职业技术教育基础课程规划教材

YINGYONG SHUXUE JICHU

应用数学基础

武汉铁路桥梁学校
主编　冯耀川
主审　陈哲勇

西南交通大學 出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

职业技术教育基础课程规划教材

应用数学基础

主编 冯耀川

主审 陈哲勇

西南交通大学出版社

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础 / 冯耀川主编. —成都：西南交通大学出版社，2011.8

职业技术教育基础课程规划教材

ISBN 978-7-5643-1321-0

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①应用数学－中等专业学校－教材 Ⅳ. ①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 157792 号

职业技术教育基础课程规划教材

应用数学基础

主编　冯耀川

责任编辑	张宝华
特邀编辑	孟秀芝
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　87600533
邮编	610031
网址	http://press.swjtu.edu.cn
印刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印张	6.125
字数	93 千字
版次	2011 年 8 月第 1 版
印次	2011 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-1321-0
定价	15.00 元

前　言

根据我国大力发展职业教育的要求，教材建设必须紧跟职业教育的发展步伐，必须适应职业教育的发展需要，建立服务于职业群集型的课程教学模式。根据职业教育特点及新的大纲要求，重新编写一本更适合相关专业学生使用的教材尤为必要。基于学生实际和专业课对数学的要求，我们组织资深数学课教师，编写了《应用数学基础》这本教材。新教材着重培养学生的应用意识，强化专业课的服务性，增强数学的应用性，强化学生的计算能力。

新教材按模块化编写，每一个数学知识模型相对独立，编写每一模块时，起点都尽可能地低，尽量做到以基本运算为基础。学生只需具备基本的数学运算能力，就可以开始学习这一模块的知识。教材具有如下特点：

（1）教材内容体现专业课对数学的要求，难度适用于中职学生。

（2）使学生具有一定的应用意识，具备必需的数学知识。

（3）强化计算器及 Excel 在专业课程中的计算应用。

本书由冯耀川老师统稿并主编，参加本教材编写工作的老师有冯耀川、黄苏华、徐福成、龙薇等高级讲师。本书作为初中起点学生进校后第二学期数学学习用书。

书中的例题及习题部分源自有关教材及参考书，特向原编者致谢。

在本书编写过程中，得到许多老师的大力支持和帮助，在此表示衷心地感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2010 年 12 月 16 日

目　录

1 概率统计初步

银行卡的用户密码一般由六位数字组成,取款时需要输入正确的密码。如果连续三次密码输入错误,银行就不再提供取款服务。如果你忘记了银行卡的密码,试问你在三次之内输对密码的可能性有多大?学习本章内容可以帮助你解答这类问题。

本章将学习两个计数原理、排列与组合的概念及其计数方法、随机现象和随机事件、概率的概念及其计算方法和数据整理的基础知识。

1.1 两个计数原理

1.1.1 分类计数原理(加法原理)

例 1 某人从甲地到乙地去(见图 1.1),可以乘火车,也可以乘汽车。如果一天中,火车有 3 种班次,汽车有 4 种班次,问乘坐不同班次的火车或汽车从甲地到乙地,共有多少种不同的走法?

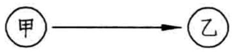

图 1.1

解 将走法分为两类:一类是乘火车,有 3 种走法;一类是乘汽车,有 4 种走法。每一种走法都可以从甲地到达乙地,将两类走法种数相加得 $3+4=7$ 种不同的走法。

类似于如上所述的问题称为分类计数问题,解决分类计数问题用到如下所述的分类计数原理。

分类计数原理 完成一件事有 n 类方式,第 1 类方式中有 m_1 种不同方法,第 2 类方式中有 m_2 种不同方法,……,第 n 类方式中有 m_n 种不同方法。任选一种方

法此事即能完成，则完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。分类计数原理又称为加法原理。

例 2 某职业学校要选拔一位同学参加全市职业学校“职业道德”演讲比赛，候选人中，铁路桥梁专业有 4 人，工民建专业有 3 人，质检专业有 2 人，共有多少种不同的选法？

解 由于候选人分属三个不同的专业，各专业分别有 4 个、3 个、2 个候选人，根据分类计数原理，共有 4＋3＋2＝9 种不同的选法。

1.1.2 分步计数原理（乘法原理）

例 3 某人从甲地经乙地到丙地（见图 1.2），已知甲地到乙地有 3 种走法，乙地到丙地有 4 种走法，问从甲地经乙地到丙地共有多少种不同的走法？

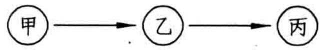

图 1.2

解 从甲地经乙地到丙地可分两步完成：第一步从甲地到乙地，有 3 种不同的走法；第二步从乙地到丙地，有 4 种不同的走法。依次完成这两步之后才能从甲地经乙地到达丙地，共有 $N=3\times4=12$ 种不同的走法。

类似于如上所述的问题称为分步计数问题，解决分步计数问题用到如下所述的分步计数原理。

分步计数原理 完成一件事要经过 n 个步骤，完成第一步有 m_1 种不同方法，完成第二步有 m_2 种不同方法，……，完成第 n 步有 m_n 种不同方法。依次完成这 n 个步骤此事才能完成，则完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法。分步计数原理又称为乘法原理。

例 4 某学生银行卡的密码由 6 位 0～9 的数字组成，问可供该同学选择的密码有多少个？

解 密码的设置可以分 6 个步骤完成：先从 0～9 这 10 个数字中任取一个数字作为密码的第 1 位，有 10 种取法；再从 0～9 这 10 个数字中任取一个数字作为密码的第 2 位，

有 10 种取法；同理，密码的第 3 至 6 位分别都有 10 种取法。根据分步计数原理，共有 $N=10\times10\times10\times10\times10\times10=10^6$ 个不同的密码可供该学生选择。

例 5 某小组有 8 个男生 5 个女生，求下列选法种数：

（1）从中任选 1 人任组长；

（2）选出男、女生各 1 人任组长。

解 （1）将男、女生分成 2 类，只选 1 人，根据分类计数原理，共有 $8+5=13$ 种不同的选法。

（2）男、女生各选 1 人，可分 2 步完成：先从 8 个男生中任选 1 人，有 8 种不同选法；再从 5 个女生中任选 1 人，有 5 种不同选法，根据分步计数原理，共有 $8\times5=40$ 种不同的选法。

习题 1.1

1. 一份纸质版的班级总结文稿需改为电子版的形式上交，有 5 人会用五笔字型输入法完成，另有 4 人会用拼音输入法完成，从中选出 1 人来完成这项工作，有多少种不同的选法？

2. 某同学计划购买一部手机，可供他选择的机型如下：夏新有 4 种，中兴有 6 种，联想有 5 种。该同学有多少种不同的购机方案？

3. 某城市的电话号码由 8 位数字构成，求解下列问题：

（1）以 8 为首的电话号码共有多少个？

（2）以 8 为首并且最后 4 位数字各不相同的电话号码共有多少个？

4. 现有一年级学生 2 名，二年级学生 4 名，三年级学生 5 名，求解下列问题：

（1）从中任选 1 人出外参赛，有多少种不同的选法？

（2）从三个年级中各选 1 人出外参赛，有多少种不同的选法？

5. 将 5 个小灯泡排成一排，每个灯泡可有亮与不亮两种状态，可表示出多少种不同的状态？

1.2 排列与组合

1.2.1 排列与排列数

例 1 从分别写有 3、4、5 的 3 张卡片中任取 2 张，把数字相除，可以组成多少个不同的商数？

解 从 3 张卡片中每次选出 2 张，按照被除数在前、除数在后的顺序排列，每一种排法就对应一个商数。完成上述排法可分两个步骤：第 1 步从 3 张卡片中任选 1 张做被除数，共有 3 种选法；第 2 步从余下的 2 张卡片中任选 1 张做除数，共有 2 种选法。根据分步计数原理，共有 $3\times2=6$ 种不同的商数，即

$$3\div4=\frac{3}{4},\quad 4\div3=\frac{4}{3},\quad 3\div5=\frac{3}{5},$$

$$5\div3=\frac{5}{3},\quad 4\div5=\frac{4}{5},\quad 5\div4=\frac{5}{4}$$

一般地，从 n 个不同元素中，任取 m 个($m\leqslant n$)元素，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。如果 $m<n$，这样的排列称为选排列；如果 $m=n$，这样的排列称为全排列。所有不同的排列个数称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，记为 A_n^m。

根据分步计数原理，可以得出如下的排列数公式：

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\ \ (m=1,2,3,\cdots,n) \tag{1.1}$$

当 $m=n$ 时，根据排列数公式，得

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

我们将连乘积 $n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$，简记为 $n!$，读作“n 的阶乘”。因此全排列的排列数公式可写为：

$$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n! \tag{1.2}$$

例 2 计算 A_5^3、A_{10}^3 和 A_5^5。

解 根据排列数公式，得

$$A_5^3=5\times4\times3=60$$

$$A_{10}^3=10\times9\times8=720$$

$$A_5^5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

例 3 从红、黄、蓝 3 面小旗中任选 1 面、2 面或 3 面，按不同次序挂上旗杆表示信号，一共可以表示多少种不同的信号？

解 将信号分为 3 类：用 1 面小旗表示的信号有 A_3^1 种；用 2 面小旗表示的信号有 A_3^2 种；用 3 面小旗表示的信号有 A_3^3 种。根据分类计数原理，所求的信号种数为 $A_3^1+A_3^2+A_3^3=3+6+6=15$（种）。

例 4 用 0～9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的 3 位数？

解 排出一个无重复数字的 3 位数，可按百位、十位、个位的顺序分三步完成：

第一步 确定百位上的数字，由于百位上的数字不能是零，所以只能从 1～9 这九个数字中任选一个，有 A_9^1 种选法；

第二步 确定十位上的数字，从余下的九个数字中任选一个，有 A_9^1 种选法；

第三步 确定个位上的数字，从余下的八个数字中任选一个，有 A_8^1 种选法。

由分步计数原理得所求的 3 位数共有 $A_9^1 \cdot A_9^1 \cdot A_8^1=648$ 个。

1.2.2 组合与组合数

例 5 从分别写有 3、4、5 的 3 张卡片中任取 2 张，把数字相加，可以组成多少个不同的和数？

解 这个问题与例 1 中的问题类似，都是从 3、4、5 这 3 张卡片中选出 2 张，但例 1 的问题中对选出的 2 个数字有先后的顺序要求，而本例则与顺序无关，颠倒 2 个数字的先后顺序所得的和数相同。因此，和数的个数只有商数个数的一半，即有 $A_3^2/2=3$种不同的和数。它们分别是：$3+4=7$，$3+5=8$，$4+5=9$。

一般地，从 n 个不同元素中，任取 m 个（$m \leqslant n$）元素，不考虑顺序并成一组，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。所有不同的组合个数称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，记为 C_n^m。

不难看出，排列和组合的根本差异在于取出的 m 个元素是否与顺序有关。例如，对取出的 3、4 两个元素，如果考虑顺序，34 和 43 是两种不同的排列；如果不考虑

顺序，则它们是同一种组合。

由于从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列可分为两个步骤完成：先从 n 个不同元素中取出 m 个元素作组合，有 C_n^m 种方法；再将每种组合里的 m 个元素作全排列，有 A_m^m 种方法。根据分步计数原理，可得排列与组合之间的关系式：$A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$，由此可推出组合数公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} \tag{1.3}$$

例 6 计算 C_{10}^2、C_{10}^8 和 C_5^5。

解 根据组合数公式，得

$$C_{10}^2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45$$

$$C_{10}^8 = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3}{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 45$$

$$C_5^5 = \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 1$$

利用组合数公式不难验证以下组合数的性质：

性质 1 $C_n^m = C_n^{n-m}$ （1.4）

性质 2 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$ （1.5）

特别地，$C_n^0 = 1$，$C_n^n = 1$，$C_n^1 = n$。

其中：$n, m \in \mathrm{N}$，$n \geqslant m$。

例 7 计算 $C_{10}^7 + C_{10}^8$。

解 $C_{10}^7 + C_{10}^8 = C_{11}^8 = C_{11}^3 = \dfrac{11\times 10\times 9}{3!} = 165$

例 8 已知 100 件产品中有 2 件次品，从中任取 3 件，求解下列问题：

（1）共有多少种不同的取法；

（2）全是正品的取法种数；

（3）恰有 1 件次品的取法种数；

（4）至少有 1 件次品的取法种数。

解 （1）从 100 件产品中任取 3 件的取法总数为

$$C_{100}^3 = \frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1} = 161\,700$$

（2）从 98 件正品中任取 3 件的取法总数为

$$C_{98}^3 = \frac{98\times 97\times 96}{3\times 2\times 1} = 152\,096$$

(3) 分两步完成：先从 2 件次品中任取 1 件，有 C_2^1 种取法；再从 98 件非次品中任取 2 件，有 C_{98}^2 种取法。根据分步计数原理，恰有一件次品的取法种数为 $C_2^1C_{98}^2=9\,506$。

(4) 分两类取法：第一类是 3 件产品中恰有 1 件次品的取法，种数为 $C_2^1C_{98}^2$；第二类是 3 件产品中恰有 2 件次品的取法，种数为 $C_2^2C_{98}^1$。根据分类计数原理，至少有 1 件次品的取法种数为

$$C_2^1C_{98}^2+C_2^2C_{98}^1=9\,506+98=9\,604$$

1.2.3 用计算器计算排列与组合

排列数与组合数的计算量一般较大，为准确快捷，可以用计算器来计算。具体操作步骤作见例 9。

例 9 利用计算器计算下列各式的值：

(1) A_8^3；(2) A_6^6；(3) C_{10}^3。

解 计算步骤如表 1.1 所示。

表 1.1

算式	按键	结果
(1) A_8^3	8 SHIFT nCr 3 =	336
(2) A_6^6 或 6!	6 SHIFT nCr 6 = 6 SHIFT x^{-1} =	720
(3) C_{10}^3	10 nCr 3 =	120

习题 1.2

1. (1) 从甲、乙、丙 3 个候选人中选出正副组长各 1 人，共有多少种不同的选法？

(2) 从甲、乙、丙 3 个候选人中选出 2 人任组长，共有多少种不同的选法？

2. 从 8 个不同的产品中每次取一个，连续取三次：

(1) 每次取出的产品不再放回，有几种取法？

(2) 每次取出的产品取后放回，有几种取法？

3. 已知 10 件产品中有 3 件是次品，从中任取 4 件，求下列取法种数：

(1) 没有次品；

(2) 恰好有 1 件次品；

(3) 至少有 1 件次品；

(4) 最多有 1 件次品。

4. 用面值为壹元、贰元、伍元和拾元的人民币各一张可组成多少种币值?

5. 某火车站有 7 股岔道，每股岔道停放 1 列火车，要停放 4 列火车有多少种不同的方法?

6. 由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个：

(1) 没有重复数字的五位数?

(2) 没有重复数字且不超过五位数的整数?

(3) 可有重复数字且不超过五位数的整数?

1.3 随机事件

1.3.1 随机事件

1. 随机现象

例 1 观察表 1.2 描述的现象：

表 1.2

序号	条 件	结 果
1	导体通电	导体会发热
2	标准大气压下，纯水加热到 100 °C	水会沸腾
3	向上抛一石子	石子会下落
4	向上抛一枚硬币	落地后正面向上或反面向上
5	某人对目标进行一次射击	击中目标或不中目标
6	某人某次买一张彩票	中奖或不中奖

上述例子中的现象可分为两类:一类是在一定的条件下必然会发生某一结果的现象（如前 3 个例子），称为确定性现象；另一类是在一定的条件下具有多种可能的结果，究竟发生哪一种结果事先是不能肯定的现象（如后 3 个例子），称为随机现象。

2. 随机试验

我们把对随机现象的观察称为随机试验，简称试验。我们是通过研究随机试验来研究随机现象的。

随机试验具有以下特征：

（1）可以在相同的条件下重复地进行；

（2）每次试验有多种可能的结果，并且能事先明确所有可能的结果；

（3）每次试验之前不能确定会出现哪一个结果。

例 2 下面是一些随机试验的例子：

（1）掷一枚硬币，观察正面、反面出现的情况；

（2）掷一颗骰子，观察出现的点数；

（3）某人进行一次射击，观察命中的环数；

（4）在一批灯泡中任意抽取 1 个，测试它的寿命。

3. 随机事件

随机试验的每一种可能的结果称为随机事件，简称事件。

例如，在例 2（1）中，每掷一枚硬币是一次试验。“正面向上”是一个事件，“反面向上”也是一个事件。

在例 2（2）中，每掷一枚骰子是一次试验。“出 1 点”“出 2 点”…“出 6 点”都是事件。此外，“至少出 5 点”也是事件，该事件可分解为“出 5 点”与“出 6 点”这两个事件。可以分解的事件称为复合事件。在随机试验中，不能分解的事件称为基本事件。在例 2（2）中，“出 1 点”“出 2 点”…“出 6 点”都是基本事件。

每次试验中必然发生的事件称为必然事件，记为Ω。每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件，记为ϕ。

例如，在例 2（3）中，某人进行一次射击，“命中的环数不超过 11”是必然事件，而“命中的环数超过 11”就是不可能事件。

1.3.2 事件的运算

1. 和事件

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生” 称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$（或 $A+B$）。

例 3 将一枚硬币掷两次，设 A 为“第一次出正面”，B 为“第二次出正面”，则有：$C=A\cup B=$“至少有一次出正面”。

2. 积事件

“事件 A 与事件 B 同时发生”称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$（或 $A\cdot B$ 或 AB）。

在例 1 中，$D=A\cap B=$“两次都出正面”。

3. 互斥事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 是互斥事件（或互不相容事件）。

基本事件是两两互不相容的。

在例 1 中，由于“两次都出正面”与“两次都出反面”这两个事件是不能同时出现的，故为互斥事件。若设 E 为“两次都出反面”，则有 $D\cap E=\phi$。

4. 对立事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，且不能同时不发生，即 $A\cap B=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件（或互逆事件）。A 的对立事件记为 $\overline{A}$。

在例 1 中，$\overline{A}$ 为“第一次出反面”；$\overline{C}$ 为“两次都出反面”；$\overline{D}$ 为“至少有一次出反面”。

习题 1.3

1. 请列举一些随机现象的例子。

2. 下列事件中哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

(1) 掷一枚骰子，出现的点数超过 6；

(2) 掷一枚骰子，出现的点数是 6；

(3) 掷一枚骰子，出现的点数不超过 6；

(4) 从 54 张扑克牌中任取一张，取到红桃 K；

(5) 某学生的手机在某个时段内收到 3 条短信；

(6) 甲、乙两人下一盘中国象棋，甲获胜。

3. 从一幅去掉大小王的扑克牌中，任取一张，判断下列各对事件中哪些为互斥事件，哪些为对立事件。

(1)“抽出红桃 A”与“抽出黑桃 A”；

(2)“抽出是红桃”与“抽出不是红桃”；

(3)“抽出牌的点数为 3 的倍数”与“抽出牌的点数为 5 的倍数”；

(4)“抽出牌的点数是 3 的倍数”与“抽出牌的点数为 2 的倍数”；

(5)“抽出牌的点数小于 6”与“抽出牌的点数大于 4”。

4. 在某门课程考试中“全班同学都及格”这一事件

的逆事件是什么事件?

5. 甲、乙、丙三人同时进行射击，设 A、B、C 三个事件分别表示甲、乙、丙中靶，试用 A、B、C 表示下列事件:

(1) 三人都中靶;

(2) 至少一人中靶;

(3) 都不中靶。

6. 设 A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生，B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生，C 不发生;

(3) A、B、C 中至少有一个发生;

(4) A、B、C 都发生;

(5) A、B、C 都不发生;

(6) A、B、C 不都发生。

1.4 事件的概率

1.4.1 事件的频率

在一次试验中，一个随机事件是否发生是不确定的，但是在大量重复试验时，它的发生是有规律的。为了找到某事件 A 发生的规律性，需要在 n 次重复试验中统计出事件 A 发生的次数 m，并计算 m 与试验总次数 n 的比值。这个比值 m/n 称为事件 A 发生的频率。

例 1 历史上曾有人做过抛硬币的重复试验，结果如表 1.3 所示。

表 1.3

抛掷次数 n	出现正面的次数 m	出现正面的频率 m/n
2 048	1 061	0.518 1
4 040	2 048	0.506 9
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5
30 000	14 984	0.499 5
72 088	36 124	0.501 1

从上面的试验记录可以看到，在每一组重复试验中，事件发生的频率有波动，带有偶然性。但在大量次数的