平行,则为求它对横坐标轴的倾角 φ,只需求 $\tan\varphi$.

假设 ψ 是割线 S 对横坐标轴的倾角. 为求 $\tan\varphi$,我们首先来求 $\tan\psi$. 点 M 的横坐标和纵坐标分别记作 x 和 y 且

$$M=(x,y) \tag{2}$$

因为点 M 位于函数 $f(x)$ 的图象 L 上,式(2)中的 y 和 x 满足关系式(1). 类似地以 ξ 和 η 表示点 A 的横坐标和纵坐标,即

$$A=(\xi,\eta) \tag{3}$$

同样,因为 A 位于函数 $f(x)$ 的图象上,故 ξ 和 η 满足关系式

$$\eta=f(\xi) \tag{4}$$

现在过点 M 引两条直线:一条水平直线 P 和一条铅直直线 Q. 这两条直线分别与原坐标系的横坐标轴和纵坐标轴平行. 在这两条直线上分别选与相应的原坐

标轴一致的方向为其正向. 若以直线 P 和 Q 分别为横轴和纵轴，以 M 为原点，就可以在函数图象的平面上决定一个新的坐标系. 因为割线 S 不会是铅直的，所以选自左而右的方向为其正向不致产生疑问. 由于新横坐标轴与原横坐标轴平行，所以角 ψ 等于直线 P 的正向与直线 S 的正向之间的夹角. 角 ψ 小于直角，但它既可能是正的，也可能是负的. 以 P 和 Q 为轴以 M 为原点的新坐标系把平面分成四个象限. 如果割线 S 的正向自第三象限指向第一象限，则角 ψ 为正；如果割线 S 的正向自第二象限指向第四象限，则角 ψ 为负. 点 A 在新坐标系下的横坐标和纵坐标分别等于

$$(\xi - x)\text{和}(\eta - y) \tag{5}$$

为求角 ψ，过点 A 引一条直线 R 与纵坐标轴平行. 假设 B 是直线 R 与直线 P 的交点. 看直角三角形 ABM，其中 B 是直角的顶点. 如果不考虑角 ψ 的符号，则它等于直角三角形 ABM 中以 M 为顶点的 $\angle AMB$. 角 ψ 的正切等于直角边 AB 的长 $l(AB)$ 与直角边 MB 的长 $l(MB)$ 之比值. 于是，得计算公式

$$|\tan \psi| = \frac{l(AB)}{l(MB)} \tag{6}$$

长度 $l(AB)$ 等于新坐标系下 A 点之纵坐标的绝对值，即 $l(AB) = |\eta - y|$（见式(5)）. 同样，长度 $l(MB)$ 等于新坐标系下 A 点之横坐标的绝对值，即 $l(MB) = |\xi - x|$. 从而，由式(6)得

$$|\tan \psi| = \frac{|\eta - y|}{|\xi - x|} \tag{7}$$

现在证明

$$\tan \psi = \frac{\eta - y}{\xi - x} \tag{8}$$

为此我们指出，如果点 A 位于第一或第三象限，则它的横坐标和纵坐标同号，从而式(8)右侧的量为正. 而这时 $\tan \psi$ 的值也为正，因为角 ψ 的值是正的. 假如 A 点位于第二或第四象限，则它的横坐标和纵坐标（见式(5)）的符号相反，因此式(8)右侧的量为负. 但这时 $\tan \psi$ 的值也为负，因为这时角 ψ 的值是负的. 于是式(8)得证. 根据式(1)和式(4)两式，在式(8)中把 y 和 η 分别换成 $f(x)$ 和 $f(\xi)$，得

$$\tan \psi = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{9}$$

当点 A 无限地接近于点 M 时，它的横坐标 ξ 无限地接近于点 M 的横坐标 x. 我们用

$$\xi \to x \tag{10}$$

来表示这一事实. 为求 $\tan \varphi$ 的值，我们需要求当 $\xi \to x$ 时，$\tan \psi$ 所趋向（无限地

接近)的值. 这可以用式子写成

$$\text{当 } \xi \to x \text{ 时}, \tan\psi \to \tan\varphi \tag{11}$$

在高等数学中把上边的两个式子写成一个式子,即

$$\lim_{\xi \to x} \tan\psi = \tan\varphi \tag{12}$$

如果把该式中的 $\tan\psi$ 换成式(9)右侧的量,则式(12)有如下形式

$$\tan\varphi = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{13}$$

以上两式中的符号 lim 是拉丁语词 limit 的缩写,其中文含义是"极限".

为严格地讲述式(13)中对于分式

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{14}$$

所作的运算,我们理应确切地定义符号"→"的含义,即说明一变量趋向某常数的含义. 但是,我们在这里仅局限于对这一过程直观的理解. 注意,在式(14)中不能简单地令 $\xi = x$,因为这样分子和分母将同时为 0. 因而必须讨论变量 ξ 接近常数 x 的过程,并且考察变量(14)的变化情况.

为通过简单的例子来说明极限过程的概念,我们看函数 $f(x)$ 为

$$y = f(x) = x^2 \tag{15}$$

的情形.

这时式(14)中的分式为

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = \xi + x \tag{16}$$

在该等式的右侧已经可以把 ξ 换成 x. 这时不会得到毫无意义的比 $\frac{0}{0}$. 因此,对于这一特殊的情形,有

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} (\xi + x) = 2x \tag{17}$$

于是,我们证明了,当 $\xi \to x$ 时,有

$$\frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} \to 2x \tag{18}$$

即

$$\lim_{\xi \to x} \frac{\xi^2 - x^2}{\xi - x} = 2x \tag{19}$$

对于任一函数 $f(x)$,称

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{20}$$

为它在 x 点的**导数**，记作 $f'(x)$. 这样，根据定义，有

$$f'(x)=\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\tan\varphi \tag{21}$$

(见式(13)).

可能出现这样的情形：当 $\xi\to x$ 时，式(14)中的量不趋向于任何极限. 这时，我们说函数 $f(x)$ 在 x 点没有导数.

于是，由式(19)可见，对于由式(15)给出的函数，有

$$f'(x)=2x \tag{22}$$

应当注意，在式(21)中我们并没有单独讨论 A 从左侧接近 M 和 A 从右侧接近 M 这两种情形. 前者 ξ 趋向于 x 时不断减小，而后者 ξ 趋向于 x 时不断增大. 对于 ξ 趋向 x 的这两种方式，求导数所得结果应该是完全相同的. 也只有这时才认为导数在 x 点是存在的.

如果直线 K 铅直，则当 $\xi\to x$ 时 $\tan\psi$ 无限增大. 因此，这时式(14)中的比值无限增大，从而不趋向于任何极限. 于是，函数在该点导数不存在. 不过，有时根据习惯也说函数在该点导数为无穷大. 综上所述，可见函数 $f(x)$ 在 M 点的导数存在，而且仅当曲线 L 在 M 点有切线 K，而且切线不是铅直的. 然而，不难指出这样的函数，在 ξ 从左侧趋向 x 时和 ξ 从右侧趋向 x 时，由式(14)将得到不同的结果. 作为例子，我们看由方程

$$y=f(x)=|x|+x^2 \tag{23}$$

所决定的函数. 我们来求此函数在点 $x=0$ 处的导数. 这时，我们有

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=\frac{|\xi|}{\xi}+\xi \tag{24}$$

当 $\xi>0$ 时，$|\xi|=\xi$；当 $\xi<0$ 时，$|\xi|=-\xi$. 因而，有

$$\frac{|\xi|}{\xi}=1,\text{若 }\xi>0 \tag{25}$$

和

$$\frac{|\xi|}{\xi}=-1,\text{若 }\xi<0 \tag{26}$$

这样，当 $\xi>0$ 时，有

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=+1 \tag{27}$$

而当 $\xi<0$ 时，有

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{|\xi|+\xi^2}{\xi}=-1 \tag{28}$$

从而，式(24)中变量的极限与 ξ 是从左侧接近于0还是从右侧接近于0有关. 这时认为该函数(见式(23))在点 $x=0$ 处没有导数，而它的图象在相应的点上

没有切线. 在许多更复杂的场合式(21)不能决定$f'(x)$的值.

求函数$f(x)$的导数的运算(见式(21))有时称作对函数$\boldsymbol{f(x)}$**微分**,而在x点有导数的函数称作在点$\boldsymbol{x}$**可微的**. 我们以后所考虑的函数,除了在个别点上的导数可能为无穷大之外,在一切点上都是可微的.

在以后的叙述中,如果不特别说明,则认为所考虑的每一个函数在一切点上都可微. 只有当导数在个别一些点上为无穷大时,我们才特别说明.

函数的连续性 我们现在略微改变一下式(21)的形状.

令

$$k = k(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \tag{29}$$

那么,由式(21)有

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} k(\xi) \tag{30}$$

由式(29)不能决定$k(x)$的值. 如果令$k(x) = f'(x)$,那么$k(x)$的值就确定了. 由式(29)可见

$$f(\xi) - f(x) = k(\xi)(\xi - x) \tag{31}$$

其中$k(\xi)$满足条件(30). 这里,当$\xi = x$时,式(31)仍然成立. 我们称差$\xi - x$为**自变量的增量**,称差$f(\xi) - f(x)$为**函数的增量**.

在式(31)两侧令$\xi \to x$时取极限,得

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \to x}[f(\xi) - f(x)] &= \lim_{\xi \to x} k(\xi) \cdot \lim_{\xi \to x}(\xi - x)\\ &= f'(x) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

由此可见

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x) \tag{32}$$

如果对于给定的x,函数$f(x)$满足式(32),就说它在点x处**连续**. 如果函数对于自变量x的一切值都连续,就说它是**连续函数**. 这样,我们证明了,如果函数$f(x)$在点x有导数,则它在该点连续. 而如果函数可微(即它对于x的一切值可微),则它一定是连续函数.

多项式导数的求法

第2章

我们在这一章中求任意形如

$$y=f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

的函数的导数，即求以常数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$ 为系数的 x 的多项式的导数. 这里使用稍加改变的记号来表示函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 往往更加方便. 具体地说，我们有时用 $[f(x)]'$ 来表示 $f(x)$ 的导数，即

$$f'(x)=[f(x)]' \tag{2}$$

基于上面的表示法，由第 1 章的式(15)和式(22)，可见

$$(x^2)'=2x$$

我们首先来求最简单的 n 次多项式，即只含 x^n 一项的多项式

$$y=f(x)=x^n \tag{3}$$

的导数. 为求函数(3)的导数，我们利用代数中一个非常简单但是十分重要的公式. 下面来证明这个公式(见式(9)).

为写出并证明这个代数公式，我们引进两个变量 u 和 v 的多项式，即

$$\varphi_k(u,v)=u^k+u^{k-1}v+\cdots+uv^{k-1}+v^k \tag{4}$$

多项式 $\varphi_k(u,v)$ 是一切形如 u^iv^j 的单项式之和，其中 i 和 j 是非负整数，满足条件 $i+j=k$.

将 $\varphi_k(u,v)$ 乘以 u，得多项式

$$\varphi_k(u,v)\cdot u \tag{5}$$

它是一切形如 $u^{i+1}v^j$ 的单项式之和，其中 i 和 j 是非负整数，满足 $i+j=k$. 这样，多项式(5)是一切形如 u^pv^q 的单项式之和，其

中 p 和 q 是非负整数,满足条件

$$p\geqslant 1,p+q=k+1$$

因此,除 v^{k+1} 一项外,多项式(5)包含多项式 $\varphi_{k+1}(u,v)$ 的一切项. 从而,有

$$\varphi_k(u,v)\cdot u=\varphi_{k+1}(u,v)-v^{k+1} \tag{6}$$

同样,将 $\varphi_k(u,v)$ 乘以 v,得

$$\varphi_k(u,v)\cdot v=\varphi_{k+1}(u,v)-u^{k+1} \tag{7}$$

由等式(6)减等式(7),得

$$\varphi_k(u,v)(u-v)=u^{k+1}-v^{k+1} \tag{8}$$

在该式中把 $k+1$ 换成 n,然后除以 $u-v$,即可得所求的重要公式

$$\frac{u^n-v^n}{u-v}=\varphi_{n-1}(u,v) \tag{9}$$

其中 $\varphi_{n-1}(u,v)$ 为

$$\varphi_{n-1}(u,v)=u^{n-1}+u^{n-2}v+\cdots+uv^{n-2}+v^{n-1} \tag{10}$$

注意,这里 $n\geqslant 1$,因为 $n=k+1$,而 $k\geqslant 0$;$\varphi_{n-1}(u,v)$ 恰好有 n 项.

有了公式(9),可以很容易地求出函数 x^n 的导数. 根据第 1 章所讲的规则(见第 1 章,式(21)),为求 x^n 的导数首先写出比

$$\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x} \tag{11}$$

然后当 $\xi\to x$ 时求出它的极限. 由代数公式(9)知,当 $n\geqslant 1$ 时有

$$\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=\xi^{n-1}+\xi^{n-2}x+\cdots+\xi x^{n-2}+x^{n-1} \tag{12}$$

此式右侧恰好有 n 项. 为当 $\xi\to x$ 时求极限,只要把等式(12)右侧的 ξ 换成 x 就可以了. 这样,由式(12)的每一项 $\xi^i x^j(i+j=n-1)$ 都得 x^{n-1}. 于是,有

$$(x^n)'=\lim_{\xi\to x}\frac{\xi^n-x^n}{\xi-x}=nx^{n-1}$$

从而,对于 $n\geqslant 1$,有

$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{13}$$

由于公式(9)只对于 $n\geqslant 1$ 成立,故在利用公式(9)证明公式(13)时我们必须排除 $n=0$ 的情形. 因此我们尚需求出函数 $x^0=1$ 的导数. 现在,对于任意常

数 c,求函数$f(x)=c$ 的导数. 有

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\frac{c-c}{\xi-x}=0$$

从而,有

$$c'=0 \tag{14}$$

即常数的导数等于0.

为由最简单的多项式 x^n 过渡到一般多项式(1),我们现在证明求导数的两个一般法则:两函数之和的导数以及函数与常数相乘积的导数的求法. 现将两个法则表述如下:

(1)假设$f_1(x)$和$f_2(x)$是两个函数,那么

$$[f_1(x)+f_2(x)]'=f_1'(x)+f_2'(x) \tag{15}$$

即两个函数之和的导数等于它们的导数之和.

(2)假设 c 是一常数,$f(x)$是某一函数,那么

$$[c f(x)]'=c f'(x) \tag{16}$$

即一函数与一常数相乘积的导数等于函数的导数与该常数的乘积.

首先证明法则(15). 有

$$\begin{aligned}[f_1(x)+f_2(x)]'=&\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)+f_2(\xi)-[f_1(x)+f_2(x)]}{\xi-x}=\\ &\lim_{\xi\to x}\left[\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}\right]=\\ &\lim_{\xi\to x}\frac{f_1(\xi)-f_1(x)}{\xi-x}+\lim_{\xi\to x}\frac{f_2(\xi)-f_2(x)}{\xi-x}=\\ &f_1'(x)+f_2'(x)\end{aligned}$$

于是法则(15)得证.

同理可证法则(16). 有

$$\begin{aligned}[c f(x)]'=&\lim_{\xi\to x}\frac{c f(\xi)-c f(x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}c\cdot\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=\\ &c\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}=c f'(x)\end{aligned}$$

从而法则(16)得证.

由法则(15)和法则(16)可以导出一个更一般的法则. 假设有 m 个函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 和 m 个常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$. 那么,有下面的求导数法则

$$[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x)]' =$$
$$c_1 f'(x) + c_2 f_2'(x) + \cdots + c_m f_m'(x) \tag{17}$$

我们用数学归纳法来证明法则(17). 对 $m=1$,法则(17)即法则(16). 其次,由法则(15),可见

$$[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x)]' =$$
$$[c_1 f_1(x) + \cdots + c_{m-1} f_{m-1}(x)]' + [c_m f_m(x)]' =$$
$$c_1 f_1'(x) + \cdots + c_{m-1} f_{m-1}'(x) + c_m f_m'(x)$$

这里我们利用了数学归纳法的假设:法则(17)对于 $m-1$ 个函数成立. 于是,法则(17)得证.

利用法则(17),(13)和法则(14),即可以求出任意多项式(1)的导数. 有

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)' =$$
$$a_0 (x^n)' + a_1 (x^{n-1})' + \cdots + a_{n-1}(x)' + a'_n =$$
$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

这样,任意多项式(1)的导数的求法最后可以表示为

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)' =$$
$$n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \tag{18}$$

第3章 函数的极大值和极小值——罗尔定理和拉格朗日定理

由导数的定义就可以看到,导数是研究函数的有力工具.例如,倘若已知函数$f(x)$在x点的导数$f'(x)>0$,则直观上显然函数在该点的邻近递增.这一点由导数的几何意义也是显而易见的,因为这时函数图象在点x的邻近点上切线的正向指向右上方.导数$f'(x)<0$的情形也类似.这时,函数$f(x)$在x点的邻近递减在直观上也是显然的,因为函数图象在x点的邻近点上切线的正向指向右下方.我们现在确切地讲述导数的这些性质.

导数的符号 由第1章的式(31)和式(30)两式,知

$$f(\xi)-f(x)=k(\xi)(\xi-x) \tag{1}$$

且

$$\lim_{\xi\to x}k(\xi)=f'(x) \tag{2}$$

如果$f'(x)\neq 0$,则当ξ充分接近x时,$k(\xi)$与$f'(x)$同号.更确切地说,存在一充分小的正数ε,使得当

$$|\xi-x|<\varepsilon \tag{3}$$

时,$k(\xi)$的符号与$f'(x)$的符号相同.等式(1)右侧的符号依赖于它的两个因子$k(\xi)$和$\xi-x$的符号.为尽量简短地概括这里可能出现的全部四种情形,我们在满足条件(3)的ξ的值中任意选出ξ_1和ξ_2两个值,使ξ_1位于x的左侧,而ξ_2位于x的右侧.这样,ξ_1和ξ_2两个数值满足条件

$$x-\varepsilon<\xi_1<x<\xi_2<x+\varepsilon \tag{4}$$

注意到$k(\xi)$与导数$f'(x)$同号,并考虑到式(1)右侧的符号,我们可以写出如下两个关系式

$$f(\xi_1)<f(x)<f(\xi_2),\text{若}f'(x)>0 \tag{5}$$