線性代數 第二版

Linear Algebra

容志輝 著

線性代數 第二版

Linear Algebra

容志輝 著

五南圖書出版公司 印行

國家圖書館出版品預行編目資料

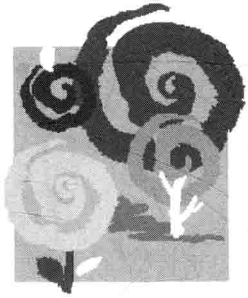
線性代數／容志輝著. ——二版. ——臺北市：五南, 2012.10

面； 公分

ISBN 978-957-11-6777-0（平裝）

1.線性代數

313.3　　101014860



5BC3

線性代數

作　　者— 容志輝

發 行 人— 楊榮川

總 編 輯— 王翠華

主　　編— 穆文娟

責任編輯— 楊景涵

封面設計— 簡愷立

出 版 者— 五南圖書出版股份有限公司

地　　址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電　　話：(02)2705-5066　　傳　　真：(02)2706-6100

網　　址：http://www.wunan.com.tw

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

劃撥帳號：01068953

戶　　名：五南圖書出版股份有限公司

台中市駐區辦公室/台中市中區中山路6號

電　　話：(04)2223-0891　　傳　　真：(04)2223-3549

高雄市駐區辦公室/高雄市新興區中山一路290號

電　　話：(07)2358-702　　傳　　真：(07)2350-236

法律顧問　元貞聯合法律事務所　張澤平律師

出版日期　2007年 9 月初版一刷

　　　　　2012年10月二版一刷

定　　價　新臺幣380元

二版序

本書出版以來, 即受到學生廣大的迴響, 筆者對此十分感激。在第二版中, 整本書的架構不變, 除了將初版中的一些排版錯誤予以更正, 並改善初版中印刷不清的圖, 筆者也加入了一些新的習題以幫助同學了解教材的內容; 筆者亦重新設計了許多計算習題的數值, 希望可以讓同學在不借助於任何電腦系統下, 能以合理的計算量完成習題。最重要的是爲了讓讀者更易於掌握教材的內容。同時, 筆者及其研究生吳柏鋒博士編撰了一本學習手册(五南出版), 書中所有習題的答案都可以在學習手册中找到。

完書之際, 特別要感謝博士生王堅鏻以及研究助理何詩凱在cwTEX文書處理、繪圖、與全書排版上的構思與付出。另外要感謝海洋大學電機工程學系大學部的學生, 在與他們持續的討論之中, 筆者亦反覆修改證明的方法, 增加計算的細節, 期望本書能夠更易於閱讀。

筆者才疏學淺, 謬誤難免, 尚祈讀者不吝指正。

容志輝　　謹識於國立台灣海洋大學電機系

初版序

線性代數經常與微積分並列為學習數學最基礎的兩門入門課, 並被各大學理工科系列為必修課, 其應用遍及各領域, 重要性不言可喻。

此書是根據筆者過去十多年來開授線性代數與高等線性代數之講義撰寫而成, 適合大專院校三或六學分教科書或參考自修研習。內容由淺入深, 取材廣泛豐富。

全書共分六章, 第一章主要複習矩陣基本理論, 包括矩陣基本運算、行列式、高斯消去法、解聯立方程組等相關預備知識。線性代數主要在研究向量空間之間的線性映射, 而定義在有限維度向量空間上之線性映射所成之空間同構於矩陣空間, 故矩陣在線性代數中扮演舉足輕重之關鍵角色。因此, 熟悉矩陣理論有助於後面章節之學習。

數學上常會遇到許多元素彼此相加或是乘上一個純量(實數)的情況, 譬如實數系或複數系本身, 或是實值函數, 還有n維空間裡的向量或是相同階數的矩陣等等都是常見的例子。上述的例子儘管各個元素看似不同, 其實它們都具有共通的代數結構, 此種代數結構是線性代數裡最基本的結構, 稱為向量空間。每個向量空間主要由兩個集合和兩種代數運算所組成, 在第二章2.2節裡我們首先介紹其中的一個集合, 它是由所有的純量所組成, 稱為體。2.3節介紹向量空間的定義與向量空間基本性質, 2.4節研究在何種條件下, 向量空間的子集亦會是向量空間。2.5節以後到2.7節, 我們會在向量空間中引入一個非常重要的

幾何概念: 維度。有了維度的概念, 在2.8節中我們將任一有限維度的向量空間分解成數個子空間的和集。在2.9節, 我們將引入商集的概念, 定義商空間並推導一些重要性質。

在這三章裡, 我們將研究定義在兩向量空間之間的線性映射。首先在3.2節中, 我們介紹一些集合間映射的基本定義與性質。3.3節介紹線性映射的定義。我們將會發現, 線性映射是一種保留代數運算的映射。3.4節介紹線性映射相關的一些基本空間, 並介紹維度定理。3.5節中, 我們利用同構映射在所有有限維度向量空間的集合上建立一個等價關係。這個等價關係可以讓我們用非負整數去分類所有的有限維度向量空間。在3.6與3.7節中, 我們利用同構映射將向量空間中的向量對應到$\mathbb{F}^n$中的向量, 這使得向量空間之間的線性映射可以對應到一個矩陣, 這個矩陣稱爲該線性映射之代表矩陣。3.8節介紹對偶空間及其基本特性。在3.9節中我們將利用維度定理再度探討商空間的維度。最後, 在3.10節中我們將透過三個同構定理更深入了解商空間的內在結構。

在這四章裡, 我們要研究一個非常重要的議題: 對角化問題。有兩種看似不同的對角化問題, 一是線性算子對角化問題, 另一是方陣對角化問題。在4.2節裡我們將證明這兩種不同型式的對角化問題本質上是等效的。4.3節介紹特徵值與特徵向量的觀念。4.4節提出許多對角化問題有解之充分且(或)必要條件, 並證明對角化問題可歸結成解特徵值與特徵向量的問題。最後4.5節則討論對角化問題在解微分方程組上之應用。

並非所有有限維度向量空間上的線性算子都可以對角化。因此在第五章裡, 我們將繼續深入探討此問題。5.2節首先介紹不變子空間的概念及相關性質。5.3節主題是Cayley − Hamilton定理, 並介紹零化多項式。5.4及5.5節是本書最具特色的兩節, 先討論冪零算子與冪零矩陣, 我們將採用商空間的幾何觀點探索有限維度向量空間上所有特徵多項式可分解之冪零算子之根本結構, 並將向量空間分解爲一群冪零算子循環子空間之直和。藉由將有限維度向量空

間上特徵多項式可分解之線性算子轉換成冪零算子, 我們將證明必存在一組有序基底使得參照此有序基底之代表矩陣爲一個幾近對角矩陣的Jordan標準式, 且除了對角方塊排列次序外, 此Jordan標準式是唯一被決定的, 此即著名的Jordan定理, 也是本章最重要的定理。在最後5.6節將討論最低階的零化多項式存在與唯一性, 及其與Jordan標準式之關聯。

在本書最後一章, 也就是第六章中, 我們將在抽象的向量空間中討論長度以及角度等概念。在6.2節中, 我們定義向量空間上的內積函數, 並以此衍生長度與角度等幾何概念。6.3節與6.4節討論向量對子空間的投影, 這是大家熟知三維空間中向量對平面投影的推廣。6.5節討論內積函數與線性泛涵間的關聯, 6.6節之後, 我們將研究內積空間之間的映射, 並介紹一類特性豐富的算子: 正規算子。本章可作爲進階學習, 如泛函分析等課程之基礎。

全書之編寫採取嚴謹論證手法, 對數理邏輯思考訓練有很大助益。學習一門課, 習題的演練往往可以加強學習的效果。此書自不例外。書中有許多習題用以輔助正文, 在每學習完一章後, 讀者應試著去多做一些習題。習題依難易程度做上標記, (*) 代表基本簡易題, 通常是基本演練題, 所有的學生應該都要會; (**) 代表延伸思考題, 是定理證明或是更進一步應用證明或計算, 大部分學生應該也要會; (***) 代表深入研究題, 程度較好的學生可嘗試去做。筆者認爲唯有透過這些證明的數學思考及反覆推理, 才能眞正體會線性代數之奧妙, 並達事半功倍之學習效果。

書中符號說明如下。純量大多以細體小寫英文字母如a, b, c表示, 少數如特徵值或奇異值以希臘小寫字母λ, μ或σ表示; 向量以粗體小寫英文字母$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$等表示; 矩陣以粗體大寫英文字母$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$等表示; 純量或一般集合間之函數以細體英文字母$f, g, h$或$F, G, H$等表示, 大部分線性映射或線性泛函則分別以粗體大寫英文字母如$\mathbf{L}, \mathbf{M}$及粗體小寫英文字母如$\mathbf{f}, \mathbf{g}$等表示, 少部分具特殊意義的映射則以特定的希臘字母ϕ, ψ, Φ等表示; 集合或向量空間以草體大寫

英文字母如$\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U}$等表示。Kronecker符號以$\delta_{ij}$表示。

此書非一人之力所能完成。特別要感謝我的博士生吳柏鋒, 近十年來無論在研究或教學, 他一直是筆者最佳的夥伴, 教學相長, 亦師亦友, 書中有幾處源自他的文思。另外要感謝博士生王堅鏘在 cwTEX 文書處理、繪圖、與全書排版上的構思與付出, 還要感謝譚如玶在打字上的幫忙。最後要感謝我的家人, 由於他們的愛與支持, 得以完成此書, 也才讓一切的努力變得更有意義。

筆者才疏學淺, 謬誤難免, 尚祈讀者不吝指正。

容志輝　　謹識於國立台灣海洋大學電機系

本文目錄

第 1 章

預備知識

1.1 前言

相信讀者在中學數學課程裡都學過矩陣的基本運算及其相關重要性質, 爲了讀者方便及往後章節符號上之預設, 在本書的頭一章我們將很快地複習一下矩陣基本理論, 包括矩陣加乘法的基本運算、行列式、高斯消去法解聯立方程組等相關預備知識。線性代數主要在研究向量空間與向量空間之間的線性映射, 而定義在有限維度向量空間上之線性映射所成之空間同構於矩陣空間, 故矩陣在線性代數中扮演舉足輕重之關鍵角色。是故, 即使讀者已熟悉本章中之內容, 雖可略過本章直接從下一章開始研讀, 但筆者仍強烈建議至少能快速瀏覽本章內容, 將有助於後面章節之學習。

1.2 矩陣

本書談及的數或純量指的是有理數、實數或複數, 或是更一般的域; 有關域的定義詳見第2.2節。由m乘n個數構成m個列, n個行之陣列, 稱做大小或階數

爲$m \times n$之矩陣 (matrix), 常記作

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

或簡記成$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$或是$\mathbf{A} = [a_{ij}]$。$a_{ij}$稱做是矩陣$\mathbf{A}$的第$i$列、第$j$行元素 (element), 或簡稱第$(i, j)$個元素。

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

稱爲$\mathbf{A}$的第i列,

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

則稱爲$\mathbf{A}$的第j行。當$m = n$時, $\mathbf{A}$稱爲是一個方陣 (square matrix), 當$m = 1$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$(省略另一下標不寫) 稱爲列向量 (row vector), 當$n = 1$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$稱爲行向量 (column vector)。爲節省篇幅, 行向量常又寫成$(a_1\, a_2\, \cdots\, a_m)$。請不要將$[a_1\, a_2\, \cdots\, a_n]$與$(a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$混淆, 前者是列向量, 後者是行向量$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$的方便記法。除非特別說明, 否則本書所指的都是行向量。

行向量以$(a_1\, a_2\, \cdots\, a_m)$記之有其方便之處。譬如, $\mathbb{R}^n$表所有的行向量$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$所組成之集合, $a_i \in \mathbb{R}$。也就是

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} | a_i \in \mathbb{R},\, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

可寫成

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1\, a_2\, \cdots\, a_n) | a_i \in \mathbb{R},\, i = 1, 2, \cdots, n\}。$$

另一例, 微積分裡常遇到的多變數函數$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$可以記作$f((x_1\, x_2\, \cdots\, x_n))$或簡寫成$f(x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)$。

若有兩個矩陣$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B} = [b_{ij}]_{p\times q}$, 當$m = p, n = q$且$a_{ij} = b_{ij}$時, 則說$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$相等, 記作$\mathbf{A} = \mathbf{B}$; 若$\mathbf{A}$與$\mathbf{B}$不相等, 則記作$\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$。

一個矩陣$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$乘上一純量$k$得到另一個新的矩陣, 記作$k\mathbf{A}$, 定義爲$k\mathbf{A} = [ka_{ij}]_{m\times n}$。例如, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, 則

$$3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -9 & -3 & 15 \end{bmatrix}。$$

兩個大小相同的矩陣$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}, \mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$可以相加 (或相減), 其和 (或差) 定義爲 $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$。如$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, 則$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 11 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$。

命題 1.1 設$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$均為$m \times n$之矩陣, a, b是任意純量, 則下列性質成立。

1. (交換性) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$。
2. (結合性) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \triangleq \mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$。
3. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$。
4. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$。
5. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$。

證明: 所有的性質均源自純量相對應的性質。 ■

所有元素均為0之矩陣稱為零矩陣 (zero matrix), 記成

$$\mathbf{0}_{m\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} 。$$

當大小$m \times n$不致混淆的情況下, 下標$m \times n$常省略不寫。零矩陣是矩陣加法的單位元素, 換言之, 對任意相同大小之矩陣$\mathbf{A}$, 恆有

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}。$$

$(-1)\mathbf{A}$又常寫成$-\mathbf{A}$, 它是$\mathbf{A}$的加法反元素:

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0}。$$

當$\mathbf{A}$行的個數等於$\mathbf{B}$列的個數時, $\mathbf{AB}$可以相乘, 設$\mathbf{A}$為$m \times n$矩陣, $\mathbf{B}$為$n \times l$矩陣, 則其乘積$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \triangleq [c_{ij}]$是一個$m \times l$矩陣, 其定義為

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}。$$