普通高等教育规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

李高　常秀芳　主编

化学工业出版社

普通高等教育规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

李高　常秀芳　主编

化学工业出版社
·北京·

本教材着眼于一个“用”字，从实际问题的开篇案例出发，图文并茂，使数学理论和实际应用有机地结合起来，呈现出数学的实用性，注重其直观性；以“课标导航”任务形式进行导向，通俗易懂，深入浅出，指明为什么要学习这些内容；以“温馨提示”促使学生产生浓厚的学习数学的兴趣；编排取舍适宜，精选优化教学内容，注意更新教育理念，树立创新性教育观念，注重系统思维、实践能力和创新精神培养，使学生的逻辑思维能力、空间想象能力、数形结合能力、计算与应用能力等方面得到提高，充分体现高等数学作为一门工具课的具体作用，为学习后继课程奠定必要的数学基础；同时以“知识梳理与链接”的形式结束各章，注意数学的整体性。

全书共分十章，其中包括：函数极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用，不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、无穷级数等内容。

本书可作为理工类本科非数学专业及高职高专各专业或专升本的相关专业高等数学课程的教材或教学参考，也可作为相关专业的教师、学生参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/李高，常秀芳主编．—北京：化学工业出版社，2014.5
普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-122-20013-6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①李…　②常…　Ⅲ.高等数学-教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 044908 号

责任编辑：廉　静　张双进　　　文字编辑：张燕文
责任校对：徐贞珍　　　装帧设计：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 22　字数 585　千字　　2014 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：43.00 元

前言

一切科学只有在成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。数学是生活、学习和工作中不可缺少的重要工具，是一门重要的基础科学，是通向科学大门的金钥匙。宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，数学无处不在。同时，数学是锻炼思维的体操，学习数学可以在思考问题时更加合乎逻辑、更有条理、更严密精确、更深入简洁、更善于创新。

大学高等数学内容多，进度快，一般教材言简意赅，不可能对内容与方法详加解释；近年来流行的教材尽管版本很多，提供了具体的内容，但缺乏对概念、对重点与难点的阐述和剖析，缺乏对方法与技巧的归纳总结，编者结合理工科教学实践编写此书，抛砖引玉，力图弥补以上不足，以适应各方面读者的需要。

数学的发展源远流长，人们对它的认识永无止境，本书力求成为一面镜子，返璞归真地体现思想方法的深刻内涵，遵循内容强化与解读、展示思想分析、立足能力培养、重视实际应用的原则，突出以应用为目的，以够用为度的教育特色，不仅引导现在的学习，而且对今后的学习有所启迪。本书首先对内容作概括、分析与指点，并加以适当发挥，然后提供解题技巧与方法，启发读者将知识条理化，进而抓住关键，加深对知识的理解和提高解题能力。

认识是粗略的、定性的、直观的，然后才是精确的、定量的、抽象的，学习数学是循序渐进、由表及里、逐步深入的过程，粗略、定性和直观的认识往往是创新和发明的火种。本书力求在重视知识结论的同时，体现数学学习方法的过程和规律，从能启发粗略、定性和直观的认识入手，通过强化与解读、观察、思考、分析、归纳和总结等，逐步引导出精确、定量、抽象的认识。

本书由山西大同大学煤炭工程学院李高、常秀芳任主编，山西大同大学煤炭工程学院石有印、山西煤炭职业技术学院朱青春、王艳琴任副主编，参加编写的还有重庆理工大学会计学院李殊璇，山西大同大学煤炭工程学院郭佳鑫。全书整体结构设计、统稿、定稿由李高、常秀芳承担。

本书也算是编者几十年来，在数学的科研、教学和思考中对大学数学的各种心得、体会的综述、小结和认识。可以说这就是编者对高等数学的理解，借此书与广大数学界同行交流。虽然我们已作了最大努力，但仍未写出心里的那本书，更限于能力，偏、片、错、漏在所难免，不管怎样，我们不隐瞒自己的观点，坦率向读者暴露自己，以平等切磋、共探大义的态度来创作，欢迎广大读者批评，更欢迎数学同行及其茶余饭后翻阅审视的行家里手们批评指正。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，接下来我们就开始学习高等数学了，也许在学习的过程中我们会感到枯燥无味，但是我相信只要我们努力，我们一定能到达成功的彼岸。让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

编　者　李高　常秀芳

2013 年 12 月于大同

目 录

第六章 空间解析几何 /166

第一章 函数、极限与连续

课标导航

现实生活或自然界中的现象无一不在变化之中，在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程中，常常会遇到形式各异的量，如浓度、温度、速度、时间、重力加速度等. 其中有的量在变化过程进行中保持不变，称其为常量；有的量在过程进行中不断地变化着，也就是可以取不同的数值，称其为变量. 现实世界中运动变化现象又都表现出量与量之间的依赖关系，而数学正是研究和描述自然现象和社会现象中变量变化客观规律的重要工具. 人们早就注意到事物的发展变化和影响发展变化的因素间的关系，这种依赖关系，通常称为函数关系，并抽象成数学模型——函数模型. 函数是描述客观世界变化规律的重要模型，利用函数的性态可了解其变化规律.

例如，在观察自由落体运动中，物体下降的高度 h 和下降时间 t 是变量，重力加速度是常量，物体下降的高度 h 随下降时间 t 的变化而变化，数学关系为

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

17 世纪上半叶，人们在研究物体运动问题时萌发了关于函数概念的认识，经过大约 200 年的努力，德国数学家狄利克雷（P. G. L. Dirichlet，1805～1859 年）给出了函数的现代定义. 在数学的庞大家族中，主要以函数为研究对象的数学分支有“微积分学”、“实变函数论”、“复变函数论”等；而函数思想方法作为一种基本的数学观念已渗透到数学、自然科学、经济科学和管理科学等各个领域.

函数是近代数学的基本概念之一，是微积分学研究的对象. 高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程，其中函数极限贯穿高等数学的始终，是这门课程的基本推理工具；连续则是函数的一个重要性态，连续函数又是高等数学研究的主要对象之一. 本章将介绍函数、极限与连续的概念及其运算等知识.

开篇案例

案例 1-1　洗衣机能洗净衣服吗

洗衣机的洗衣过程为加水—漂洗—脱水几次循环，假设洗衣机每次加水量、污物质量一定，问经过若干次循环后，衣物的污物浓度为多少？能否 100%地清除污物？

温馨提示

① 了解函数概念，掌握函数特性，理解反函数、复合函数及分段函数的概念. 熟悉基本初等函数的性质及其图形，会建立简单实际问题的函数关系.

② 理解数列极限定义及收敛数列的性质.

③ 熟练掌握数列极限的四则运算法则，会用该法则求一些数列极限.

④ 进一步掌握函数极限及左、右极限的概念，熟练掌握函数极限的性质和运算.

⑤ 掌握无穷小、无穷大的概念与性质，会比较无穷小的阶数的高低.

⑥ 熟练掌握两个重要极限和函数极限的计算方法.

⑦ 掌握函数连续性概念，理解间断点分类，了解连续函数的运算与初等函数的连续性.

⑧ 掌握闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

在讨论变量时，变量的取值范围，如没有特别声明都是由实数组成的集合. 如果变量的变化是连续的，通常用区间来表示其变化范围. 区间用数集的记号表示如下：

开区间　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$

闭区间　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$

半开半闭区间　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$；$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$

无穷区间　$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$；$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$；

$$(-\infty,b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\}；(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}；(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\}$$

数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

对点 a 若存在一正数 δ，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 全体，则称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$，其实质是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $U^0(a,\delta)$，即 $U^0(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，这里 $0<|x-a|$ 是表示 $x\neq a$.

对一个量进行估量或表示其取值范围时，常常以集合、区间、不等式、绝对值不等式和邻域等的形式出现.

1. 函数定义

定义1　设有两个变量 x 和 y，若变量 x 在数集 D 中每取一个值，按照某种对应规则或规律，变量 y 就有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域.

若对于确定的自变量 $x_0 \in D$ 时，通过对应规律 f，变量 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当 x 取遍 D 中一切实数时，对应的全体函数值的集合 $\{y \mid y=f(x), x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，一般记作 R_f.

为了表明 y 是 x 的函数，通常用记号 $y=f(x)$ 或 $y=g(x)$ 或 $y=F(x)$ 等来表示. 这里的字母"f"、"g"、"F"表示 y 与 x 之间的对应法则，即函数关系，它们可以采用任意不同的字母来表示.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫作单值函数，否则叫作多值函数. 以后，没有特别说明，所讨论的函数都是指单值函数.

表示函数的方式没有任何限制，函数 $f(x)$ 的具体表达方式是不尽相同的，函数通常采用解析（公式）法、表格法和图示（图像）法三种主要形式表示. 解析法是表示函数的一种重要形式，另外还有语句等其它形式.

解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法.

表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法.

图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量.

2. 函数的两个要素

函数关系是两个变量之间的相互联系及其依从关系，由定义知，只要定义域 D 和对应规律 f 确定了，函数的值域也就确定了. 因此，定义域与对应规律是确定函数必不可少的两要素. 只有当这两点完全确定，才称两个变量成函数关系，也就是说变量 y 是自变量 x 的函数，否则就会得出许多荒唐可笑的结论. 如拖拉机的耗油量与饭量成函数关系. 因耗油量、饭量是两个变量，一个会变，另一个也会变，这显然是不对的，因为两变量之间没有确定的对应规律.

【例 1-1】 在下列各式中，哪些是函数，哪些不是函数：

(1) $y=\sqrt{-x}$；　(2) $y=5$；　(3) $x=3$；　(4) $y=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$；　(5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2}}$.

解　(1)、(2)、(4) 中 y 是 x 的函数，(3)、(5) 不是函数.

(1) 因对 $(-\infty, 0]$ 中每一 x 值，都有一个 y 值与之对应，所以 y 是 x 的函数.

(2) 因 $y=5$ 中，虽表面上不含 x，但不论 x 取什么实数，y 总有确定的值 5 与之对应，所以 y 是 x 的函数.

(3) 因为对于 $x=3$，有无穷多个 y 值与之对应，所以 y 不是 x 的函数.

(4) y 是 x 的函数. 这类函数是由几个解析式联合起来表示的一个函数.

(5) y 不是 x 的函数，因对任何值 $x\in(-\infty, +\infty)$，在实数范围内无 y 值与之对应.

定义域与对应规律是确定函数必不可少的两要素，而与自变量和函数用什么字母表示无关. 即当且仅当两个函数的定义域和对应规律都相同时，这两个函数才表示同一个函数，两者有一不同，就是不同的函数，这是判断两个函数是否相同的根据.

【例 1-2】 判断下列各对函数是否是同一函数：

(1) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，$g(x)=1$；　(2) $y=f(x)$，$u=f(t)$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；　(4) $f(x)=\dfrac{x}{x(1+x)}$，$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

解 (1) 是同一函数，因定义域、值域及对应规律都相同.

(2) $y=f(x)$与$u=f(t)$是表示同一函数，因对应规律同为 f，函数的定义域（或存在域）也相同. 例如 $y=2x$ 与 $u=2t$ 是表示同一个函数. 由此可知一个函数由定义域与对应规律完全确定，而与用什么字母表示无关，这点应特别注意.

(3) 不是同一函数. 因对应规律不同，事实上 $g(x)=|x|$.

(4) 不是同一函数. 因定义域不同，$D_f=\{x:x\neq 0,x\neq -1\}$,$D_g=\{x:x\neq -1\}$.

3. 定义域的求法

掌握函数概念，并用它来解决一些问题，关键在于抓住自变量与因变量的对应关系和函数定义域这两个要素. 因此，悉心搞清楚函数的定义域显得尤为重要.

在实际问题中，函数定义域要根据问题的实际意义来确定. 当不考虑函数的实际意义，而仅就抽象的解析式来研究函数时，则规定函数的定义域是使解析式有意义的自变量取值的全体.

通常求函数的定义域一般应注意以下几点.

(1) 分式函数的分母不能为零.

(2) 偶次根式的解析式必须为非负.

(3) 对数函数的真数必须大于零.

(4) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域.

(5) 若函数表达式是由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集.

【例 1-3】 求函数的定义域：

(1) $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$；(2) $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$.

解 (1) $\because$ 当 $x-1\leqslant 0$ 时，$\lg(x-1)$无意义

$\therefore \lg(x-1)$的定义域为 $x>1$

又$\because x+1\leqslant 0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$无意义

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$定义域为 $x>-1$

故 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 $D=\{x:x>-1\}\cap\{x:x>1\}=\{x:x>1\}$，即 $(1,+\infty)$.

(2) 要使$-\sin^2\pi x\geqslant 0$，必须使 $\sin\pi x=0$，即 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $x-|x|=0$ 时，即使 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$不属于实数范围，因 $x=|x|$时，$y=0$，因而 $x\geqslant 0$ 也可认为 y 是有定义的.

所以，函数 y 的定义域为 $x\geqslant 0$ 以及 $x=k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【例 1-4】 求函数 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$的定义域和值域.

解 由于在实数范围内，负数是没有平方根的，所以 $\sin\sqrt{x}\geqslant 0$ 及$\sqrt{x}\geqslant 0$，有 $2k\pi\leqslant\sqrt{x}\leqslant(2k+1)\pi$，即函数 $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$的定义域为

$$4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant(2k+1)^2\pi^2\ (k=0,1,2,\cdots)$$

值域 R_f为 $[0,1]$.

函数的定义域说明自变量在该域范围内取值时，函数关系的解析表达式才能成立. 通常若该表达式后面不加注明，就把定义域理解为能使表达式有意义的那些自变量取值的全体，

在这种意义下，定义域也叫作函数的存在域.

4. 分段函数

某城市出租车的计价器按以下方法记价：里程不超过 4 公里的为 5 元；里程超过 4 公里不超过 10 公里的超过部分为每公里 1.3 元；里程超过 10 公里的超过部分为每公里 1.9 元. 如果设行驶里程为 x，所需费用为 y，则所需费用 y 是行驶里程 x 的函数，即

$$y=\begin{cases}5, & 0<x\leqslant 4\\ 5+1.3(x-4), & 4<x\leqslant 10\\ 12.8+1.9(x-10), & x>10\end{cases}$$

上式中，在自变量的不同变化范围内，函数的对应关系是不同的.

定义2　在不同的定义区间内用不同的解析式表示的函数，称为分段函数.

分段函数是用几个式子来表示一个（不是几个）函数，不仅与函数定义并不矛盾，而且有现实意义，自然科学和工程技术中，经常遇到分段函数的情形. 求分段函数的函数值时，要根据自变量所在部分，选用相应的解析式. 分段函数的定义域就是各个定义区间的并集.

【例 1-5】　求函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 及函数 $g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$ 的定义域，其中 $\operatorname{sgn}x$ 称为符号函数.

分析　$f(x)$与 $g(x)$都是分段函数，它们的图形分别如图 1-1 和图 1-2 所示.

解　由于分段函数的定义域是各个部分的自变量取值集合的并集. 所以，$f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$；$g(x)$的定义域是$(-1,0)\cup[0,1]\cup(0,+\infty)=(-1,+\infty)$.

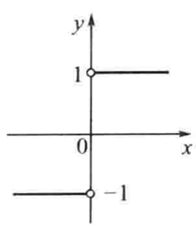

图 1-1

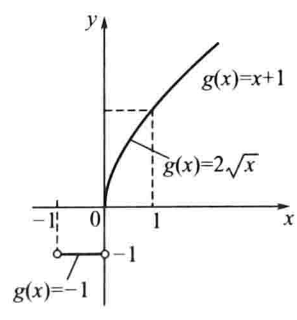

图 1-2

二、函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义3　设函数 $y=f(x)$的定义域 D 是关于坐标原点对称的：

如果对于任意一个 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$恒成立，称函数 $f(x)$为偶函数；

如果对于任意一个 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$恒成立，称函数 $f(x)$为奇函数；

否则，称 $f(x)$为非奇非偶函数.

定义域 D 关于坐标原点对称是讨论函数奇偶性的必要（先决）条件，若定义域 D 不关于原点对称，则函数为非奇非偶函数.