21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN FUDAO

高等数学学习指导与考研辅导（下册）

主　编◎孙法国　胡新利
副主编◎王晓东　张娟娟　赵宁波

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU KAOYAN FUDAO

高等数学学习指导与考研辅导（下册）

主　编◎孙法国　胡新利
副主编◎王晓东　张娟娟　赵宁波
编　委（以姓氏笔画为序）
丁小丽　王彦林　王彩霞　孙娜　贾悦利

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与考研辅导. 下册/孙法国，胡新利主编. —北京：中国人民大学出版社，2014.8
21 世纪高等院校创新教材
ISBN 978-7-300-19667-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①孙…②胡… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 172015 号

21 世纪高等院校创新教材
高等数学学习指导与考研辅导（下册）
主　编　孙法国　胡新利
副主编　王晓东　张娟娟　赵宁波
Gaodeng Shuxue Xuexi Zhidao yu Kaoyan Fudao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 8 月第 1 版
印　　张	17 插页 1	**印　　次**	2014 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	393 000	**定　　价**	36.00 元

内容简介

本书是作者根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的. 全书共分二十五讲（上册十五讲，下册十讲），每讲分七个板块：重点内容提要、释疑解惑、考点及典型例题分析、学习效果测试题、学习效果测试题答案与提示、考研模拟训练题、考研模拟训练题答案与提示.

本书是理工科院校本科生及经济管理院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的复习参考资料.

前　言

高等数学是理工科院校及经济管理类院校的一门重要的基础课. 为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了此书. 本书是理工科院校本科生及经济管理类院校学生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的复习参考资料.

全书共分为二十五讲，每讲分为七个部分：

一、重点内容提要；

二、释疑解惑；

三、考点及典型例题分析；

四、学习效果测试题；

五、学习效果测试题答案与提示；

六、考研模拟训练题；

七、考研模拟训练题答案与提示.

本书有以下几个特点：

(1) 对每讲的内容及方法作了小结，并指出了课程考试重点和考研重点.

(2) 通过“释疑解惑”，对重点概念及容易混淆的问题进行了诠释及辨析，力求使读者建立起准确无误的概念.

(3) 通过对典型例题的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧.

(4) 精心设计学习效果测试题，以方便初学者检测之用.

(5) 根据大纲编写了考研模拟训练题，兼顾了考研同学复习的需要.

(6) 在理工科《高等数学》教学内容的基础上，增加了“导数的经济学应用”及“定积分的经济学应用”，以方便经济管理类院校学生的使用.

本书第 1 讲、第 2 讲、第 14 讲、第 15 讲由胡新利编写，第 3 讲、第 4 讲由贾悦利编写，第 5 讲、第 6 讲由孙法国编写，第 7 讲、第 8 讲、第 13 讲由王晓东编写，第 9 讲、第 10 讲由王彩霞编写，第 11 讲、第 12 讲由孙娜编写，第 16 讲、第 17 讲由王彦林编写，第 18 讲、第 19 讲由赵宁波编写，第 20 讲、第 21 讲由丁小丽编写、第 22 讲、第 23 讲、第 24 讲、第 25 讲由张娟娟编写. 全书由孙法国和胡新利统稿. 限于编者水平，书中若有疏漏之处，敬请读者批评指正.

编者

2014 年 5 月于西安

目　　录

第 16 讲

向量代数及应用

16.1 重点内容提要

16.1.1 向量的概念

(1) 向量：既有大小又有方向的量，称为**向量**，记作 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$. 若 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$.

(2) 向量的模：向量的大小，称为向量的模，记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$或$|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

(3) 向量的方向角：向量与三坐标轴正向的夹角. 分别记为 α，β，γ，且 $0\leqslant\alpha$，β，$\gamma\leqslant\pi$.

(4) 向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$的方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

(5) 夹角余弦：设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, c_z\}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦为

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}(0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi).$$

(6) 向量的投影：向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$在向量 $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$方向的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

16.1.2 向量的运算

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，$\boldsymbol{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$，$\lambda$ 为实数.

(1) 向量的线性运算.

① 坐标表达式：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$，$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$.

② 运算规律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a},\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

（2）向量的数量积.

① 定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

② 坐标表达式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

③ 运算规律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

（3）向量的向量积.

① 定义：向量积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{c}$ 满足条件：$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 成右手系.

② 坐标表达式：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$$=\{a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x\}.$$

③ 运算规律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

（4）向量的混合积.

① 几何意义：向量的混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 表示这样一个数，它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

② 坐标表达式：$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

③ 混合积的性质：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

（5）两向量垂直、平行的条件.

① $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

② $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

16.2 释疑解惑

问题 16.1 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$ 唯一吗？

解答 不唯一. $\boldsymbol{e}_a=\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

问题 16.2 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$，对吗？

解答 对. 首先每项都有意义，因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2\ \sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}))^2=|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2\ \cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

所以$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2\ |\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$.

问题 16.3　怎样确定一个向量?

解答　确定向量通常有两种方法. 其一是依据向量具有大小和方向的特性，分别求出它的大小(模) $|\boldsymbol{a}|$ 和方向 $\boldsymbol{a}^0$(或求出方向余弦或方向角)，即可确定 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$；其二是分别求出向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标 a_x，a_y，a_z，即可写出 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$.

问题 16.4　向量在坐标轴上的投影与该向量沿坐标轴方向的分向量是否相同?

解答　不相同. 向量在坐标轴上的投影是数，而向量沿坐标轴方向的分向量是向量. 例如：向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别是 a_x，a_y，a_z，沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的分向量分别是 $a_x\boldsymbol{i}$，$a_y\boldsymbol{j}$，$a_z\boldsymbol{k}$. 可以看出，向量沿坐标轴方向的分向量是该向量在坐标轴上的投影与沿此坐标轴方向的单位向量的乘积.

问题 16.5　向量的数量积有什么作用?

解答　向量的各种运算中，除线性运算外，最重要的就是数量积的运算，由定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 可知数量积与向量的长度和夹角都有关. 因此，反过来可以利用数量积确定向量的长度及两向量的夹角. 在物理、力学方面的应用也很广泛.

例如，物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下自点 A 沿直线移动到点 B，力 $\boldsymbol{F}$ 作的功为：$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. 流速为 $\boldsymbol{v}$ 的流体流过面积为 A 的截面的流量(单位时间内通过截面的流体的体积)为：$\Phi=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}A$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为截面的单位法向量.

由于在直角坐标系中，数量积的计算公式 $(a_x,a_y,a_z)\cdot(b_x,b_y,b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ 也比较简单，这就更增加了数量积在应用上的方便.

问题 16.6　向量的向量积有什么作用?

解答　向量积的定义：$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，模为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定. 因此，在物理上用来研究物体转动时力所产生的力矩；在几何上可以用来求以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

向量也是研究空间图形的有效工具. 如：利用向量可以建立空间中直线以及平面的方程，指示有向曲线的方向、有向曲面的侧等.

问题 16.7　下面几个等式是否正确?

(1) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$.

解答　以上各式都是错误的.

(1) 等式两端均为向量，左端的向量与向量 $\boldsymbol{c}$ 平行，模 $|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；右端的向量与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行，模 $|\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})$，故一般情形等式不成立；当 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{c}$ 时，等式成立.

(2) 由于向量积不满足交换律，故该式不成立. 事实上，向量与自身的向量积为零向量.

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

问题 16.8　判断下列命题是否正确?

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$；

(4) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

解答 以上均不正确.

(1) 由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，只能得出 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，只能得出 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

(3) 向量运算不满足消去律，事实上，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 可知 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，只能得出 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.

(4) 由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 可知 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=0$，只能得出 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})//\boldsymbol{c}$.

问题 16.9 如何用向量来解几何题?

解答 解题时应注意两个知识点的应用，一是熟练运用向量的线性运算，如 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{BP}$ 表示 A、B、P 三点共线，又如取点 M，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$，解题时可先作图，然后从图形中分析有关的有向线段之间的相互关系，再运用向量运算达到解题的目的；二是熟练运用数量积及向量积的两条性质，即设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)\neq\boldsymbol{0}$，则

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，用坐标表示为 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$；

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，用坐标表示为 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

16.3 考点及典型例题分析

课程考试重点

(1) 向量的表示、线性运算；

(2) 向量的模、方向角、投影；

(3) 数量积、向量积.

考研重点

(1) 向量的模、方向角、投影；

(2) 数量积、向量积、混合积.

题型一 向量的一般运算.

例 16.1 设 $\boldsymbol{a}=(4,-2,4)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,-2)$，向量 $\boldsymbol{c}$ 平分 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所张的角，且 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，求 $\boldsymbol{c}$.

分析 因为向量 $\boldsymbol{c}$ 平分 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所张的角，所以 $\boldsymbol{c}$ 必然在以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线方向.

解 设 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\dfrac{1}{6}(4,-2,4)+\dfrac{1}{3}(-1,2,-2)=\dfrac{1}{3}(1,1,0)$，

因为 $\boldsymbol{d}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{d}|}\boldsymbol{d}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$，

所以 $\boldsymbol{c}=\pm|\boldsymbol{c}|\boldsymbol{d}^0=\pm(1,1,0)$.

例 16.2 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，则以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的对角线的长度

为（　　）.（首届大学生数学竞赛试题）

(A) $\sqrt{3}$，$\sqrt{11}$；(B) 3，11；(C) $\sqrt{3}$，$\sqrt{10}$；(D) $\sqrt{2}$，$\sqrt{11}$.

分析　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$，故选 (A).

例 16.3　设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2,2)$，u 轴的正向与三个坐标轴正向交成相等的锐角，试求 (1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影；(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角 θ.

解　设 u 轴上的单位向量 $\boldsymbol{u}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由题意知 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$，又因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$(舍负值)，所以 $\boldsymbol{u}^0=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(1) $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+2+2)=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

(2) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}^0}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{u}^0|}=\dfrac{\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$，所以 $\theta=\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$.

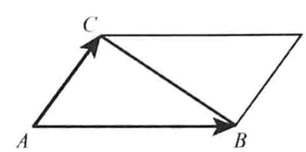
评注　例 16.1、例 16.2、例 16.3 属于用坐标表达式进行向量计算的问题. 要求考生理解单位向量、方向数与方向余弦、向量的坐标表达式等概念，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

题型二　向量的数量积与向量积.

例 16.4　$[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=$____________.

分析　因为 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，而 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$. 从而 $[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$.

评注　该题属于对向量的共线、垂直的考查. 主要考点：两向量垂直、共线(平行)的充要条件.



例 16.5　已知三角形的顶点为 $A(3,4,-2)$，$B(2,0,3)$，$C(-3,5,4)$，求三角形的面积.

解　$\overrightarrow{AB}=\{-1,-4,5\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-6,1,6\}$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 5\\ -6 & 1 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 1 & 6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 5\\ -6 & 6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -6 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-29\vec{i}-24\vec{j}-25\vec{k}=\{-29,-24,-25\},$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-29)^2+(-24)^2+(-25)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\,042}.$$

例 16.6　已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2}{3}\pi$，$\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{q}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$. 问系数 λ 取何值时 $\vec{p}$ 与 $\vec{q}$ 垂直?

解　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=2\times5\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-5$.

$\vec{p}\cdot\vec{q}=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\lambda\vec{a}+17\vec{b})=3\lambda|\vec{a}|^2+51\vec{a}\cdot\vec{b}-\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}-17|\vec{b}|^2=-680+17\lambda=0$,

$\therefore \lambda=40$.

例 16.7 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.（1995 年考研试题）

解 利用向量积的性质及两个向量平行的条件：

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$
$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}).$$

再利用数量积的性质及两个向量垂直的条件：

$$原式=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$$
$$=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}.$$

最后利用混合积的性质，原式$=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2\times2=4$.

评注 该题属于向量的数量积、向量积、混合积的计算. 主要考点：数量积、向量积、混合积的定义、性质以及两向量垂直、平行的条件.

例 16.8 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$是任意三矢量. 证明：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$必共面，并说明这一事实的几何意义.（西安交通大学 1989 年高等数学竞赛试题）

解 方法一：因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$，所以三向量$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$必共面.

方法二：欲证$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$共面，只需证其混合积等于零.

即：$[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$

$=[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=0$.

几何意义：将自由向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$平行移动到一个起点，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$分别是连接$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$三个向量的终点而得到的三个向量，它们首尾相接，构成一个封闭的三角形（如图 16—1 所示），从而必共面.

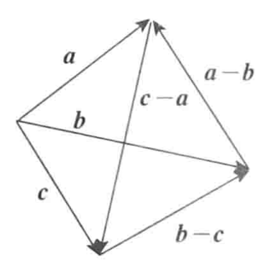


图 16—1

评注 该题属于利用向量运算证明（确定）向量关系. 主要考点：数量积、向量积、混合积的定义、性质以及两向量垂直、平行的条件.

例 16.9 设$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\{1,1,1\}$，试求$a$与$b$的夹角$\theta$.（陕西省 1990 年大学生高等数学竞赛试题）

解 因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

上式相除得$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

例 16.10 已知$\boldsymbol{a}$为单位向量，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________.

解 因为$\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0\\7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0\end{cases}\Rightarrow2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2$.

代入第一式，又已知$|\boldsymbol{a}|=1$得：$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$.

所以$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.

评注 上述题型均是利用向量的定义、性质计算两向量的夹角. 特别注意向量的夹角的范围，向量的夹角是指向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的正向夹角，记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$.

题型三 向量代数的综合问题.

例 16.11 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是三维空间 R^3 上的两个非零常向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

例 16.12 求函数 $z=\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}+\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}$ 的最小值.

分析 从题表面看，这是求二元函数 $z=f(x,y)$ 的最值问题，但若用多元函数微分学求极值的方法将会很烦琐；而将被开方式配方处理，会发现下面的简单方法.

解 因为 $\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+9}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+4}$ 是点 $P(x,y,0)$ 与点 $A(1,2,\pm 2)$ 的距离.

又因为 $\sqrt{x^2+y^2-6x+2y+11}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2+1}$ 是点 $P(x,y,0)$ 与点 $B(3,-1,\pm 1)$ 的距离，由于 $z=|PA|+|PB|\geqslant|AB|$，其中等号当且仅当点 P 落在 AB 边上时成立. 又因为点 P 在 xOy 平面上，A、B 两点不在 xOy 平面上，故 P 要落在 AB 边上，A、B 两点必须在 xOy 平面两侧.

所以 $\min z=|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(-1-2)^2+(\pm 1-(\mp 2))^2}=\sqrt{22}$.

评注 上述题型均属于向量代数的综合应用题.

16.4 学习效果测试题

一、填空题

(1) 设 $\boldsymbol{a}=(3,-2,5)$，$\boldsymbol{b}=(0,3,-4)$，$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$，$3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，则 $\lambda=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(2,1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，则 $\sin(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}})=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 为向量，k 为实数. 若 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$，$|\boldsymbol{\beta}|=1$，$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}=2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}\perp\boldsymbol{\delta}$，则 $k=$________.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，$A=(3,1,-2)$，$C=(3,-5,2)$，$\overrightarrow{AB}=(3,-2,5)$，$\triangle ABC$ 的面积为________.

(5) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{4}$，则以 $\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线的长度分别是________和________.

二、选择题

(6) 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2\sqrt{2},-5,4)$ 的单位向量是(   ).

(A) $\left(\frac{2\sqrt{2}}{7},-\frac{5}{7},\frac{4}{7}\right)$；　(B) $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{7},-\frac{5}{7},-\frac{4}{7}\right)$；

(C) $\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{7},\mp\frac{5}{7},\pm\frac{4}{7}\right)$；　(D) $\left(\mp\frac{2\sqrt{2}}{7},\mp\frac{5}{7},\pm\frac{4}{7}\right)$.

(7) 已知$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{3}$，且向量$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$垂直，则$\lambda$为(　　).

(A) $\frac{325}{14}$；　(B) $\frac{14}{25}$；　(C) $-\frac{325}{14}$；　(D) $-\frac{25}{26}$.

(8) 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$均为单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$的值为(　　).

(A) $-\frac{3}{2}$；　(B) 0；　(C) 3；　(D) $-\frac{2}{3}$.

(9) 已知$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sqrt{3}$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$的值为(　　).

(A) $\sqrt{6}$；　(B) 2；　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(D) $\sqrt{3}$.

(10) 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角$\varphi$等于(　　).

(A) $\frac{\pi}{4}$；　(B) $\frac{\pi}{2}$；　(C) $\frac{\pi}{3}$；　(D) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

三、解答题

(11) 已知$\boldsymbol{b}=(3,1,4)$，向量$\boldsymbol{a}$垂直于$\boldsymbol{b}$、垂直于Ox轴，且$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{17}$，求向量$\boldsymbol{a}$.

(12) 已知向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，向量$\boldsymbol{c}$的模$|\boldsymbol{c}|=r$，求当$\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$时$r$的最小值.

(13) 设$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$.

(14) 设$\boldsymbol{a}=\left(1,2,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\lambda(x,4,1)$且$\lambda\neq0$，求$\lambda$与$x$的值，使得

① $\boldsymbol{b}$为垂直于$\boldsymbol{a}$的单位向量；

② $\boldsymbol{b}$为平行于$\boldsymbol{a}$的单位向量.

16.5　学习效果测试题答案与提示

一、填空题

(1) 提示：$(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}\Rightarrow(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Rightarrow\lambda=18$.

(2) 提示：因为$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,-1,0)$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(0,5,-3)$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=(3,9,15)$.

所以$\sin(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}})=\frac{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}=\frac{3\sqrt{119}}{34}$.

(3) $-\frac{1}{2}$.

(4) 提示：由向量积模的几何意义知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

因为$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & 4 \end{vmatrix}=(22,-12,-18)$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{238}$.

(5) 提示：该平行四边形两条对角线的长分别是$|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|$与$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|$.

$|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|^2=(6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=36\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=260$.

$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|^2=(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})\cdot(4\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+40\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+25\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=584$.

所以$|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|=2\sqrt{65}$，$|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}|=2\sqrt{146}$.

二、选择题

(6) (C).

(7) (C). 提示：$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}\Rightarrow\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{325}{14}$.

(8) (A). 提示：
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=3+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{3}{2}$.

(9) (D). 提示：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-\sqrt{3}\Rightarrow\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{3\pi}{4}$.

所以$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\sqrt{3}$.

(10) (D). 提示：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=3-1=2$,

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=7$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$,

所以，夹角 $\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

三、解答题

(11) 设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由题意知，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y+4z=0\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-4z\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{a}=(0,-4z,z)$$，又因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{17}$,

得 $z=\pm1$，于是 $\boldsymbol{a}=\pm(0,-4,1)$.

(12) 设 $\boldsymbol{c}=(x,y,z)$，则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & 0 & -1\\x & y & z\end{vmatrix}=(y,-x-z,y)$，由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$ 得 $y=1$，$z=-1-x$，于是