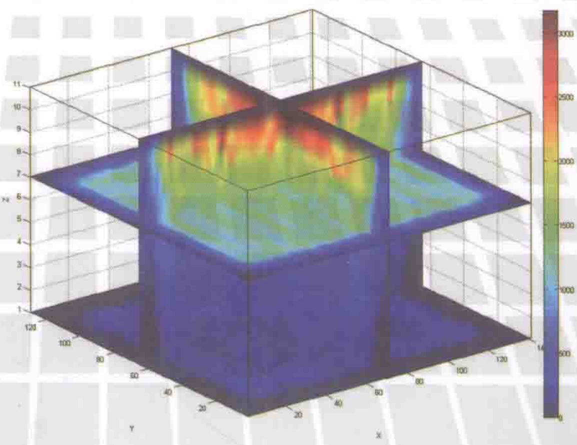
高等职业教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

景克俭　董　梅　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高等职业教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　景克俭　董　梅
副主编　单东明
参　编　张　静　王贵双　李　锦

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书针对高等职业教育财经类和工商管理类专业特点和高等职业教育要求组织编写，内容涵盖概率论与数理统计的基本概念、基本理论与方法。全书共九章，分别为：随机事件与概率、一维随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析。每章后均附有习题。附录部分包括：排列组合的基础知识、标准正态分布表、泊松分布表、χ^2 分布表、t 分布表、F 分布表。

本书适合作为高职高专院校金融、经济、管理各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为高职高专院校其他专业的教材，亦可作为工程技术人员和工科类各专业学生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/景克俭，董梅主编．—北京：
中国铁道出版社，2014.1
高等职业教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-113-17920-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①景… ②董… Ⅲ.①概率论—高等职业教育—教材 ②数理统计—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 316353 号

书　　名：概率论与数理统计
作　　者：景克俭　董　梅　主编

策　　划：李小军　　**读者热线：**400-668-0820
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任校对：汤淑梅
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市华丰印刷厂
版　　次：2014 年 1 月第 1 版　　2014 年 1 月第 1 次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张：**11　**字数：**206 千
书　　号：ISBN 978-7-113-17920-5
定　　价：22.00 元

前　言

概率论与数理统计是经济金融管理专业的一门基础课。根据高等教育要面向21世纪教育内容和课程体系改革总目标的要求，参照教育部有关教学大纲，结合作者20年来为石家庄邮电职业技术学院讲授概率论与数理统计课程的实践，我们编写了《概率论与数理统计》这本教材。

本书在结构体系、内容安排、习题选择等方面努力体现高职高专特色，改变照搬本科教材的现状，力求贯彻以应用为目的、以必需够用为原则，并同时兼顾学生继续发展的需要，注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养，注意讲清概念，减少理论证明，同时加强理论与实际的联系。

本书共分九章，内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析。每章后均附有习题，其中带有 * 的为选做题。附录部分包括：排列组合的基础知识、标准正态分布表、泊松分布表、χ^2 分布表、t 分布表、F 分布表。

本书由石家庄邮电职业技术学院景克俭、董梅担任主编，石家庄邮电职业技术学院单东明担任副主编，石家庄邮电职业技术学院张静、王贵双、李锦参加编写。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促书中难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2013年11月

目　　录

第1章　随机事件与概率

1.1　概率论的基本概念

1.1.1　概率论的研究对象

自然界和现实生活中，人们观察到的现象大体可以归结为两类：一类称为**确定性现象**或**必然现象**，这类现象在一定条件下必然发生（或必然不发生）．例如，早晨，太阳必然从东方升起；在一个标准大气压下，水在 100 ℃时必然会沸腾．另一类现象称为**偶然现象**或**随机现象**，它是事先不可预言的，即在相同条件下重复地进行试验，每次结果未必完全相同．例如，掷一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能出现反面；用枪对目标进行射击，可能击中，也可能击不中．

随机现象都带有不确定性，但这仅仅是随机现象的一个方面，人们发现，在相同条件下进行大量的试验和观察，随机现象又呈现出某种规律性．例如，掷一枚质地均匀的硬币，当掷的次数相当多时，就会发现出现正面和反面次数之比约为 1∶1. 随机现象所呈现的这种规律性，称为随机现象的**统计规律性**，而概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门科学．

1.1.2　随机试验

为了对随机现象进行研究，经常要进行试验．一般地，一个试验，如果它有下列特性，就称它为**随机试验**，简称**试验**．

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验的可能结果不止一个，并且在试验前能明确可知所有可能的结果；

(3)试验前无法预知哪一个结果出现．

试验通常用 E 表示，举例如下：

E_1：掷一枚硬币，观察正面和反面出现的情况．

E_2：掷一颗骰子，观察它出现的点数．

E_3：在一批产品中，任取一件，观察它是正品还是次品．

E_4:在一批灯泡中,任取一只,测试它的寿命.

E_5:记录某一交通路口某指定时间段内的车流量.

1.1.3 随机事件

随机试验的每一种可能的结果称为**随机事件**,简称**事件**. 我们常用字母 A、B、C、…表示. 例如,在如上试验 E_2 中,"出现点数 3"、"出现奇数点"都是随机事件.

通常一个随机事件由试验的若干个(有限或无限)试验结果构成. 在一个随机试验中,它的每一个简单的不能再分的结果称为**基本事件**,而由基本事件组合而成的事件称为**复合事件**. 例如,在如上试验 E_2 中,"出现点数 3"就是基本事件,而"出现奇数点"则是由"出现点数 1"、"出现点数 3"、"出现点数 5"三个事件复合而成,则其就是复合事件.

随机事件还有两个极端情况:

(1)必然事件:每次试验中一定发生的事件. 用 Ω 表示. 例如,在如上试验 E_2 中,"出现点数小于 7"必然发生.

(2)不可能事件:每次试验中必不发生的事件. 用 $\varnothing$ 表示. 例如,在如上试验 E_2 中,"出现点数大于 8"不可能发生.

为了讨论方便,将必然事件和不可能事件也作为随机事件.

1.1.4 样本空间和样本点

为了研究事件间的关系和运算,用点集的概念和图示法比较直观,容易理解. 我们把试验中的每个基本事件用一个只包含一个元素的单点集 $\{\omega\}$ 表示,其中 ω 又称**样本点**,而复合事件就是包含若干个样本点的集合. 所谓某事件的发生,是指在一次试验中,它所包含的某一样本点出现.

全部样本点组成的集合称为**样本空间**. 由于任何一次试验的结果必然出现全部样本点之一,因此样本空间作为一个事件是必然事件,我们仍用 Ω 表示样本空间. 复合事件是样本空间的一个子集,基本事件是样本空间中只含一个样本点的子集. 不可能事件在试验中不可能发生,因此它所对应的子集中没有样本点,也就是空集.

1.2 事件的关系和运算

在实际问题中,往往要考虑同一个随机试验下的许多个随机事件,它们是互相关联的. 研究事件间的关系和运算,就可以在今后考虑事件的概率时,利用较

简单事件的概率去推算较复杂事件的概率．下面就介绍事件间的一些基本关系和运算，并将其和集合的关系和运算相对应．

1.2.1　事件的包含与相等

如果事件 A 发生导致事件 B 必然发生，则称事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）．此时也称 A 是 B 的**子事件**．

例 1　一袋中有 2 个黑球，8 个白球，现从中任取 3 球，设：

A＝“恰取到一个黑球”；

B＝“至少取到一个黑球”；

C＝“最多取到二个白球”．

则有 $A\subset B, B\subset C, C\subset B$.

如果事件 A、B 有 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**（**或等价**）．例如，例 1中 $B=C$. 相等的两个事件，实际上是同一事件的两种提法而已．

1.2.2　事件的积（交）

“事件 A 与事件 B 同时出现”的事件，称为事件 A 与 B 的**积**（**交**），记作 $A\cap B$或 AB.

例 2　掷一颗骰子一次，设：

A＝“出现奇数点”；

B＝“出现点数不超过 2”．

则 AB 表示事件“出现点数 1”．

类似地，可定义有限多个事件的积事件，即“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时出现”的事件，称为 n 个事件的**积事件**，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

1.2.3　事件的互不相容（互斥）

如果事件 A、B 不能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$（$AB=\varnothing$），则称 A 与 B 是**互不相容的**（**互斥的**）．

例 3　任取一件产品，记：

A＝“取到正品”；

B＝“取到次品”．

则事件 A 与 B 互不相容．

n 个事件**互不相容**，是指其中任意两个事件都互不相容．

样本空间中若有 n 个基本事件，则这 n 个基本事件是互不相容的．

1.2.4 事件的和(并)

“事件 A、B 至少发生一件”的事件，称为事件 A、B 的**和**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

(1)若 A、B 互不相容，则 $A\cup B$ 表示或 A 发生，或 B 发生的事件；

(2)若 A、B 相容，则 $A\cup B$ 表示或 A 发生，或 B 发生，或 A、B 同时发生的事件.

例 4 掷两枚均匀硬币，设：

A=“两个均为正面朝上”；

B=“一个正面朝上，一个反面朝上”.

则 $A\cup B$ 表示事件“两个中至少一个正面朝上”.

类似地，可以定义有限个事件的和事件，即“事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个出现”的事件，称为这 n 个事件的**和事件**，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

例如，$A\cup B\cup C$ 或 $A+B+C$ 表示事件 A、B、C 中至少发生一件(可以仅发生一件，也可以两件或三件都发生)这个事件.

1.2.5 对立事件

事件 A 不发生，这个事件称为事件 A 的**对立事件**，记作 $\overline{A}$.

例 5 掷一颗骰子，设：

A=“出现奇数点”，则 $\overline{A}$=“不是出现奇数点”，也即“出现偶数点”.

显然，在任何一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不可能同时发生，且它们中恰好有一个事件发生，即 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A+\overline{A}=\Omega$.

例 6 10 件同类产品中有 2 件次品，现从中任取 2 件，设：

A=“取到 2 件正品”；

B=“至少取到一件次品”.

由于 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，则 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

1.2.6 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$，由事件的积的定义，$A-B$ 可表成 $A\overline{B}$.

例 7 设 A 表示“产品直径合格”，B 表示“产品高度合格”，则 $A-B$ 表示“该产品直径合格而高度不合格”.

以上事件之间关系及运算可以用文氏(Venn)图来直观地描述，若用平面上

的一个矩形表示样本空间 Ω，用其中一个圆表示事件，则事件的关系运算可以用图 1－1 表示．

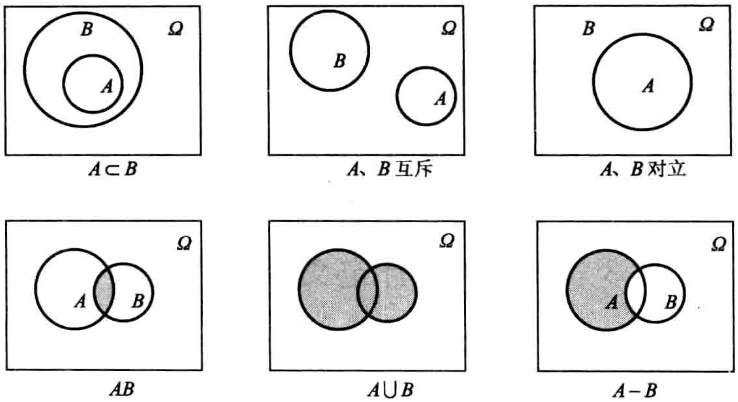


图 1－1

1.2.7　事件的运算规律

（1）交换律

$$A+B=B+A$$
$$AB=BA$$

（2）结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$(AB)C=A(BC)$$

（3）分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$A+BC=(A+B)(A+C)$$

（4）对偶律

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$$
$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

例 8　向指定目标射击两枪，以 A_1、A_2 分别表示第一、二枪击中目标，试用 A_1、A_2 及它们的逆事件表示以下各事件：

（1）两枪都击中目标；

（2）两枪都没有击中目标；

（3）有一枪击中目标；

（4）至少有一枪击中目标．

解 (1)只当 A_1、A_2 同时出现时，事件(1)才出现，故"两枪都击中目标"$=A_1A_2$；

(2)由题设知，$\overline{A}_1$、$\overline{A}_2$ 分别表示第一、二枪没有击中目标，故"两枪都没有击中目标"$=\overline{A}_1\,\overline{A}_2$；

(3)相当于事件"第一枪击中目标而第二枪没有击中目标"或"第一枪没有击中目标而第二枪击中目标"，故"有一枪击中目标"$=A_1\,\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2$；

(4)相当于"有一枪击中目标"或"两枪都击中目标"，故"至少有一枪击中目标"$=A_1\,\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2$.

1.3 概率的统计定义及加法公式

1.3.1 概率的统计定义

随机事件的特点是在一次试验之后，它可能发生，也可能不发生，在试验前无法预料，且不同的随机事件发生的可能性不一定相同．自然，我们希望有一个量来反映这种可能性的大小，这就是概率．

随机事件就个别的试验来说，我们很难预料其结果，但当我们进行大量的重复试验时，情况就得到了根本改观，我们将会发现它们具有某种规律，这种规律与事件的频率密切相关，故下面我们先引入随机事件频率的概念．

定义 1.1 设事件 A 在 n 次试验中出现 r 次(r 又称 A 在 n 次试验中的频数)，则称比值$\frac{r}{n}$为事件 A 在 n 次试验中的**频率**，记作 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{r}{n}$$

频率具有下列性质：

对任一事件 A，

(1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2)$f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

(3)若事件 A、B 互不相容，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

一般地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$

通过实践，人们发现，当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 总在某一个值 p 附近摆动．例如，投掷一枚均匀硬币，观察出现正面这件事发生的频率，若试验次数较少，频率值变动很大，很难找到有什么规律，但若试验次数增多，就可以找到它的规律．历史上有人做过这种试验，部分结果如表 1－1 所示．

表 1-1

试验者	投掷次数 n	正面向上的次数 m	正面向上的频率 $\frac{m}{n}$
De Morgan	2048	1061	0.518
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

由上表可以看出，投掷次数充分多时，正面出现的频率在 0.5 附近摆动，频率具有一定的稳定性，这一客观事实说明，用数量来刻画事件发生的可能性大小是有客观背景的，事件的频率在某一数值 p 附近摆动，这个数 p 是客观存在的，是事件本身的一个属性.

定义 1.2　设在相同条件下，作了 n 次试验，其中事件 A 发生的频率为 $f_n(A)$，当试验次数 n 充分大时，$f_n(A)$ 总是在区间 $[0,1]$ 上一个确定的常数 p 附近摆动，则称常数 p 为事件 A 发生的**概率**，记作

$$P(A)=p$$

这就是概率的统计定义，数值 p 就是事件 A 发生的可能性大小的客观数量描述.

由概率的统计定义及频率的有关性质可知，概率具有如下性质：

(1) 对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 A、B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

一般地，若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

1.3.2　古典概型

下面介绍一种研究最早的概率模型——古典概型.

定义 1.3　如果随机试验 E 具有下列两个特征：

(1) 有限性：每次试验只有有限个不同的基本事件，即

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

(2) 等可能性：每个基本事件出现的可能性相等. 即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}$$

这时称 E 为**古典试验**，而将此类概率问题称为**古典概型**，或称为**等可能概型**.

由定义可知$\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$是两两互不相容的，故有

$$1=P(\Omega)=P\{\omega_1\cup\omega_2\cup\cdots\cup\omega_n\}=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n)$$

则

$$P(\omega_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

设事件 A 表示包含 k 个基本事件的复合事件，即

$$A=\omega_{i1}\cup\omega_{i2}\cup\cdots\cup\omega_{ik}$$

则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\omega_{i1}\cup\omega_{i2}\cup\cdots\cup\omega_{ik})\\&=P(\omega_{i1})+P(\omega_{i2})+\cdots+P(\omega_{ik})\\&=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{k个}=\frac{k}{n}\end{aligned}$$

由此得到古典概型中事件 A 概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}$$

例 1 邮筒内有 10 封信，其中有 8 封是外地的，两封是本地的．

(1)有放回地取两次，每次一封；

(2)无放回地取两次，每次一封；

(3)一次任取两封．

分别求取到两封均为外地信的概率．

解 设 A=“取到两封外地信”．

(1)有放回地取两次，每次一封，基本事件总数为 $n=10\times10$；8 封外地信，从中有放回地取两次，每次一封，则事件 A 所含基本事件数 $k=8\times8$，所以

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{8\times8}{10\times10}=0.64$$

(2)无放回地取两次，每次一封，基本事件总数为 $n=10\times9$，事件 A 所含基本事件数 $k=8\times7$，因此

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{8\times7}{10\times9}\approx0.62$$

(2)10 封信中一次任取两封，基本事件总数为 $n=C_{10}^2$，事件 A 所含基本事件数 $k=C_8^2$，因此

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}\approx0.62$$

无放回地取两次，每次取一封，与一次任取两封是同样的试验．

例 2 袋中有三个白球两个红球，从袋中任取两球，求以下事件的概率：

(1)A=“取得两个都是白球”；

(2)B="取得两个都是红球";

(3)C="取得一个白球一个红球".

解　袋中有 5 个球,任取两个共有 C_5^2 种取法,即基本事件总数 $n=C_5^2=10$.

(1)袋中有三个白球,从中取出两个白球有 $C_3^2=3$ 种取法,即 A 所含基本事件数 $k=3$,于是

$$P(A)=\frac{3}{10}=0.3$$

(2)袋中有两个红球,从中取出两个红球只有 $C_2^2=1$ 种取法,即 B 所含基本事件数 $k=1$,于是

$$P(B)=\frac{1}{10}=0.1$$

(3)袋中有三个白球,两个红球,从中取出一红一白,共有 $C_3^1C_2^1=6$ 种取法,即 C 所含基本事件数 $k=6$,于是

$$P(C)=\frac{6}{10}=0.6$$

古典概型中有一个有趣的问题——生日问题,即讨论 n 个人中至少有两个人生日是同月同日的概率,有兴趣的同学可以试着计算一下自己所在班级中至少有两人同月同日生的概率,看看这个可能性是大还是小呢?

1.3.3　加法公式

一个复杂事件往往是由若干个简单事件组合成的,若已知这些简单事件发生的概率,能否求出这个复杂事件发生的概率呢?

加法公式(Ⅰ)　如果两个事件 A、B 互不相容,则

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1-1}$$

这个公式是由概率的统计定义直接得出的,我们也可以用古典概型来做说明.

设基本事件总数为 n,事件 A 包含了其中的 m_1 件,事件 B 包含了其中的 m_2 件,因事件 A、B 互不相容,因此事件 $A+B$ 包含了 m_1+m_2 个基本事件,于是

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

推论 1　对任意事件 A,有

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \tag{1-2}$$

证明　由于 A 与 $\overline{A}$ 互不相容,且 $A+\overline{A}=\Omega$,利用公式(1-1)有

$$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1$$