

## 翻 印 说 明

由东北电力学院丘昌涛教授编著的这本“电力系统可靠性”，内容丰富深入浅出，简洁明了，用具体数例，把抽象而复杂的可靠性计算通俗化，从而易为广大工程技术人员所接受。

自一九八一年以来，经过电力部电力系统规化研究班等处的试用，深为国内同行欢迎，在电力系统中影响较大，普遍认为是一本好教材。现在翻印出版，供大家学习，以促进电力系统可靠性技术的发展与应用。丘昌涛教授又付出了辛勤的劳动，在此表示感谢。

东北电业管理局

1986年2月

## 编 者 说 明

这本“电力系统可靠性”，是为电力工业部1981年9月在北京举办的“电力系统规化研究班”的学员而编写的。编写时主要参考了美国通用电气公司(G.E.)的P.F.阿伯勒赫特(P.F.Albrecht)在该公司电业系统工程部(EUSED)的电力系统工程研究班(PSEC)1980年所讲授的“电力系统可靠性”这课程的讲稿和习题。经过试用，参考文献[2][3]等，又作了一些必要的修改和补充。

由于编者水平所限且时间匆促，不免有错误之处，请读者批评指正。

编 者 1981年12月

于东北电力学院

# 目 录

## 前言

<b>第一章 概述</b> .....	( 1 )
§ 1—1 基本定义.....	( 1 )
§ 1—2 电力系统可靠性指标.....	( 2 )
§ 1—3 可靠性理论及应用的发展概况.....	( 3 )
习题.....	( 3 )
<b>第二章 概率的基本概念</b> .....	( 4 )
§ 2—1 概率的意义.....	( 4 )
§ 2—2 样本空间.....	( 5 )
§ 2—3 事件与集合.....	( 6 )
§ 2—4 概率的数学定义及有关的几个定理.....	( 9 )
§ 2—5 条件概率.....	( 12 )
习题.....	( 15 )
<b>第三章 系统及元件的可靠性模型</b> .....	( 17 )
§ 3—1 基本物理假定.....	( 17 )
§ 3—2 二状态元件及系统的模型.....	( 17 )
习题.....	( 21 )
<b>第四章 串联系统及并联系统的可靠性模型</b> .....	( 22 )
§ 4—1 剖分法.....	( 22 )
§ 4—2 串联系统.....	( 22 )
§ 4—3 并联系统.....	( 24 )
§ 4—4 逻辑图.....	( 25 )
习题.....	( 28 )
<b>第五章 非串——并联系统的可靠性模型</b> .....	( 30 )
§ 5—1 列举状态法.....	( 30 )
§ 5—2 二项式系统.....	( 31 )
§ 5—3 列举状态法在复杂系统中的应用实例.....	( 34 )
§ 5—4 Venn图在系统可靠性计算中的应用.....	( 37 )
§ 5—5 最小割集法.....	( 40 )
§ 5—6 总结.....	( 47 )
习题.....	( 47 )
<b>第六章 发电系统可靠性模型与计算(一)</b> .....	( 50 )
§ 6—1 发电系统的模型.....	( 50 )

§6—2	系统的概率函数	(51)
§6—3	增加机组时的递推公式	(54)
§6—4	减少机组时的递推公式	(55)
§6—5	发电系统的可靠性指标及计算	(56)
§6—6	发电系统可靠性计算实例	(60)
	习题	(64)
<b>第七章</b>	<b>随机变量</b>	(66)
§7—1	随机变量	(66)
§7—2	随机变量的概率分布函数	(67)
§7—3	随机变量的概率质量函数	(69)
§7—4	随机变量的概率密度函数	(70)
§7—5	事件概率的计算	(70)
§7—6	平均值	(71)
§7—7	随机变量的期望	(73)
	习题	(76)
<b>第八章</b>	<b>系统元件的状态转移过程</b>	(77)
§8—1	系统元件的状态	(77)
§8—2	元件的损坏度特性	(78)
§8—3	元件的修复过程	(80)
§8—4	元件的损坏和修复的联合过程	(81)
	习题	(85)
<b>第九章</b>	<b>发电系统可靠性模型与计算(二)</b>	(85)
§9—1	状态频率和持续时间	(85)
§9—2	累计频率	(89)
§9—3	发电系统增加机组时累计频率的递推公式	(90)
§9—4	累计频率表构造实例	(90)
§9—5	累计周期	(91)
§9—6	电力不足频率	(91)
§9—7	期望的停运持续时间	(93)
	习题	(93)
<b>第十章</b>	<b>互联系统可靠性的计算</b>	(94)
§10—1	基本假定	(94)
§10—2	两个区域系统的互联	(94)
§10—3	多区域互联系统	(100)
	习题	(103)
<b>第十一章</b>	<b>大电力系统可靠性计算</b>	(103)
§11—1	概述	(103)
§11—2	事故影响分析	(103)
§11—3	输电系统可靠性计算实例	(104)

§ 11—4 发电——输电系统LOLP的计算.....	( 110 )
习题.....	( 112 )
<b>第十二章 数据的收集和参数估计</b> .....	( 112 )
§ 12—1 数据的收集和参数估计.....	( 112 )
§ 12—2 发电机组停运的基本定义和分类.....	( 114 )
§ 12—3 强迫停运率.....	( 115 )
§ 12—4 发电机组的其他性能尺度.....	( 116 )
习题.....	( 117 )
主要参考文献.....	( 118 )

# 第一章 概 述

## § 1—1 基本定义

### · 什么是可靠性 (Reliability) ?

比较能为大家接受的定义是, 元件、设备、系统等在规定的条件下和预定的时间内, 完成其规定功能的概率。可靠性被定义为一个概率, 使得通常使用的模糊不清的可靠性的概念有了一个可以量度及计算的定量的尺度。

### · 电力系统的可靠性

电力系统是由发电机、变压器、输电线、开关等元件组成的大系统, 它可分为发电系统、输电系统、配电系统三大部分。电力系统的任务是向用户提供连续不断的合乎质量的电能, 人们要求它应有很高的可靠程度。对于大电力系统而言, 其可靠性被定义为: 大电力系统供电给主要配电点的保证程度。

### · 可靠性和安全性

上述的“保证程度”, 就是可靠性 (Reliability), 是指系统连续不断地供电给用户的一个概率, 有它的定量指标。至于系统的安全性 (Security), 它是系统的一种情况 (状态), 例如承受输电线事故状态下的潮流, 这是一个确定性问题, 与可靠性是有区别的。

### · 充裕度与可靠性

大电力系统的充裕度 (Adequacy) 是指系统有足够的发电容量, 在任何时候都能满足所有用户的峰荷并提供他们所需的电力, 但大电力系统的可靠性, 除了充裕度以外, 还应包括互联输电网络的安全性以及可能引起大面积停运的级联 (Cascading) 失控 (Uncontrolled) 操作的躲开程度 (Avoidance)。

### · 停运与停电

电力系统的元件不能完成其规定功能的状况, 称为停运 (Outage), 它和用户感到的停电 (Interruption) 不同。停运是元件的一种状态, 而停电是由于一个或几个元件的停运而引起的对一个或若干个用户供电的中断。在一定时间内, 可以由开关操作而恢复供电的叫临时性停电, 否则为持续性停电。

### · 可靠性计算的步骤

电力系统可靠性的计算可以分为五个步骤:

- (1) 定义停运;
- (2) 定义停运事件;
- (3) 建立电力系统停运模型;
- (4) 决定模型参数;
- (5) 进行应用及计算。

## §—1 2 电力系统可靠性指标

### • 电力系统可靠性指标

已经提出许多有关系统可靠性指标，这里只列举几种。

1. LOLP, 电力不足概率; 或 LOLE, 期望的电力不足天数;
2. HLOLE, 期望的电力不足小时数;
3. EENS, 期望的电量不足;
4. FLOL, 电力不足频率;
5. DLOL, 电力不足持续时间。

### • 用户可靠性指标的计算

用户的停电指持续性停电。

设  $N$  为用户总数;  $P$  为观察周期 (年);

$N_1$  为停电用户数;  $D_1$  为停电时间 (小时); 则用户停电频率指标

$$F = \frac{\text{总的停电用户数}}{\text{总用户数} \times \text{观察周期}} = \frac{\sum N_1}{N \times P} \text{停电次数/户/年}; \quad (1-1)$$

用户停电时间指标

$$D = \frac{\text{总停电时间}}{\text{总的停电用户数}} = \frac{\sum N_1 D_1}{\sum N_1} \text{小时/每次停电}; \quad (1-2)$$

供电无用处指标

$$U = \frac{\text{总停电时间}}{\text{总用户数} \times \text{观察周数}} = \frac{\sum N_1 D_1}{N \times P} \text{停电小时/户/年}; \quad (1-3)$$

由 (1-1) - (1-3) 得:

$$U = F \times D$$

供电有用度指标 (可靠性)

$$A = \left[ 1 - \frac{U}{8760} \right] \times 100\% \text{供电小时/用户/小时}. \quad (1-4)$$

• 例: 设对某配电系统观察周期为 1 年, 总用户数为 10000 户。

停电事件 I	停电用户数 $N_1$	停电时间 $D_1$ (小时)	$N_1 D_1$
1	1000	1.5	1500
2	500	6.0	3000
3	800	1.0	800
总计	2300		5300

则用户停电频率

$$F = \frac{2300}{10000 \times 1} = 0.23 \text{次/户/年};$$

用户停电时间

$$D = \frac{5300}{2300} = 2.3 \text{ 小时/每次停电};$$

供电无用度

$$U = \frac{5300}{10000 \times 1} = 0.53 \text{ 小时/户/年};$$

供电有用度

$$A = \left( 1 - \frac{0.53}{8760} \right) \times 100\% = 0.999939 = 99.999939\%$$

### § 1—3 可靠性理论及应用的发展概况

可靠性理论的发展和应用首先在军事工程和空间系统，当时由于电子工业，原子能工业及空间技术的复杂系统要求很高的可靠性，但多着眼于元件的可靠性。

电力系统可靠性的研究大约始于三十年代。在一九四〇——一九六五年间已将概率论数学方法应用于发电备用容量的计算。1695年美国东北部的大停电，对电力系统可靠性的研究是一个很大的推动力量，觉得有必要改进大电力系统的可靠性准则和方法，成立了美国全国电气可靠性委员会(NERC)，包括了美国和加拿大大部分的电业单位。最近十年来，可靠性的研究深入到电力系统各个方面，其趋向是定量的计算，目的想获得在电力系统规划中费用和可靠性之间更协调的平衡。

表1—1列出了一九六三——一九七七年发表的电力系统可靠性论文的统计，可见其发展的一般情况，此表是根据R. Billinton及IEEE分委员会所写的二篇文章中列出的参考文献而统计的。

表1—1 电力系统可靠性文献统计表

年	论文数	年	论文数	年	论文数
1977	41	1972	30	1967	12
1976	19	1971	25	1966	6
1975	21	1970	15	1965	4
1974	16	1969	19	1964	8
1973	12	1968	18	1963	5
总计	109		107		35

### 习 题

1. 下表是某电业部门一年内停电用户数及停电时间。系统总用户数为55000户。试计算用户可靠性的四个指标F、D、U和A。



## 停电数据

停电号 I	停电用户数 $N_i$	停电时间(小时) $D_i$
1	5000	1.0
2	1000	0.2
3	5000	2.0
4	4000	0.5
5	2000	1.75

2. 下面是某系统的用户可靠性指标

$$F = 1.0 \text{ 停电次数/用户——年;}$$

$$D = 2.0 \text{ 小时}$$

$$U = 2.0 \text{ 小时/用户——年。}$$

系统用户总数 = 1,000,000 户

问：什么是任意时刻停电用户的平均数？

〔提示〕：计算一年内所有用户停电的总用户小时，这是一年8760小时内累加的小时数。

## 第二章 概率的基本概念

### § 2—1 概率的意义

· 在客观世界中，有些事物，在同一条件的实现之下，必须得到同一种试验结果，例如  $0^\circ\text{C}$  时水就变为冰。这属于确定性因素。另外一种事物则相反，例如投掷一枚钱币出现正面或反面，我们不能预先肯定，这种事物，属于不确定性因素。在电力系统的规划、运行、设计中考虑可靠性的时候，有许多不确定性因素，例如设备故障或停运发生的时刻，设备修理的时间，峰荷的大小，负荷的增长率，新设备安装的日期，特殊天候出现的频率和时间等等。概率论就是关于不确定性的数学，本章将介绍一些概率的基本概念，着重于它的应用，而不准备作严密的证明，

什么是概率？

#### · 逻辑概率

传统的初等的定义，把概率定义为某一特定事件发生的可能性的数值尺度，它等于这一特定事件发生的有利情形数与可能情形总数的比值。例如投掷一颗骰子，出现6点的可能性。因为骰子是一个六面体，假定出现每一面的可能性都是相同的，则出现6点的有利情形数为1，而可能情形数为6，故出现6的概率为  $P = 1/6$ 。这种定义下的概率叫逻辑概率。

#### · 客观概率

如果我们掷一个骰子10次，有可能得到出现6点的次数为2；若掷600次，出现6点的次数为99次。

掷6000次，出现6点999次。可以看到，投掷的次数越多，则出现6点的次数与投掷次数的比愈接近 $\frac{1}{6}$ 。我们把事件的发生看作某种实验中的一次试验结果；N次试验中事件E发生的次数 $N_E$ 称为E的频率数，而 $\frac{N_E}{N}$ 称为E的相对频率，假定N趋于无穷时， $\frac{N_E}{N}$ 的极限，定义为这事件发生的概率，即：

$$p(6) = \lim_{N \uparrow \infty} \frac{N_E}{N} = \frac{999}{6000} = \frac{1}{6} \quad (2-1)$$

象这样根据经验数据得出的概率称为客观概率。

### • 主观概率

有一类问题如：“明天要进行一场篮球赛，甲队九成要胜”或者“美国下届总统大选时，里根当选的可能性大概为45%”等，叫做主观概率。这种概率既不是根据以往的经验，也没有逻辑根据来推断，只是根据自己的经验和分析水平这样想。

### • 数学上的概率定义

概率 $P(A)$ 是确定在样本空间子集A上的数。

上面我们未加解释就引用了试验、试验结果、事件、样本空间等概念，下一节我们来一一定义它们。

## § 2-2 样本空间 (SampleSpace)

### • 试验 (Experiment或 Trial)

掷一枚钱币、本班学生的出席人数、一年内用户的停电次数、一定时间内停运的发电机组数等等都是物理情况，是可以观察的现象。对于这些物理情况的观察，叫做试验。

### • 试验结果 (Outcome)

对于不确定性物理现象的观察结果，就就试验的结果。例如掷一枚钱币的结果可以是正面，也可以是反面；本班出席的人数 $x$ ；去年用户的停电次数等都是试验的结果。

### • 事件 (Events)

事件是一个试验的某些可能结果的集合 (set)。例如掷一枚钱币出现正面是一个事件，

事件 = { 正面 }。

本班出席学生人数 $x$ ， $20 \leq x \leq 30$ 是事件，记作

事件 = {  $x : 20 \leq x \leq 30$  }。

去年用户停电的次数有0次的，有1次的，有2次的，记作：

事件 = { 0, 1, 2 }。

### • 样本空间

一个试验所有可能结果的集合构成一个样本空间。

每一种结果可以想象为样本空间的一个元素 (Element)，或把它设想为一维或多维空间的一个点。例如掷一枚钱币，则样本空间 $S = \{ \text{正面, 反面} \}$ 。

又如：本班人数为 $N$ ，则学生出席人数的样本空间为

$$S = \{ 0, 1, 2, \dots, N \};$$

又如：用户停电次数的样本空间为

$$S = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

又如：在甲乙二地要建立变电站，设变电站总数不超过二个，则可以选择的方案共明6个，其样本空间为二维的，每一个方案为空间的一个元素，表之为：

$$S = \{ (0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 0); (1, 1); (2, 0) \}$$

若样本空间的元素为有限个，称为有限元样本空间；若样本空间有无限个元素，则称无限元样本空间；一个开关厂产品质量检查可以检查一台，二台，三台，……时发现不合格品，也可能检查了一万台还未发现不合格品，我们可以想象，其试验结果的数目是无限而可数的，这叫做无限可数样本空间。包含有限个或无限可数个元素的样本空间称为离散型(Discrète)样本空间。有时样本空间的元素是充满某一区间 $(a, b)$ 的一些连续的点，则是无限元连续型(Continuous)样本空间。

#### • 总结和例子

样本空间 $S = \{ \text{所有试验结果} \}$ ;

事件 $E = \{ \text{某些试验结果的集合} \}$ ;

事件 $E$ 是 $S$ 的一个子集

$$E \subset S;$$

样本空间本身也是一个事件

$$S \subset S;$$

没有结果的集合叫空集，

$$\phi = \{ \text{无试验结果} \};$$

习惯上空集也是 $S$ 的子集，所以

$$\phi = \text{事件}$$

例：若 $a, b, c$ ，为有限元样本空间 $S$ 的元素，则

$$S = \{ a, b, c \};$$

试验结果数  $n = 3$ ;

事件数  $= (2)^n = (2)^3 = 8$ ;

事件 $E_1 = \{ a \}$ ;  $E_2 = \{ b \}$ ;  $E_3 = \{ c \}$ ;

$$E_4 = \{ a, b \}; E_5 = \{ b, c \}; E_6 = \{ c, a \};$$

$$E_7 = \{ a, b, c \}; E_8 = \phi.$$

## § 2—3 事件与集合

#### • 事件的并 (Union)

上面已经说过，“事件是一种试验的一个样本空间的一个子集”，若已知样本空间的事件 $A_1$ 及 $A_2$ ，则 $A_1$ 及 $A_2$ 的“或”(or)构成事件 $A_3$ ，即 $A_3$ 发生代表事件 $A_1$ 发生或事件 $A_2$ 发生，或 $A_1$ 及 $A_2$ 同时发生。 $A_3$ 称为 $A_1$ 及 $A_2$ 的并，或者说 $A_1$ 及 $A_2$ 经事件的并操作而成 $A_3$ 。

记作

$$A_3 = A_1 + A_2, \quad (2-2)$$

$$A_3 = A_1 \cup A_2, \quad (2-3)$$

$$A_3 = A_1 \text{ or } A_2. \quad (2-4)$$

例如:  $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$A_2 = \{3, 4, 5, 6\},$$

$$A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

• 事件的交 (Intersection)

若已知样本空间的事件  $A_1$  及  $A_2$ , 则  $A_1$  及  $A_2$  的“与” ( $A \text{ and } B$ ) 构成事件  $A_4$ , 即事件  $A_4$  发生代表事件  $A_1$  及  $A_2$  同时发生。  $A_4$  称为  $A_1$  及  $A_2$  的交, 或者说  $A_1$  及  $A_2$  经事件的交操作而成  $A_4$ , 记作

$$A_4 = A_1 A_2, \quad (2-5)$$

$$A_4 = A_1 \cap A_2, \quad (2-6)$$

$$A_4 = A_1 \text{ and } A_2. \quad (2-7)$$

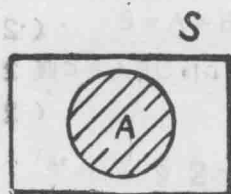
例如:  $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ;

$$A_2 = \{3, 4, 5, 6\};$$

$$A_4 = \{3, 4\}.$$

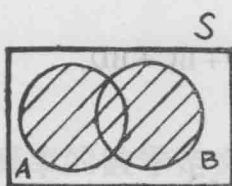
• Venn图 (Venn Diagram)

样本空间及事件间的关系, 常用 Venn 图来表示。如图 2-1 长方形内的点表示试验结果, 长方形内一个区域代表某一事件。图 2-2 示事件  $A$  及  $B$  的并, 而图 2-3 则表示  $A$  及  $B$  的交。



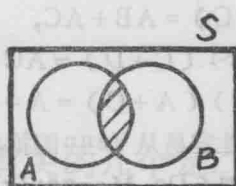
A

图 2-1



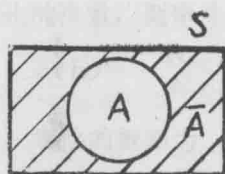
A + B

图 2-2



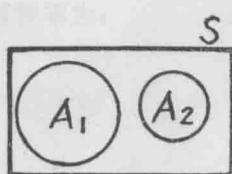
A ∩ B

图 2-3



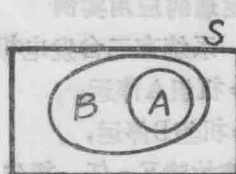
$\bar{A}$

图 2-4



$A_1 A_2 = \phi$

图 2-5



$AB = A$

图 2-6

• 事件的补 (Complementation)

若已知样本空间  $S$  的事件  $A$  及  $\bar{A}$ , 且满足  $A \cup \bar{A} = S, A \cap \bar{A} = \phi$ , 则  $\bar{A}$  称为  $A$  的补, 即在样本空间中,  $A$  的元素以外的元素都是  $\bar{A}$  的元素, 如图 2-4。

例如:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

$A = \{1, 2, 3\}$ ,

$\bar{A} = \{4, 5, 6, 7\}$ 。

• 互不相容事件 (Mutually Exclusive Events)

如果  $A_1 A_2 = \phi$ , (2-8)

则  $A_1$  与  $A_2$  是互不相容事件, 它表示如果事件  $A_1$  发生, 事件  $A_2$  就不发生, 反之, 如果事件  $A_1$  发生, 事件  $A_1$  就不发生, 如图 2-5 所示。

例如:  $A_1 = \{1, 2\}$ ,

$A_2 = \{3, 4\}$ ,

$A_1 A_2 = \phi$ , 则  $A_1$  与  $A_2$  是互不相容的。很自然, 互补事件是互不相容事件, 因为  $A\bar{A} = \phi$ ,

• 事件的代数运算

若  $A$  是  $B$  的一个子集, 记作  $A \subseteq B$  (图 2-6), 则有

$$A + B = B, \quad AB = A; \quad (2-9)$$

对任何事件  $A$  有

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A; & \overline{\overline{A}} &= A; \\ A + S &= S; & A S &= A; \\ A + \phi &= A; & A \phi &= \phi; \end{aligned} \right\} (2-10)$$

对任何事件  $A, B, C, D$  有

$$A(B+C) = AB+AC, \quad (2-11)$$

$$(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD, \quad (2-12)$$

$$(A+B)(A+C) = A+BC. \quad (2-13)$$

以上结论, 很容易从 Venn 图推出来。

戴摩尔根定理 (De Morgan's Laws)

$$\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \quad (2-14)$$

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}. \quad (2-15)$$

图 2-7 ~ 2-10 用 Venn 图证明了上式。

• 戴摩尔根定理的应用实例

例 1. 设有一系统有二台发电机,

事件  $A$  = 机组 A 停运,

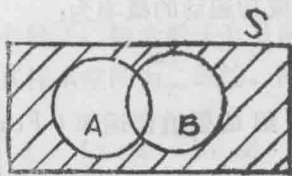
事件  $B$  = 机组 B 停运,

定义系统故障  $F$  = 任一机组停运,

系统运行  $S$  = 机组无故障,

则  $S = \bar{F}$ ,

$$\bar{F} = \overline{A+B} = \bar{A} \bar{B}$$



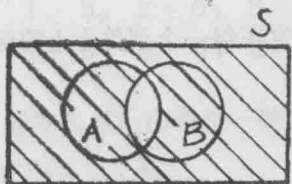
$$\overline{A+B}$$

图 2-7



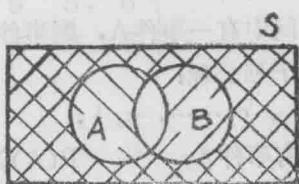
$$\overline{A} \overline{B}$$

图 2-8



$$\overline{A}$$

$$S = \overline{A}$$



$$A + \overline{B}$$

例 2: 定义系统为三条输电线路系统

事件  $A = A$  回路线停运,

$B = B$  回路线停运,

$C = C$  回路线停运,

定义系统停运为 (三条线路并联)

$$S = ABC,$$

则  $\overline{S} = \overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}.$

若定义系统停运为 (三条线路串联)

$$S = A + B + C,$$

则  $\overline{S} = \overline{A} \overline{B} \overline{C}.$

## § 2—4 概率的数学定义及有关的几个定义

### • 估计概率

在 § 2—2 里, 我们把概率作为相对频率来解释, 即在一次试验中事件的发生是不确定的, 但在相同条件下, 重复做同样的试验, 则事件的相对频率是稳定的。若  $N_E$  为  $N$  次试验中事件发生的次数, 则事件的相对频率为:

$$F(E) = \frac{N_E}{N}, \quad (2-16)$$

事件的概率为

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_E}{N}. \quad (2-17)$$

相对频率可用来作概率估计, 即用观察的相对频率  $\hat{P}(E) = \frac{N_E}{N}$  近似地估计概率。例

如燃气机在100次的起动中，有98次为成功的起动，则成功起动的概率为：

$$\hat{P}(E) = \frac{98}{100} = 0.98.$$

又如在电力系统可靠性估算中，常要用到发电机组的强迫停运率(Forced outage Rate)，简称为F. O. R.

$$F. O. R. = \frac{\text{强迫停运时间}}{\text{运行时间} + \text{强迫停运时间}}, \quad (2-18)$$

往往把FOR近似地认为是发电机组停运的概率 $q$ 。

### • 概率的数学定义

设在样本空间中有一事件 $A$ ，则事件 $A$ 的概率是确定在每一个事件 $A$ 上的函数 $P(A)$ 的值，它必须满足下列公理：

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

$$(1) \text{ 对所有事件 } A, \quad P(A) \geq 0; \quad (2-19)$$

$$P(S) = 1. \quad (2-20)$$

(2) 对于所有互不相容事件 $A_1$ 及 $A_2$ ，有

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2). \quad (2-21)$$

公理(1)的意思是对于 $S$ 中任一事件所规定的概率函数，其值在0与1之间。对于样本空间，规定其值为1。也就是说，对必然发生的事件 $P(A) = 1$ ，对不可能发生的事件 $P(A) = 0$ 。公理(2)表示互不相容事件的概率函数必须是可加的。

### • 互不相容事件的概率加法律

由上公理(2)直接推论，若 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ 为 $N$ 个互不相容事件，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N P(A_i). \quad (2-22)$$

对于 $N=3$ 有

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3) &= P(A_1 + A_2) + P(A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3). \end{aligned}$$

### • 定理1：补的概率定理

若 $A$ 是 $S$ 中的事件，则

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad (2-23)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (2-24)$$

特别，对于空集有

$$P(\phi) = 1 - P(S) = 0. \quad (2-25)$$

### • 定理2：等概率模型定理

设有样本空间 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，单一元素事件为 $E_i = \{e_i\}$ ，其试验可能结果数为 $N$ ，若这些结果是等可能的，即

$$P(E_i) = \frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2-26)$$

则任何事件 $A$ 的概率为

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\text{有利的结果数}}{\text{总的可能结果数}}. \quad (2-27)$$

例：掷二个骰子，每个骰子有6面，其数字为1, 2, 3, 4, 5, 6，故可能的结果数共有36个，其样本空间为二维的。即

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1, 1 & 1, 2 & 1, 3 & 1, 4 & 1, 5 & 1, 6 \\ 2, 1 & 2, 2 & 2, 3 & 2, 4 & 2, 5 & 2, 6 \\ 3, 1 & 3, 2 & 3, 3 & 3, 4 & 3, 5 & 3, 6 \\ 4, 1 & 4, 2 & 4, 3 & 4, 4 & 4, 5 & 4, 6 \\ 5, 1 & 5, 2 & 5, 3 & 5, 4 & 5, 5 & 5, 6 \\ 6, 1 & 6, 2 & 6, 3 & 6, 4 & 6, 5 & 6, 6 \end{array} \right\},$$

这是一个等率模型，出现每一种结果的概率为

$$P(E_i) = \frac{1}{36},$$

定义事件A = 骰子的点数之和为7，凭观察可知

$$N(A) = 6,$$

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

• 定理3：任意事件概率的加法定理

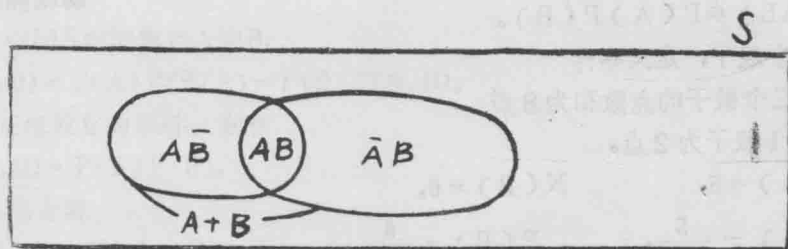
对于任意事件A及B，有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明：由图2-11之Venn图，凭观察可知

$$P(A) + P(B) = P(A+B) + P(AB),$$

故有



$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例：掷二颗骰子

定义：事件A = \*1骰子为4，

事件B = \*2骰子为5，

则  $AB =$  (请写出)。

由观察可能结果数

$$N_A = 6, N_B = 6, N_{AB} = \quad (\text{请写出}).$$

用等概率模型

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(AB) =$$



因而

$$P(A+B) = \dots$$

或者，由直接计算知

$$N(A+B) = 11, P(A+B) = \frac{11}{36}.$$

## § 2—5 条件概率 (Conditional Probability)

### • 独立事件 (Independent Events)

在样本空间中事件A, B是互相独立的, 若有

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (2-29)$$

此时有  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ 。

例如: 掷二个骰子, 定义事件

A = \*1骰子为4点,

B = \*2骰子为5点。

数一数样本空间S的元素就知道

$$N(A) = 6, \quad N(B) = 6, \quad N(AB) = 1,$$

$$P(A) = \frac{6}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36}, \quad P(AB) = \frac{1}{36},$$

故得  $P(AB) = P(A)P(B)$ ,

因而 事件A, B是互相独立的。

### • 非独立事件 (或相关事件) (Dependent Events)

在样本空间S中, 事件A, B是非独立的, 若有

$$P(AB) \neq P(A)P(B). \quad (2-30)$$

例: 掷二个骰子, 定义事件

A = 二个骰子的点数和为8点。

B = \*1骰子为2点。

则  $N(A) = 5, \quad N(B) = 6,$

$$P(A) = \frac{5}{36}, \quad P(B) = \frac{6}{36},$$

$$N(AB) = 1, \quad P(AB) = \frac{1}{36} \neq P(A)P(B),$$

故事件A, B不是相互独立的。

### • 条件概率

定义: 样本空间中任意二个事件A与B。且 $P(A), P(B) > 0$ , 则在给定事件A的条件下, 事件B的条件概率为

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (2-31)$$

故有定理4:  $P(AB) = P(A)P(B/A)$ 。

$$(2-32)$$

反之, 调换A, B之符号可得