工科研究生用书

罗家洪　编著

矩阵分析引论

（第三版）

华南理工大学出版社

·工科研究生用书·

矩阵分析引论

（第三版）

罗家洪　编著

华南理工大学出版社

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生教材，全书共分六章：线性空间与线性变换、内积空间、矩阵的标准形与若干分解形式、矩阵函数及其应用、特征值的估计与广义逆矩阵、非负矩阵。书中着重介绍工科专业应用较多的矩阵分析基本理论和方法，注重理论和应用的结合，具有工科教材的特点。

本书也可供工科学生、教师及工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析引论/罗家洪编著.—3版.—广州：华南理工大学出版社，2000.5

ISBN 7-5623-0345-2

Ⅰ.矩…　Ⅱ.罗…　Ⅲ.矩阵-理论　Ⅳ.O151.21

华南理工大学出版社出版发行

（广州五山　邮编 510640）

责任编辑　杨昭茂

名地新华书店经销

广州市新明光印刷有限公司印装

*

2000年5月第3版　2000年5月第6次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：8.625　字数：218千

印数：11501—14500册

定价：12.00元

出版说明

研究生教材建设是研究生教育的基础工程，是提高研究生教学质量的重要环节。自1978年恢复招收研究生以来，我校先后编写了多种供研究生使用的教材和教学参考书，有的已正式出版，但更多的是采用讲义形式逐年印发。为满足研究生教育事业发展的需要，我校决定出版“工科研究生用书”系列教材。

“工科研究生用书”以公共课和部分学术专著为主，专业学位课程将根据学科设置和国内相同学科的需求情况有计划地分批出版。我们希望，本系列教材能从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，既包含本门课程的基本内容，又反映我校工科研究生的特点，并在该学科领域内求新、求深、求精，使学生掌握必须的基础理论和专门知识。学位课教材还应包含学科前沿和交叉学科的丰富内容，反映国内外最新研究成果，学术思想活跃，适应目前科学技术发展的形势。学术专著要充分反映作者的研究成果和学术水平，阐述自己的学术见解，对实现研究生的培养目标，提高教育质量起重大作用。

“工科研究生用书”的内容结构和阐述方法，力求条理清楚，论证严谨，具有科学性、系统性和先进性。

由于我校研究生教材建设起步较晚，限于我们的水平和经验，本系列教材难免有错误和不足之处，恳请读者指正，我们将非常感谢。

华南理工大学研究生处

第三版前言

本书是编著者根据工科研究生的教学要求编写的教材。多年来，我国许多院校开设了“矩阵分析”或“矩阵论”这门研究生公共基础课，而且大多是安排在50～60学时之内，讲授的基本内容大体上就是本书前五章的内容(带*号者除外)，其余少量题材各校选择不一，本书选择了有重要应用的非负矩阵(第六章)来作扼要介绍。

本课程是被认为比较抽象难学的。为了收到较好的教学效果，本书多花了一点篇幅来介绍矩阵论在线性系统等方面的应用，学起来就不会感到那么枯燥了。学习抽象数学，如果知道定义、定理的来龙去脉，可能效果会好一些。这些应用性质的材料，并不是一定要讲的，或简单介绍一下亦可以了。

本书以简短的篇幅扼要地阐述了近代矩阵理论相当广泛而又很基本的内容，掌握了这些知识，学习后继专业课程，或进一步提高矩阵论的知识水平，就比较容易了。

本书于1993年6月曾获得中国大学出版社协会颁发的“中南地区大学出版社优秀教材二等奖”，自1992年初版以来，被国内许多院校采用，已先后出版了一、二版，印发了五次，发行于国内外，从第二版起增加了一个习题答案。本次第三版除个别地方作了订正外，基本内容与第二版相同(少量章节打上*号)。

作者感谢王进儒教授在审校本书第一版时的热情指导，感谢使用本教材的老师们的批评和鼓励，感谢本书的责任编辑在编印本书时的出色工作。

作者

2000年5月30日于华工

目　　录

第一章 线性空间与线性变换

本章扼要概述线性空间与线性变换的基本概念和基本理论。这些材料是学习矩阵分析及其应用的入门知识。对于线性代数基础较好的读者，有些部分粗看一下就可以了。

§1 线性空间的概念

人们谈论问题，往往都是就一定"范围"来说的，脱离了这个"范围"，就难以讲得清了，甚至只能在某个"范围"内才能提出或研究某种问题。明白了这一点，就较易理解我们引入数域及线性空间的目的了。

我们知道，由所有有理数组成的集合具有这样的性质：这集合中任意两数的和、差、积、商(除数不为零)仍是这集合中的数。这个集合我们用 Q 来表示。类似地，由所有实数构成的集合 R，以及由所有复数构成的集合 C 也都具有这一性质。这三个集合的包含关系为：

$$Q \subset R \subset C .$$

因此，我们说"一个复数"时，自然包括这个数可能是有理数或实数这两个特殊情况在内。

在引入线性空间这一重要概念之前，我们首先要给出数域的概念。

如果复数的一个非空集合 P 含有非零的数，且其中任意两数的和、差、积、商(除数不为零)仍属于该集合，则称数集 P 为一个

数域。于是上述的集合 Q, R, C 都是数域,分别称为有理数域、实数域及复数域。又如集合

$$Q(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in Q\}$$

也构成一数域,请读者加以验证。但是由所有整数组成的集合 Z 是不构成数域的。∵商运算的结果出界

数域有一个简单性质,即所有的数域都包含有理数域作为它的一部分。特别,每个数域都包含整数 0 和 1。现在我们可以给出线性空间的定义了。

定义 1 设 V 是一非空集合,P 是一数域。如果:

1) 在集合 V 上定义了一个二元运算(通常称为加法),即是说,V 中任意两个元素 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ 经过这个运算后所得到的结果,仍是集合 V 中一个唯一确定的元素,这元素称为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的和,并记作 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$;

2) 在数域 P 与集合 V 的元素之间还定义了一种运算,叫做数量乘法,即是说,对于 P 中任一数 λ 与 V 中任一元素 $\boldsymbol{x}$,经这一运算后所得结果仍为 V 中一个唯一确定的元素,称为 λ 与 $\boldsymbol{x}$ 的数量乘积,记作 $\lambda\boldsymbol{x}$;

3) 上述两个运算满足下列八条规则:

(1) 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$,$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$,$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

(3) V 中存在一个零元素,记作 $\boldsymbol{\theta}$,对任一 $\boldsymbol{x}\in V$,都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$;

(4) 任一 $\boldsymbol{x}\in V$,都有 $\boldsymbol{y}\in V$,使得 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\theta}$,元素 $\boldsymbol{y}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素,记作 $-\boldsymbol{x}$;

(5) 对任一 $\boldsymbol{x}\in V$,都有 $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

$$\left.\begin{aligned}&(6)\ \lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}\\&(7)\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}\\&(8)\ \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}\end{aligned}\right\}\text{对任何 }\lambda,\mu\in P,\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$$

则集合 V 称为数域 P 上的线性空间或向量空间．V 中的元素常称为向量．V 中的零元素称为零向量．当 P 是实数域时，V 叫实线性空间；当 P 是复数域时，V 叫复线性空间．数域 P 上的线性空间有时简称为线性空间．

由定义可以证明：

线性空间 V 中的零向量是唯一的；V 中每个元素 $\boldsymbol{x}$ 的负元素也是唯一的；并且有

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}, \quad \lambda\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}, \quad (-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x},$$

这里 $\lambda\in P$，$\boldsymbol{x}\in V$，又 V 中元素的减法可以定义为（对任何 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$）：

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y}).$$

线性空间的例子：

记 P^n

例 1 若 P 是数域，V 是分量属于 P 的 n 元有序数组的集合

$$V=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\mid\forall\ \xi_i\in P\},$$

若对 V 中任二元素

$$\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), \quad \boldsymbol{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

及每个 $\lambda\in P$（记作 $\forall\ \lambda\in P$），定义加法及数量乘法为：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$
$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\cdots,\lambda\xi_n),$$

则容易验证集合 V 构成数域 P 上的线性空间，这个线性空间记为 P^n．

记 $P^{m\times n}$

例 2 所有元素属于数域 P 的 $m\times n$ 矩阵组成的集合，按通常定义的矩阵加法及数与矩阵的数量乘法，也构成数域 P 上的一个线性空间，并把它记为 $P^{m\times n}$。

例 3 若 n 为正整数，P 是数域，则系数属于 P 而未定元为 t 的所有次数小于 n 的多项式的集合，按通常多项式的加法及数与多项式的乘法，这个集合连同零多项式在内亦构成数域 P 上的线性空间．我们用 $P[t]_n$ 代表这个空间．若把"次数小于 n 的"这一限

制取消，则也得到一个线性空间，并记为 $P[t]$。

例 4 所有定义在区间 $[a,b](a \leqslant t \leqslant b)$ 上的实值连续函数构成的集合，按照函数的加法及数与函数的乘法，显然构成实数域上一个线性空间。

在讨论线性空间的问题中，下面几个基本概念是必须熟知的。

定义 2 设 V 是数域 P 上的线性空间，$x,y,\cdots,v$ 是 V 的一组向量，如果 P 中有一组不全为零的数，$\alpha,\beta,\cdots,\delta$，使得

即除零

$$\alpha x + \beta y + \cdots + \delta v = \theta, \tag{1}$$

则称向量 $x,y,\cdots,v$ 线性相关；若等式(1) 仅当 $\alpha = \beta = \cdots = \delta = 0$ 时才能成立，则称这组向量是线性无关的。

由这定义得知，如果向量 $x,y,\cdots,v$ 线性相关，则使得(1) 式成立的数 $\alpha,\beta,\cdots,\delta$ 中至少有一个不等于零，比如 $\alpha \neq 0$，则有

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{y} - \cdots - \frac{\delta}{\alpha}\boldsymbol{v} \quad ,$$

这时我们说向量 x 是向量 $y,\cdots,v$ 的线性组合，或者说，向量 x 可由向量 $y,\cdots,v$ 线性表出(示)。

一般地说，一组向量(含有限个向量)线性相关时，则其中至少有一个向量可由组中其他向量线性表出；反过来，如果这组向量具有这一性质，则这组向量必定线性相关。但不难推知，线性无关的一组向量，其任一向量都不可能由组中其余向量线性表出。

定义 3 设 V 是数域 P 上的线性空间。如果 V 中有 n 个线性无关的向量，而无更多个数的线性无关向量，则称 V 是数域 P 上的 n 维线性空间。

若线性空间 V 内能求得任意个数的线性无关向量，则 V 便称为无限维线性空间。本书主要讲座有限维线性空间。

在 n 维线性空间中，其任意的 n 个线性无关向量都称为它的一组基。由线性空间维数定义可知，在有限维线性空间中，基是存在的，但不唯一的，因为当维数是 n 时，空间里的任何 n 个线性无关

向量都可以作为它的一组基。然而，我们却有下述定理。

定理 1 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基。则 V 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以表示为这组基的线性组合，且表示式是唯一的。

证明 因 V 中 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性相关，故 P 中存在 $n+1$ 个不全为零的数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$，使得

$$a_0\boldsymbol{x} + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\theta}. \qquad (1)$$

在这里，数 a_0 是不可能等于零的，否则，由(1)式便推出 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性相关，这是不可能的。因此，我们有

$$\boldsymbol{x} = -\frac{a_1}{a_0}\boldsymbol{e}_1 - \frac{a_2}{a_0}\boldsymbol{e}_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_0}\boldsymbol{e}_n,$$

不妨将其写为

$$\boldsymbol{x} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \xi_n\boldsymbol{e}_n. \qquad (2)$$

即 $\boldsymbol{x}$ 可以表示成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合。如果 $\boldsymbol{x}$ 还有另一表示：

$$\boldsymbol{x} = \eta_1\boldsymbol{e}_1 + \eta_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + \eta_n\boldsymbol{e}_n, \qquad (3)$$

则由(2)式减(3)式即得

$$(\xi_1 - \eta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{\theta},$$

因基向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关，所以

$$\xi_1 - \eta_1 = 0, \quad \xi_2 - \eta_2 = 0, \cdots, \xi_n - \eta_n = 0,$$

从而有 $\xi_i = \eta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，这证明了表示式的唯一性，定理证毕。

表示式(2)中的数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标。这定理说明，取定一组基后，每个向量 $\boldsymbol{x}$ 在这组基下的坐标是唯一确定的。$\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标 $\xi_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 也称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量。

我们再来看看前述几个例子中线性空间 P^n，$P^{m\times n}$ 及 $P[t]_n$ 的维数。

首先，容易证明

$$e_1 = (1,0,\cdots,0),\ e_2 = (0,1,0,\cdots,0),\cdots,$$
$$e_n = (0,0,\cdots,0,1)$$

是线性空间 P^n 的 n 个线性无关向量,又显然 P^n 中任一向量

$$x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$$

都可由这 n 个线性无关向量线性表出:

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n,$$

因此,$x,e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性相关。从而得知 P^n 是 n 维线性空间。今后用得较多的是 R^n 及 C^n。

再考察线性空间 $P^{m\times n}$,若用 E_{ij}表示第 i 行、第 j 列上的元素等于 1 而其他元素均等于零的 $m\times n$ 矩阵,则下列的 mn 个矩阵

$$E_{11},E_{12},\cdots,E_{ij},\cdots,E_{mn}$$

$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$构成 $P^{m\times n}$的一组基,故 $P^{m\times n}$是 mn 维线性空间。今后用得较多的是 $R^{m\times n}$及 $C^{m\times n}$,包括它们当 $m=n$ 时的特殊情况。

最后,由于 $1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$是 $P[t]_n$ 的一组基,故 $P[t]_n$ 是 n 维线性空间。

§2 基变换与坐标变换

设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间,又 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 及 $e_1',e_2',\cdots,e_n'$ 是 V 的两组基。假设这两组基的关系为

$$\begin{cases} e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{cases} \tag{1}$$

这组关系式可缩写为

基的关系 $(e_1', \cdots e_n') = (e_1, \cdots e_n) A$

⇓

坐标关系 $\cancel{(\xi_1', \cdots \xi_n') = (\xi_1, \cdots \xi_n)(A^{-1})^T}$

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix} \qquad \left. \begin{aligned} e_i' &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \\ i &= 1,2,\cdots,n \end{aligned} \right\} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{1'}$$

现设 x 为 V 中任一向量，且在此二组基下其表示式为：

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \tag{2}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i'. \tag{3}$$

下面我们要研究向量 x 在基变换下，其坐标的变化规律．与变换(1)相对应，我们把矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为从基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 到基 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 的过渡矩阵。由于基向量线性无关，并利用齐次线性方程组只有零解的条件，便可证明矩阵 A 是可逆的．由(3)式及(1′)式可得

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i' \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} \xi_i' \right) e_k, \end{aligned} \tag{4}$$

由(2)式又有

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k. \tag{5}$$

由于 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性无关，所以(4)、(5)两式右边 e_k 的系数

应相等：

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\xi'_i, \qquad k = 1,2,\cdots,n .$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

从而又有

$$\begin{bmatrix} \xi'_{10}, \xi'_{12} & \cdots & \xi'_{1n} \\ \xi'_{21} \cdot \xi'_{22} & \cdots & \xi'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi'_{n0}, \xi'_{n1} & \cdots & \xi'_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ - & - & - \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{11}, \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \cdots & \xi_{2n} \\ \xi_{n1}, \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

(6)、(7)两式给出了在基变换(1)下，向量 x 的坐标变换公式。

§3 子空间与维数定理

线性空间有些性质需用子空间的性质来表达，所以研究线性空间的子空间是必要的。

定义 1 设 V 是数域 P 上的线性空间，W 是 V 的一个非空子集。如果 W 对于线性空间 V 所定义的加法运算及数量乘法运算，也构成数域 P 上的线性空间，则称 W 为 V 的线性子空间，简称子

空间.

从线性空间的定义很容易找到上述非空子集为 V 的子空间的充要条件. 这就是下述定理.

定理 1 设 W 是数域 P 上线性空间 V 的非空子集,则 W 是 V 的线性子空间的充要条件是:

(1) 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$,则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$;

(2) 若 $\boldsymbol{x}\in W,\lambda\in P$,则 $\lambda\boldsymbol{x}\in W$

换言之,线性空间 V 的非空子集 W 是子空间的充要条件,是 W 关于 V 中定义的两个运算是"封闭"的.

证明 条件的必要性是显然的,因为当 W 为 V 的子空间时,由定义 1 即知条件(1)与(2)自然是满足的. 充分性 ① 零元 ② 负元 反过来,若定理 1 的两个条件已满足,则可推出零向量 $\theta\in W$(取 $\lambda=0$ 并利用条件(2));又当 $\boldsymbol{x}\in W$ 时,取 $\lambda=-1$ 便可从条件(2)推出 $-\boldsymbol{x}\in W$. $x+(-x)=0$ ∴ 至于线性空间定义中的其他运算"规则",由于对 V 中所有元素都成立,当然对子集 W 的元素也能成立. 所以,定理中的条件也是充分的. 证毕.

在线性空间 V 中,由单个的零向量组成的子集$\{\theta\}$是 V 的一个子空间,称为**零子空间**,而线性空间 V 本身也是 V 的一个子空间. 这两个子空间称为**平凡子空间**. 零空间的维数定义为零.

例 1 在 n 维线性空间 P^n 中,子集

$$W=\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\theta,\boldsymbol{x}\in P^n\}$$

构成 P^n 的一个 $n-r$ 维子空间,r 是 $A\in P^{m\times n}$的秩.

例 2 设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 是数域 P 上线性空间 V 的 m 个向量. 则这组向量的所有形如

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{x}_m\quad(\lambda_i\in P)$$

的线性组合构成的集合非空,且对 V 中的加法及数量乘法皆封闭,故形成 V 的一个子空间,称为由**这组向量生成的子空间**,并记为 $L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m)$. span$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$

例 2 提供了构作已知线性空间的子空间的方法．下面两个定理其实也给出了获得新的子空间的方法．

定理 2 设 V_1,V_2 是数域 P 上线性空间 V 的两个子空间，则它们的交 $W=V_1\cap V_2$ 也是 V 的子空间．

证明 由于每个子空间都包含零向量，所以零向量必定属于这两个子空间的交，即 W 不会是空集．W非空

现任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W$，则 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V_i$，而 V_i 是子空间，所以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V_i(i=1,2)$，从而 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$．

又对任一 $\lambda\in P$ 及任一 $\boldsymbol{x}\in W$，则又有

$$\lambda\boldsymbol{x}\in V_i\quad(i=1,2),$$

从而 $\lambda\boldsymbol{x}\in W$．定理证毕．

定理 3 设 V_1,V_2 是数域 P 上线性空间 V 的两个子空间，则它们的和

$$V_1+V_2=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}\in V_1,\boldsymbol{y}\in V_2\}$$

也是 V 的子空间．

证明 首先 V_1+V_2 不是空集，因为零向量属于 V_1 及 V_2，且 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\theta}\in V_1+V_2$．其次，如果 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 是 V_1+V_2 中任二向量，且设

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1,\quad\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2,$$

这里 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V_1$，　$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in V_2$。由于 V_1,V_2 是子空间，故

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in V_1,\quad\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2\in V_2.$$

从而

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)\in V_1+V_2.$$

同样地，对任一 $\lambda\in P$，则有

$$\lambda\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{y}_1\in V_1+V_2,$$

即 V_1+V_2 是 V 的子空间．证毕．

由于子空间的交与和都满足交换律及结合律，所以还可定义有限个子空间的交与和，并把上述两个定理推广到有限多个子空间的情形，兹不赘述．