

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等空间机构学

(第二版)

Advanced Spatial Mechanism

(Second Edition)

真 赵永生 赵铁石 著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

高等空间机构学

GAODENG KONGJIAN JIGOUXUE

(第二版)

Advanced Spatial Mechanism

(Second Edition)

黄真 赵永生 赵铁石 著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书介绍了作者近三十年来在空间机构和并联机器人机构方面有特色的研究成果和最新进展,也注意到作为教材应有的系统性。本书内容包括机构分析和机构综合两个方面,开篇比较系统又简洁地介绍了螺旋理论。在机构分析方面,首先突出地介绍了作者提出的基于约束螺旋的自由度分析方法,这是一个十分有效而又简便的方法,也是目前唯一具有通用性的实用方法;还介绍了影响系数原理、运动分析新的基于机构学概念的奇异新分类、机构的三阶螺旋系以及动力学的某些问题。在机构综合方面,讨论了各种自由度下的空间对称的多环并联机构的机型综合,并重点介绍了难度大的具有过约束的4自由度和5自由度并联机构的综合方法。此外,本书还简略地讨论了基于位移流形的机型综合原理,是为了让读者看到不同方法在一定程度上具有的关联性,并可以对比两种方法。

本书可以作为高等学校机械工程学科硕士研究生的教学用书,其中比较深入的部分可供博士研究生选用,还可以作为有关科技人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等空间机构学 / 黄真, 赵永生, 赵铁石著. -- 2
版. -- 北京: 高等教育出版社, 2014. 5
ISBN 978 - 7 - 04 - 039393 - 4

I . ①高… II . ①黄…②赵…③赵… III . ①空间机
构 - 机构学 - 研究生 - 教材 IV . ①TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 051890 号

策划编辑	宋晓	责任编辑	宋晓	封面设计	李卫青	版式设计	余杨
插图绘制	杜晓丹	责任校对	陈杨	责任印制	刘思涵		

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京市密东印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 25.5
字数 460千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2006年6月第1版
2014年5月第2版
印 次 2014年5月第1次印刷
定 价 47.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究
物料号 39393-00

第二版前言

1997年黄真、孔令富、方跃法著《并联机器人机构学理论及控制》一书出版后，被许多学校作为研究生教学用书，不久告罄。许多读者来函希望再版，由于种种原因没能成行，但我们一直希望满足读者要求，能够再版。直到2004年，教育部学位管理与研究生教育司征集研究生教学用书，我们在《并联机器人机构学理论及控制》一书内容的基础上进行修改、补充，并于2006年出版本书第一版。

我们这次之所以修订本书，是因为近几年我们对第一版第五章的机构自由度分析原理和方法做了深入的通用性论证。2005年，Gogu教授指出目前有一种自由度方法具有普遍性，都不是通用的公式，并列举出100多年来不适合任何通用公式的反常机构（不能用通用的自由度公式计算的机构）。公式没有普遍性，自然人们不敢采用，因为无法判断计算结果的正确性。近年来，我们一方面用上述的“机构自由度分析原理和方法”针对Gogu收集到的反常机构逐个地完成求解，证实了这个原理和方法具有通用性；另一方面又从理论上阐明为什么这个原理和公式的论证方法是科学的。因此，我们认为这个方法具有通用性，能适合当前所有类型的机构。这次修订就是要明确让读者知道这个原理和公式具有通用性，在需要应用自由度公式判别机构自由度时可以放心地去应用，并且还介绍了论证的过程，以及如何正确地应用这个方法。同时在修订中，也对书中发现的错误做了订正。

本书中介绍的机构自由度分析原理和方法是目前唯一的具有通用性的方法，我们也真诚希望将来有更好的通用算法来代替这个算法，比如能够更简单，特别是希望自由度原理和方法简单到能够直接进入大学本科生的教材里。高等学校机械工程学科本科每年要培养许许多多的机械工程师，如果他们能直接掌握一种正确的自由度通用公式和方法，这对他们今后的机械创新会非常有意义。更希望本书的读者中有人能完成这个任务。

现在，我们都认识到中国由制造大国要发展为制造强国，关键是创新，特别是制造领域高端装备的机械创新，机械创新的关键之一又是机构的创新，自

由度计算的重要性的意义就在这里。希望这个自由度原理和方法对于机械工程学科的大学生和工程师在进行机械创新时能够有所帮助。

清华大学刘辛军教授认真审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见，对此表示衷心的感谢。

限于作者的水平和时间，本书疏虞之处在所难免，恳请读者批评指正。

作 者
于燕山大学
2013年10月

第一版前言

机构学是一门十分古老的科学，与一切事物一样，至今仍然不断地向前发展，不断地焕发出新的气息。串联式机器人的发展曾经带动了空间机构学的发展，近 20 年来并联机器人的发展再次带动了空间机构学。特别是今天，为了我国的科技进步，为了大力发展自主创新，机构学正面临着一个空前的机遇。任何机械系统的创新离不开机构的创新，从某种意义上还可以说机构的创新是机械系统创新的灵魂。在这种形势下出版本书，希望能对我国的机械创新有所贡献，对这方面的研究生教学有所帮助。

本书第一作者曾出版过两本关于机器人机构学方面的著作。本书为了响应教育部研究生教材征集，又系统地总结了我们的近 10 年在空间机构学和并联机器人机构学上的新的研究成果。这些材料是很有特色的。比如在机构分析上，我们提出的基于约束螺旋理论的自由度分析原理和对应的方法，不仅理论上解决了困惑机构学界的一个 150 年的历史问题，而且所提出的方法简单、巧妙，只需一张纸、一支笔，绝大多数机构的自由度分析可以在几分钟内完满地解决。又如在机构综合上，也是基于约束螺旋理论，介绍了我们提出的少自由度并联机构的综合原理，这是一个完善的能综合出所有 9 种类型的对称少自由度并联机型的综合理论。掌握此原理就可以综合任何期望自由度的机构，包括非对称的少自由度并联机构。可以看到，这些理论对于机械的创新是十分有意义的。关于螺旋理论，有线性代数基础的人并不难掌握，因此本书的前三章对螺旋理论做了简要介绍。

本书是基于螺旋理论和影响系数原理展开研究的，本书第一作者感谢美国的 Duffy 教授和 Tesar 教授，在 1982 年作为访问学者访问 Florida 大学时，是他们传授给我这些基本理论并引领我到这个新的研究领域，并取得许多成绩。二十多年后的今天，这两个理论仍然具有巨大的理论潜力，即使是出现了像李群、李代数等现代数学理论应用到机构学的情况下，螺旋理论和影响系数原理仍能够解释和分析机构学理论上新出现的许多问题，取得好的效果。特别是它们比较通俗易懂，易于为广大科技工作者和工程师所掌握。一般说，新的较深

的数学理论作为工具在研究问题时能更深入事物的内部，因而进行研究工作时多采用较高深的数学，为此在本书的末尾也对这样的新的数学及其应用做了一些基础性的介绍。

作者在此要深深地感谢国家自然科学基金会。在这近 20 年来的科学研究中得到国家自然科学基金会长期的、不间断的支持。没有这些支持要取得这样的成果是不可想象的。

在本书所综合的学术成果中，许多的燕山大学的研究生都做出过十分有意义的贡献。在这里向他们表示感谢。从这里也看到了研究生制度对于推进科学研究的重要作用：既培养了人又出了成果。此外，还向本书中参考过或引用过的文献的全部作者表示谢意。

本书的撰写分工为：赵永生执笔本书的第四章、第六章到第八章和第十章；赵铁石执笔第十一章至第十三章；黄真统编全书并执笔第一章至第三章、第五章和第九章。

本书作为研究生教材，可以为硕士生课程选用，一些比较深入的章节目录中标以星号可以为博士生选用。为了读者学习和进一步开展科学研究的方便，文中对许多理论及观点都给出处，这对于想进一步深入研究的读者，可以查阅有关的文献。

限于作者的水平 and 时间的限制，本书疏虞之处在所难免，恳请读者和各方面专家批评指正。

作 者

于秦皇岛海边燕山大学

2005 年 10 月

目 录

第一篇 螺旋理论

第一章 螺旋理论基础	2
1-1 点、线、面的齐次表示	2
1-2 点、线、面的相互关系及两直线的互矩	7
1-3 线矢量及螺旋	11
1-4 螺旋的代数运算	14
1-5 刚体的瞬时螺旋运动	17
1-6 刚体上作用的力螺旋	21
参考文献	24
第二章 螺旋系和螺旋的相关性	26
2-1 二阶螺旋系	27
2-2 二系螺旋的性质	32
2-3 三阶螺旋系	37
2-4 特殊三系螺旋的几何性质	39
2-5 Grassmann 线几何	43
2-6 螺旋在不同几何空间下的相关性	45
2-7 串联机器人机构的螺旋运动方程	51
参考文献	57
第三章 反螺旋系	59
3-1 反螺旋的概念	59
3-2 反螺旋系	63
3-3 反螺旋和被约束的运动	70
3-4 约束作用下存在的特殊转动	73
3-5 螺旋方程的反螺旋解法	81
参考文献	84

第二篇 机构的分析与综合

第四章	空间机构和机器人机构的结构分析	86
4-1	运动链参数的 D-H 表示法	86
4-2	空间机构的运动副分析	88
4-3	物体空间方位的欧拉角表示	91
4-4	空间机构和机器人机构的结构类型	97
	参考文献	109
第五章	机构自由度分析的约束螺旋求解法	111
5-1	自由度的概念	111
5-2	机构自由度的通用公式问题	112
5-3	修正的 Kutzbach-Grübler 公式	114
5-4	机构中过约束的确定	117
5-5	自由度性质	124
5-6	机构自由度计算	136
5-7	机构实现确定运动的条件	152
	参考文献	155
第六章	空间机构位置分析	159
6-1	机构的位置分析反解	160
6-2	机构位置正解的数值方法	161
6-3	机构位置正解的封闭方法	164
6-4	6-SPS 并联机构的位置正解	169
6-5	机器人机构的工作空间分析	176
	参考文献	184
第七章	运动影响系数的理论及机构运动分析	187
7-1	运动影响系数的概念	188
7-2	串联开链机构的运动影响系数及运动分析	194
7-3	并联机构的一阶运动影响系数及速度分析	200
7-4	并联机构的二阶运动影响系数及加速度分析	204
7-5	建立机构运动分析的其他方法	209
7-6	Stewart-Gough 机构的运动分析	213
7-7	少自由度并联机构的影响系数的直接法	218
	参考文献	228

* 第八章	少自由度机构的瞬时螺旋运动	230
8-1	三阶螺旋系的无穷多的节距和转轴分布	231
8-2	空间三自由度并联角台机构的瞬时运动分析	238
8-3	三自由度 3-RPS 并联平台机构的瞬时运动分析	245
	参考文献	253
第九章	机器人机构的奇异分析	255
9-1	奇异的概念及分类	256
9-2	平面四杆机构的奇异	262
9-3	串联机器人机构的奇异	264
9-4	Gough-Stewart 机构的奇异位型分析	267
9-5	三自由度 3-RPS 机构的奇异位型分析	278
9-6	多指多关节手和多臂机器人协同操作的奇异	284
	参考文献	289
第十章	空间机构的动力学问题	293
10-1	空间机构的静力平衡和力雅可比矩阵	293
10-2	空间机构的动力学建模与分析	300
10-3	典型的 6-SPS 机构的受力分析	311
10-4	超确定输入多机器人系统的动力协调	316
	参考文献	336
第十一章	少自由度并联机器人型综合的约束螺旋原理	339
11-1	并联机构的等效串联分支	341
11-2	串联分支的约束类型	344
11-3	少自由度并联机构的约束螺旋系	346
11-4	约束螺旋综合法的原理和步骤	351
	参考文献	355
第十二章	对称少自由度并联机构的型综合	359
12-1	对称五自由度并联机构的型综合	359
12-2	对称四自由度并联机构的型综合	367
12-3	多自由度并联机构的输入干涉和选取	376
	参考文献	378
* 第十三章	机构综合的位移流形理论	381
13-1	相关的数学基础	381
13-2	少自由度并联机构的位移流形综合原理	385
13-3	五自由度对称并联机构的型综合	392
	参考文献	396

第一篇

螺旋理论

应用螺旋理论做空间机构的某些分析是比较方便的，它是诸种常用的数学方法中较好的一种。螺旋也称旋量。一个旋量可以表示空间的一组对偶矢量，从而可以用来同时表示矢量的方向和位置，同时表示运动学中的角速度和线速度，以及同时表示刚体力学中的力和力矩。这样一个含 6 个标量的旋量概念，就易于应用于空间机构的运动和动力分析。它也易于与其他方法如矢量法、矩阵法和运动影响系数法之间的相互转化。它具有几何概念清楚、物理意义明确、表达形式简单、代数运算方便、理论上的难度也不是很高等优点，因而得到广泛的应用。对目前机构学上的许多前沿性的研究问题，螺旋理论常常做出贡献。

螺旋理论形成于 19 世纪。首先，Poinsot 在 19 世纪初通过对刚体上力系的简化，得到具有旋量概念的力矢与共线的力偶矢，这是一组对偶矢量。Plücker^[1]确定了空间直线的方向位置的 6 个坐标，这就称为 Plücker 线坐标。1900 年，Ball 写出经典的著作《螺旋理论》^[2]，书中用螺旋讨论了在复约束下刚体的运动学和动力学。

在 20 世纪的前半叶，螺旋理论几乎无人问津。直到 1950 年，Dimentberg 在分析空间机构时首次应用了螺旋理论^[3,4]，引起了人们的关注。接着，Freudenstein、Yang 等应用对偶四元素、螺旋微分于空间机构的位移和动力分析^[5]。Phillips 应用螺旋理论分析三物体的相互运动^[6]。1978 年，Hunt 的《运动几何学》是螺旋理论的现代发展^[7]。Waldron^[8]、Sugimoto 和 Duffy^[9]等在螺旋理论及其应用上都做出了贡献。Duffy 在 1984 年首先将螺旋理论应用到并联机器人上^[10]，其后黄真于 1985 年用螺旋理论分析并联机器人的瞬时螺旋运动^[11]。这些是在并联机器人上的早期研究。本篇基本的内容选自 1983 年 Duffy 在佛罗里达大学的课堂讲义^[12]。今天看来，Duffy 的讲义仍旧是表述最好的、深入浅出的关于螺旋理论基础的著作。这里谨向已去世的 Duffy 教授表示诚挚的敬意。

第一章

螺旋理论基础

本章先从空间的点、线、面的矢量表示开始，建立它们的齐次坐标，并讨论它们的相互关系。在此基础上引出两个重要概念，即线矢量和旋量，讨论它们的性质和代数运算。最后，结合机器人空间开链机构及空间单闭环机构建立它们的运动副的螺旋表示。

1-1 点、线、面的齐次表示

1-1-1 点的齐次坐标

在坐标系 $OXYZ$ 中，点 A 的位置由矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{OA} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 决定，如图 1-1 所示。若有 4 个数 x_0, y_0, z_0 和 d ，使 $x_0/d = x, y_0/d = y$ 及 $z_0/d = z$ ，则点 A 的位置矢量可以表示为

$$\mathbf{r} = (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k})/d \quad (1-1)$$

(点的齐次坐标的这 4 个数 x_0, y_0, z_0 和 d ，也常常表示为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，当 $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{0}$ 时，无点存在)。注意，对于齐次坐标 $\mathbf{0}$ 不表示任何点。如果令

$$(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}) = \mathbf{d}_0$$

显然 \mathbf{d}_0 是沿直线 OA 方向的矢量。代入式(1-1)得 $\mathbf{r} = \mathbf{d}_0/d$ ，这里写为

$$\mathbf{r}d = \mathbf{d}_0 \quad (1-2)$$

此式表示了点 A 的位置。式中， d 及 \mathbf{d}_0 是点 A 位置的齐次坐标。因为在式(1-2)中，以标量 λ 构成 λd 及 $\lambda \mathbf{d}_0$ 代替 d 及 \mathbf{d}_0 ，表示的是同一个点 A 的坐标。点的这种齐次坐标记为 $(d; \mathbf{d}_0)$ 。由于点的坐标取决于 3 个独立的参数，故在三维空间点的数目有 ∞^3 个。由式(1-2)，点 A 至原点的距离为

$$|\mathbf{r}| = |\mathbf{d}_0|/d \quad (1-3)$$

当 $|\mathbf{d}_0| = 0, |\mathbf{r}| = 0$ ，点 A 与原点重合；当 $d = 0, |\mathbf{r}| = +\infty$ ，点 A 在无穷远处。

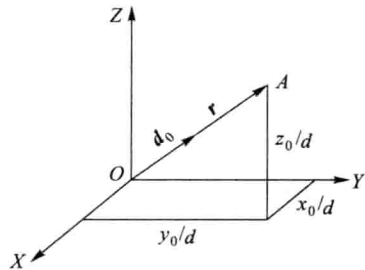


图 1-1 点的齐次坐标

1-1-2 直线的矢量方程

空间有两个点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, 如图 1-2 所示。若按一定的顺序连接这两点, 就决定了一条空间直线的位置和方向, 这条有向的直线段可由矢量 S 表示。在直角坐标系中, S 与其 3 个分量的关系为

$$S = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \quad (1-4)$$

如果令 $x_2 - x_1 = L$

$$y_2 - y_1 = M$$

$$z_2 - z_1 = N$$

代入式(1-4), 则此有向直线段为

$$S = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k} \quad (1-5)$$

两点之间的距离或直线段的长度为

$$|S| = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \quad (1-6)$$

设

$$\begin{aligned} l &= L/|S| \\ m &= M/|S| \\ n &= N/|S| \end{aligned} \quad (1-7)$$

L, M, N 是有向线段 S 的方向数, 而 l, m, n 是 S 的方向余弦。显然 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 。若给定直线方向, 直线在空间的位置可通过直线上某点的矢量 r_1 给定。这样, 这条直线的矢量方程可以写为

$$(r - r_1) \times S = 0$$

再进一步改写就成为直线的标准形式

$$r \times S = S_0 \quad (1-8)$$

其中 S_0 为直线的位置矢量 r_1 与矢量 S 的叉积

$$S_0 = r_1 \times S \quad (1-9)$$

它称为矢量 S 对原点的线矩 (moment of line)。线矩也是矢量, 其大小及方向与矢量 S 和 r_1 的大小以及它们相对坐标系在空间的方向位置有关。若 S 是单位矢量, $S \cdot S = 1$, 则线矩 S_0 的模表示直线到原点的距离。 S 是方向余弦, 没有单位, S_0 却具有长度单位。当矢量 S 过原点, 其线矩为零, $S_0 = 0$ 。当 S 及 S_0 给定后, 直线在空间的方向及位置都被确定, 而且它们是一一对应的。显然, 矢量 S 与其对原点之线矩是互为正交的, $S \cdot S_0 = 0$ 。

决定直线的矢量方程中的两个参数 S 及 S_0 也是齐次坐标, 因为以标量 λ

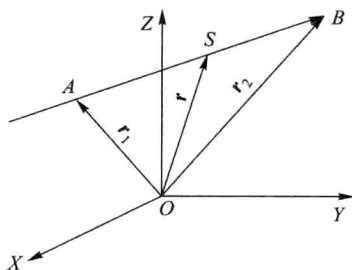


图 1-2 直线的矢量方程

构成的 λS 及 λS_0 代入式(1-8), 所表示的仍是同一条直线。只是直线段有不同的长度。这种满足正交条件的齐次坐标 $(S; S_0)$ 表示了直线在空间的位置及方向, $(S; S_0)$ 称为直线的 Plücker 坐标, 或 Plücker 线坐标。空间中的直线与其 Plücker 坐标 $(S; S_0)$ 是一一对应的。两个矢量的如此结合也称对偶矢量, S 为对偶矢量的原部(real unit); S_0 为对偶矢量的对偶部(dual unit)。式(1-8)中 S_0 表示的叉积, $S_0 = r_1 \times S$, 如写为行列式形式, 为

$$S_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ L & M & N \end{vmatrix}$$

行列式展开, 有

$$S_0 = Pi + Qj + Rk \quad (1-10)$$

其中 P 、 Q 、 R 为

$$\begin{aligned} P &= y_1 N - z_1 M \\ Q &= z_1 L - x_1 N \\ R &= x_1 M - y_1 L \end{aligned} \quad (1-11)$$

同样, 将式(1-8)左边的叉积也展开, 并将式(1-11)代入, 得到空间直线方程的代数式

$$\begin{aligned} yN - zM - P &= 0 \\ zL - xN - Q &= 0 \\ xM - yL - R &= 0 \end{aligned}$$

因为直线 S 与其线矩为正交, $S \cdot S_0 = 0$, 故由式(1-5)及式(1-10)有

$$LP + MQ + NR = 0 \quad (1-12)$$

直线的 Plücker 坐标 $(S; S_0)$ 中的两个矢量 S 和 S_0 都可以用直角坐标系的 3 个分量表示, 这样 Plücker 坐标的标量形式即为 $(L, M, N; P, Q, R)$, L 、 M 、 N 是有向线段 S 的方向数, P 、 Q 、 R 是该线段 S 对原点的线矩在 X 、 Y 、 Z 三轴的分量。因为这 6 个量 L 、 M 、 N 、 P 、 Q 、 R 之间存在关系式(1-12), 所以 6 个分量中只有 5 个是独立的。在三维空间中就有 ∞^5 条不同方向、位置和长度的有向线段。从式(1-8)也可以看到, 该直线方程取决于两矢量 S 和 r 的 5 个独立的参数。

从上面可以看到, 直线可以用式(1-8)的矢量方程表示, 也可以用 Plücker 坐标 $(S; S_0)$ 或 $(L, M, N; P, Q, R)$ 表示。此外, 表示直线的对偶矢量还可以写成 $(S + \epsilon S_0)^{[13]}$, 其中 ϵ 被称为对偶标识符(Clifford factor), 且有 $\epsilon^2 = \epsilon^3 = \dots = 0$ 。这里最重要的是这两个矢量 S 和 S_0 决定了一条直线在空间的方向和位置。 $(S; S_0)$ 唯一地对应空间的一条直线, 而空间的一条直线也唯一地对

应一组对偶矢量 $(S; S_0)$ ，它们具有一一对应的性质。

例如 $(l m n; 0 0 0)$ 为过原点的直线，方向余弦为 $(l m n)$ ； $(l 0 0; 0 a b)$ 为一条不过原点平行于 X 轴的空间直线； $(l m n; p q r)$ ，且 $lp + mq + nr = 0$ ，是一条不过原点，方向为 $(l m n)$ 的直线。

若有过原点的矢量 P 垂直相交于直线 $(S; S_0)$ ，如图 1-3 所示，则矢量 OP 的模 $|P|$ 是从原点 O 到直线的距离，由于矢量 P 的端点在直线 S 上，满足直线方程(1-8)，即 $P \times S = S_0$ 。将此等式两边左面叉乘 S ，有 $S \times (P \times S) = S \times S_0$ ，展开左边矢量的三重叉积，有

$$S \times (P \times S) = (S \cdot S)P - (S \cdot P)S = (S \cdot S)P$$

解出 P ，有

$$P = \frac{S \times S_0}{S \cdot S} \quad (1-13)$$

因为直线 S 与线矩相互垂直，上式可写为

$$P = \frac{|S| |S_0|}{|S| |S|} e = \frac{|S_0|}{|S|} e$$

这里 e 是单位矢量，其方向由 $S \times S_0$ 决定，这样直线 S 到原点的距离 $|P|$ 为

$$|P| = \frac{|S_0|}{|S|} \quad (1-14)$$

由式(1-14)可知，当 $S_0 = 0$ ，则 $|P| = 0$ ，直线到原点的距离为零，即直线过原点。此时直线的 Plücker 坐标可写为 $(S; 0)$ ，或 $(l m n; 0 0 0)$ 。反之，若 Plücker 坐标的前 3 个标量为零，即当 $S = 0$ ，而 $|S_0|$ 为有限值时， $|P| = \infty$ ，此时直线位于距原点无穷远的平面上，写成 Plücker 线坐标是 $(0; S_0)$ 。因为，此时对于任何选择的原点，无穷远处的一个无穷小的矢量，它对原点的线矩皆为 S_0 。 S_0 与原点位置选择无关，这说明 $(0; S_0)$ 成为自由矢量。这就是说，若直线的 Plücker 坐标的第一个矢量为零，表示该直线位于无穷远处。通常自由矢量记为 $(0; S)$ 。

1-1-3 平面的矢量方程

若矢量 $n(L, M, N)$ 表示了平面的法线，如图 1-4 所示，平面又通过空间某已知点 $r_1(x_1, y_1, z_1)$ ，此时平面的矢量方程可以表示为 $(r - r_1) \cdot n = 0$ 。这个

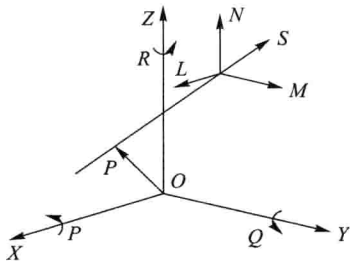


图 1-3 直线到原点的距离

方程可以改写成平面的标准形式

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = n_0 \quad (1-15)$$

其中标量

$$n_0 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = x_1 L + y_1 M + z_1 N$$

是点的位置矢量与平面的单位法矢的点积。显然, n_0 的大小与矢量 \mathbf{n} 的大小、方向以及平面对坐标系的相对位置 \mathbf{r}_1 有关。由式(1-15)可知, $(\mathbf{n}; n_0)$ 是平面的齐次坐标, 因为 $(\lambda \mathbf{n}; \lambda n_0)$ 表示的是同一个平面。

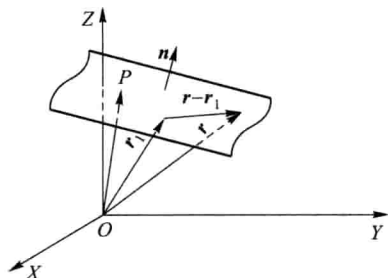


图 1-4 平面的矢量方程

平面的齐次坐标 $(\mathbf{n}; n_0)$ 也可表示为 x_1, x_2, x_3, x_4 。这样平面的齐次方程为

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

由于 \mathbf{n} 和 n_0 决定 3 个独立变量, 故在三维空间有 ∞^3 个平面。若平面到原点的距离用 $|\mathbf{P}|$ 表示, \mathbf{P} 与 \mathbf{n} 平行, 故 $\mathbf{P} \times \mathbf{n} = 0$ 。

以 \mathbf{n} 左面叉乘上式

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{n}) = 0$$

展开

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{P} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})\mathbf{n} = 0$$

所以

$$\mathbf{P} = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})\mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{n_0 \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

这样平面至原点的距离为

$$|\mathbf{P}| = \frac{|n_0 \mathbf{n}|}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{|n_0|}{|\mathbf{n}|} \quad (1-16)$$

故平面至原点的距离等于 n_0 的绝对值除以法矢的模。若 $n_0 = 0$, 则平面过原点, 齐次坐标为 $(\mathbf{n}; \mathbf{0})$; 若 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, 平面在无穷远处, 齐次坐标为 $(\mathbf{0}; n_0)$ 。若 \mathbf{n} 是单位矢量, 则 n_0 是原点到平面的距离。

空间一条直线与该直线外一点也能决定一个平面。若有点 A , 其位置矢量为 \mathbf{r}_0 ; 空间另有一条直线, 其方程为 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_{01}$, 如图 1-5 所示, 这里 \mathbf{r}_1 为直线上的

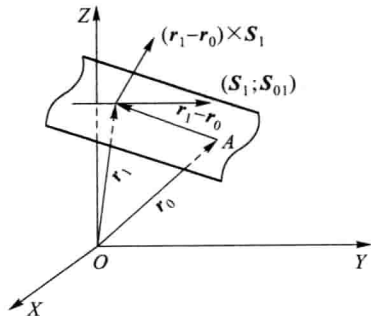


图 1-5 点和直线决定一平面

动点。显然，矢量 S_1 和 $(r_1 - r_0)$ 都在由该直线和点 A 所决定的平面内，因此这个平面的法线矢量可由叉积 $(r_1 - r_0) \times S_1$ 决定。这样该平面可用如下方程表示：

$$(r - r_1) \cdot (r_1 - r_0) \times S_1 = 0$$

展开上式左边，因为 $r_1 \cdot (r_1 \times S_1) = 0$ 有

$$r \cdot (r_1 - r_0) \times S_1 = -r_1 \cdot r_0 \times S_1$$

将 $r_1 \times S_1 = S_{01}$ 代入上式后得到平面方程：

$$r \cdot (S_{01} - r_0 \times S_1) = r_0 \cdot S_{01} \quad (1-17)$$

此平面方程表示成齐次坐标为 $(S_{01} - r_0 \times S_1; S_{01} \cdot r_0)$ 。如果点 A 在这条已知的直线 S_1 上，则 $r_0 \times S_1 = S_{01}$ 、 $S_{01} \cdot r_0 = 0$ 。这样，平面的齐次坐标的两项都等于零，当然这样的条件不能确定一个平面。

比较点、线、面的齐次坐标，可以看到其形式是很相近的。点、线、面的齐次坐标分别为 $(d; d_0)$ 、 $(S; S_0)$ 、 $(n; n_0)$ 。点、线、面至原点距离则分别为

$$\frac{|d_0|}{|d|}; \frac{|S_0|}{|S|}; \frac{|n_0|}{|n|}$$

1-2 点、线、面的相互关系及两直线的互矩

1-2-1 直线与平面的交点

若空间有一直线及一平面，如图 1-6 所示，它们的方程分别为

$$r \times S_1 = S_{01} \quad (1-18)$$

$$r \cdot S_2 = S_{02} \quad (1-19)$$

式中， S_1 是直线的方向矢量， S_{01} 是直线对原点的线矩； S_2 是平面的法线矢

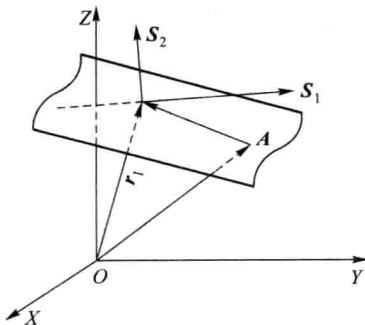


图 1-6 直线与平面的交点