江苏省精品教材配套用书

工科数学
案例与练习

主 编 杨 军

■案例分析

■随堂练习

■自测练习

南京大学出版社

工科数学案例与练习

江苏省精品教材配套用书

工科数学
案例与练习

主 编 杨 军

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学案例与练习 / 杨军主编. — 南京 : 南京大学出版社, 2013.5

ISBN 978-7-305-11453-3

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 098747 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　邮　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 工科数学案例与练习
主　　编 杨　军
责任编辑 耿士祥　沈　洁　　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 扬州江扬印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 13.25　字数 316 千
版　　次 2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-11453-3
定　　价 24.00 元

发行热线 025-83594756
电子邮箱 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　言

本书的编写以高职院校的人才培养目标为依据，针对工科高职学生学习的特点，结合编者多年教学实践，紧紧围绕“数学为基，工程为用”的原则进行设计.

本书共分为十二个单元，每个单元包括三个部分.

一是案例分析，在每个单元前面，结合工程应用中的实例，讲解数学建模的方法，进一步阐明了数学建模和用数学解决几何、物理和工程等实际问题的方法与技巧.

二是随堂练习，按照教材顺序，以“三讲一练”配置了适量的随堂练习题.随堂练习题的题型有填空题，选择题，计算题和应用题.选题力求使读者理解和掌握高等数学的基本理论和常用的计算方法，初步受到用数学方法解决几何、物理和工程等实际问题的能力训练.

三是自测练习，精选了能反映本单元知识综合运用的一定数量题目.读者通过做自测练习，能巩固本单元所学知识，进一步提高综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力.

本书的编写分工为：陆峰（函数、极限与连续单元，向量代数与空间解析几何单元，线性代数初步单元），杨军（一元函数微分学及应用单元，傅里叶级数与积分变换单元，多元函数微分学及应用单元，多元函数积分学及应用单元），俞金元（常微分方程单元，无穷级数单元），盛秀兰（一元函数积分学及应用单元，概率论与数理统计初步单元），凌佳（图论初步单元）.本书由杨军修改、统稿、定稿.

本书的出版得到江苏城市职业学院公共基础课部、教务处以及南京大学出版社的大力支持，在此谨表示衷心感谢.

限于编者水平，加上时间仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生和读者批评指正.

编　者

2013 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限与连续案例与练习

> 本章的内容主要是函数、极限与连续.
>
> 函数部分的基本内容：函数概念，基本初等函数，反函数，复合函数，分段表示的函数，初等函数.
>
> 极限部分的基本内容：数列极限、函数极限、左右极限，无穷小量与无穷大量，无穷小量的性质和无穷小量的比较，极限的四则运算，两个重要极限.
>
> 连续部分的基本内容：函数在一点连续，左右连续，连续函数，间断点及其分类，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.
>
> 为了帮助大家更好地理解、掌握和应用这些内容，我们编写了下面的案例与练习.

案例 1.1[**水池注水问题**]某工厂有一水池，其容积为 100 立方米，原有水 10 立方米，现在每分钟注入 0.5 立方米的水，试将池中的水的体积表示为时间 t 的函数，并问需多少分钟水池才能灌满？

解：函数为 $y=10+0.5t$，水池灌满的时间为 $t=\dfrac{100-10}{0.5}=180$(分钟).

案例 1.2[**河面上水流速度问题**]在宽为 $2R$ 的河面上，任一点处的流速与该点到两岸距离之积成正比. 已知河道中心线处水的流速为 v_0，求河面上距河道中心线 r 处水流的流速 v.

解：在河面上距河道中心线 r 的点处，到两岸的距离分别为 $R-r$ 和 $R+r$(如图 1.1)，根据题意可知，该点处的流速为

$$v(r)=k(R-r)(R+r)=k(R^2-r^2).$$

因为在河道中心线处水的流速为 v_0，即 $v(0)=v_0$，由此可求得

$$k=\frac{v_0}{R^2}.$$

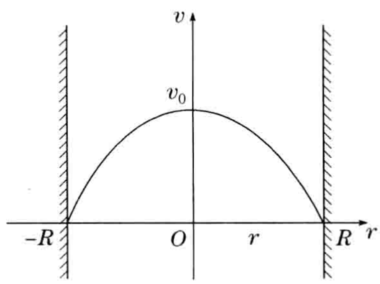

图 1.1

代入上式可求得距河道中心线 r 处水流的流速 v 为

$$v(r)=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),-R\leqslant r\leqslant R.$$

案例 1.3[**钢珠测内径问题**]有一种测量中空工件内径的方法，就是用半径为 R 的钢珠放在圆柱形内孔上，只要测得了钢珠顶点与工件端面之间的距离为 x，就可以求出工件内孔的半径 y. 试求出 y 与 x 之间的函数表达式. 这里的工件端面是指垂直于内孔圆柱面中心轴的平面.

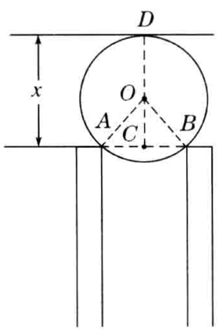

图 1.2

解：在图 1.2 中，可以看出

$$OC=DC-DO=x-R.$$

根据勾股定理有

$$y = AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - (x-R)^2}$$
$$= \sqrt{2Rx - x^2}.$$

这里函数的自然定义域是 $0 \leqslant x \leqslant 2R$，但是与实际意义不完全相符，所以应该按照实际意义重新确定其实际定义域是 $0 < x < 2R$.

案例 1.4[曲柄连杆驱动机构问题]如图 1.3 所示是一个曲柄连杆驱动机构，其中曲柄 OA 长 r，连杆 AB 长 $l(>2r)$. 当曲柄 OA 绕点 O 以匀角速度 ω（弧度/秒）旋转时，使连杆 AB 推动滑块 B 沿直线 PQ 来回滑动，求滑块 B 的运动规律.

解：以 O 为坐标原点，OPQ 方向为正向建立坐标轴 x，则在时刻 t，有

$$A = (r\cos\omega t, r\sin\omega t).$$

设 N 为点 A 在 x 轴上的投影，则

$$ON = r\cos\omega t, AN = r\sin\omega t.$$

于是得到滑块 B 的运动规律为

$$x = ON + NB = r\cos\omega t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\omega t}.$$

其定义域为 $t \in [0, +\infty)$.

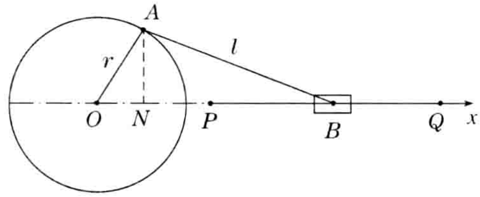

图 1.3

案例 1.5[储油罐尺寸问题]某炼油厂要建造一个容积为 V_0 的圆柱形储油罐，试建立表面积和底半径之间的函数关系.

解：易知储油罐的表面积等于上下底面（都是半径为 r 的圆）面积及侧面（长为 $2\pi r$，高为 h 的矩形）面积之和：

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

又因为 $\pi r^2 h = V_0$，

所以我们得到表面积和底半径之间的函数关系为

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}.$$

其定义域为 $r \in (0, +\infty)$.

案例 1.6[波形函数]脉冲器产生一个单三角脉冲，其波形如图 1.4 所示，电压 U 与时间 $t(t \geqslant 0)$ 的函数关系式为一分段函数，即

$$U = \begin{cases} \dfrac{2E}{\tau}t, & t \in \left[0, \dfrac{\tau}{2}\right], \\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t \in \left(\dfrac{\tau}{2}, \tau\right], \\ 0, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

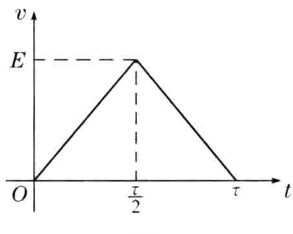

图 1.4

案例 1.7[话费问题]某市私人电话收费标准如下：月租 24 元，如果通话超过 60 次，则超过部分每次收费 0.1 元（假定每次通话时间不超过 3 分钟）.

(1) 写出月电话费 y（元）与通话次数 x 之间的函数关系式；

(2) 某用户两个月通话次数分别为 50 次和 80 次，试求这两个月的电话费.

解：(1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 60$ 时，$y = 24$；当 $x > 60$ 时，超出部分 $(x-60)$ 加收 $0.1(x-60)$ 元，即 $y = 24 + 0.1(x-60)$，于是 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\begin{cases}24, & 0\leqslant x\leqslant 60, x\in\mathbf{N},\\ 24+0.1(x-60), & x>60, x\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

(2) 当 $x=50$ 时，$y=24$(元).

当 $x=80$ 时，$y=24+0.1(80-60)=26$(元).

案例 1.8[邮资费用问题]国内信函(外埠)邮资标准如下：首重 100 g 以内，每重 20 g(不足 20 g 按 20 g 计算)邮资 0.80 元，续重 101～2 000 g，每重 100 g(不足 100 g 按 100 g 计算)邮资 2.00 元. 试建立邮资和信件重量 m 之间的函数关系式，并求信件重量为 60 g 时的邮资.

解：

$$F(m)=\begin{cases}0.8\left\{\left[\dfrac{m}{20}\right]+\operatorname{sgn}\left(\dfrac{m}{20}-\left[\dfrac{m}{20}\right]\right)\right\}, 0<m\leqslant 100,\\ 4+2.00\left\{\left[\dfrac{m-100}{100}\right]+\operatorname{sgn}\left(\dfrac{m-100}{100}-\left[\dfrac{m-100}{100}\right]\right)\right\}, 100<m\leqslant 2\,000.\end{cases}$$

这个函数的定义域是$(0,2\,000]$，值域是$\{F|0.8,1.6,2.4,3.2,4,6,8,10,\cdots,40,42\}$. 其中，符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，又称为取整函数；其中 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ 称为符号函数.

当信件重量为 60 g 时，$F(60)=0.8\left\{\left[\dfrac{60}{20}\right]+\operatorname{sgn}\left(\dfrac{60}{20}-\left[\dfrac{60}{20}\right]\right)\right\}$

$$=0.8\left\{\left[\dfrac{60}{20}\right]+0\right\}=0.8(3+0)=2.4(\text{元}).$$

案例 1.9[生产成本问题]已知生产 x 对汽车挡泥板的成本是 $C(x)=100+\sqrt{1+6x^2}$(元)，则每对的平均成本为$\dfrac{C(x)}{x}$. 当产品产量很大时，求每对汽车挡泥板的大致成本.

解：当产品产量很大时，每对的大致成本是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{C(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100+\sqrt{1+6x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{100}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+6}\right)=\sqrt{6}(\text{元/对}).$$

案例 1.10[产品价格预测]设一产品的价格满足 $P(t)=20-20e^{-0.5t}$(单位：元)，随着时间的推移，产品价格会随之变化，请你对该产品的长期价格做一预测.

解：下面通过求产品价格在 $t\to+\infty$时的极限来分析该产品的长期价格.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}P(t)&=\lim_{t\to+\infty}(20-20e^{-0.5t})=\lim_{t\to+\infty}20-\lim_{t\to+\infty}20e^{-0.5t}\\&=\lim_{t\to+\infty}20-20\lim_{t\to+\infty}e^{-0.5t}=20-0=20(\text{元}).\end{aligned}$$

即该产品的长期价格为 20 元.

案例 1.11[游戏销售]当推出一种新的电子游戏程序时，在短期内销售量会迅速增加，然后开始下降，其函数关系为 $s(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$，$t$ 为月份. (1) 请计算游戏推出后第 6 个月、第 12 个月和第三年的销售量. (2) 如果要对该产品的长期销售做出预测，请建立相应的表达式.

解:(1) $s(6)=\frac{200\times 6}{6^2+100}=\frac{1\ 200}{136}\approx 8.823\ 5$,

$s(12)=\frac{200\times 12}{12^2+100}=\frac{2\ 400}{244}\approx 9.836\ 1$,

$s(36)=\frac{200\times 36}{36^2+100}\approx 5.157\ 6$.

(2) 从上面的数据可以看出,随着时间的推移,该产品的长期销售应为时间 $t\to+\infty$时的销售量,即 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{200t}{t^2+100}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{200}{t+\frac{100}{t}}=0$.

上式说明当时间 $t\to+\infty$时,销售量的极限为 0,即人们购买此游戏的数量会越来越少,从而转向购买新的游戏.

案例 1.12[细菌培养]已知在时刻 t(单位: min),容器中细菌的个数为 $y=10^4\times 2^{kt}$. (1) 若经过 30 min,细菌的个数增加一倍,求 k 值;(2) 预测 $t\to+\infty$时容器中细菌的个数.

解:(1) 因为时刻 t 容器中细菌的个数为 $y=10^4\times 2^{kt}$,

所以经过 30 分钟,即 $t+30$ 时细菌的个数为$10^4\times 2^{k(t+30)}$.

由题意知$10^4\times 2^{k(t+30)}=2\times 10^4\times 2^{kt}$,

解之,得 $k=\frac{1}{30}$.

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty}10^4\times 2^{\frac{1}{30}t}=10^4\times\lim\limits_{t\to+\infty}2^{\frac{1}{30}t}=+\infty$.

由此可知,当时间无限增大时,容器中的细菌个数也无限增大.

案例 1.13[奖励基金问题]建立一项奖励基金,每年年终发放一次,资金总额为 10 万元. 若以年复利率 5%计算,试求若奖金发放永远继续下去,即奖金发放年数 $n\to+\infty$(此时,称永续性奖金,如诺贝尔奖金),基金 P 应为多少?

解:若每年年终奖金为 A,则第 1 年至第 n 年末奖金 A 的现值 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 分别为 $\frac{A}{(1+r)},\frac{A}{(1+r)^2},\frac{A}{(1+r)^3},\cdots,\frac{A}{(1+r)^n}$($r$ 为年利率),显然 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 构成一个公比为 $\frac{1}{1+r}$的等比数列,所以前 n 年奖金的现值之和为

$$P=\frac{A}{(1+r)}+\frac{A}{(1+r)^2}+\frac{A}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}$$

$$=\frac{A}{(1+r)}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{A}{r}\cdot\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right].$$

当奖金的年数永远继续,即 $n\to+\infty$,上述公式中令 $n\to+\infty$,有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{A}{r}\cdot\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]=\frac{A}{r},$$

则永续性奖金的现值为

$$P=\frac{A}{r}=\frac{10}{0.05}=200(万元).$$

案例 1.14[矩形波分析]对于如下的矩形波函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ A, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}\text{其中 }A\neq 0.$$

试讨论在 $x=0$ 处的极限.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}0=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}A=A$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0\neq A=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，

所以，此函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

案例 1.15[电流分析]在一个电路中的电荷量 Q 由下式定义：

$$Q=\begin{cases}C, & t\leqslant 0,\\ Ce^{-\frac{t}{RC}}, & t>0,\end{cases}$$

其中 C、R 为正的常数值. 分析电荷量 Q 在时间 $t\to 0$ 时的极限.

解：因为 $\lim\limits_{t\to 0^-}Q=\lim\limits_{t\to 0^-}C=C$，$\lim\limits_{t\to 0^+}Q=\lim\limits_{t\to 0^+}Ce^{-\frac{t}{RC}}=C$，

所以 $\lim\limits_{t\to 0^-}Q=C=\lim\limits_{t\to 0^+}Q$，

所以 $\lim\limits_{t\to 0}Q=C$.

案例 1.16[电势函数]分布于 y 轴上一点电荷的电势 φ，由以下公式定义：

$$\varphi=\begin{cases}2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}-y), & y<0,\\ 2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}+y), & y\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 σ 和 a 都是正的常数. 问 φ 在 $y=0$ 处连续吗？

解：因为 $\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to 0^-}2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}-y)=2\pi\sigma a$，$\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to 0^+}2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}+y)=2\pi\sigma a$，$\varphi(0)=2\pi\sigma a$.

所以 $\lim\limits_{y\to 0^-}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to 0^+}\varphi(y)=\varphi(0)$，

所以，此函数在 $y=0$ 处连续.

案例 1.17[运费问题]某运输公司规定货物的运费如下：在 a 公里以内，每吨公里 k 元；超过 a 公里，超过部分每吨公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 讨论运费 m 在里程 a 处的连续性.

解：根据题意可列出分段函数如下：

$$m=\begin{cases}ks, & 0<s\leqslant a,\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), & s>a.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{s\to a^-}m(s)=\lim\limits_{s\to a^-}(ks)=ka$，$\lim\limits_{s\to a^+}m(s)=\lim\limits_{s\to a^+}\left[ka+\frac{4}{5}k(s-a)\right]=ka$，$m(a)=ka$，

所以 $\lim\limits_{s\to a^-}m(s)=\lim\limits_{s\to a^+}m(s)=m(a)$，

所以，运费 m 在里程 a 处是连续的.

案例 1.18[停车场收费]一个停车场第一个小时（或不到一小时）收费 3 元，以后每小时（或不到整时）收费 2 元，每天最多收费 10 元. 讨论此函数在 t 时的连续性以及此函数的间断点，并说明其实际意义.

解:设停车场第 t 小时的收费为 y,则

$$y=\begin{cases}3, & 0<t\leqslant 1,\\ 5, & 1<t\leqslant 2,\\ 7, & 2<t\leqslant 3,\\ 9, & 3<t\leqslant 4,\\ 10, & 4<t\leqslant 24.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{t\to 2^+}y=7$, $\lim\limits_{t\to 2^-}y=5$,

所以 $\lim\limits_{t\to 2}y$ 不存在,即函数在 $t=2$ 处不连续.

同理,此函数在 $t=1,2,3,4$ 处间断.

实际意义:由于超过整时后,收费价格会突然增加,因此,在停车时,为节省费用,应尽量控制在整时之内;由于一天的停车费最高价格不超过 10 元,因此,超过 4 小时后,可以不急于取车.

案例 1.19[四脚方椅的稳定问题]众所周知,三条腿的椅子总是能稳定着地的,但四条腿的椅子,在起伏不平的地面上能不能也让它四脚同时着地呢?

解:假设地面是一个连续的曲面,即沿任意方向地面的高度不会出现间断,即地面没有台阶或裂口等情况.

假定椅子是正方形的,它的四条腿长都相等,并记椅子的四脚分别为 A,B,C,D,正方形 $ABCD$ 的中心点为 O,以 O 为原点建立坐标系如图 1.5 所示.

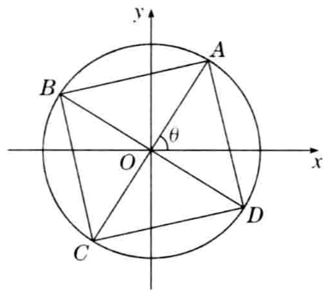

图 1.5

当我们将椅子绕 O 点转动时,用对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 来表示椅子的位置.

记 A,C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$,B,D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$. 容易知道,它的四脚能同时着地的充要条件是 $f(\theta)=g(\theta)$. 当然此时这个正方形平面不一定与水平面平行.

另一方面,根据正方形具有的旋转对称性可知,对于任意的 θ,有

$$f\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=g(\theta),g\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=f(\theta).$$

作辅助函数 $\varphi(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$,则函数 $\varphi(\theta)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续,且有

$$\begin{aligned}\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)&=[f(0)-g(0)]\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[f(0)-g(0)][g(0)-f(0)]\\&=-[f(0)-g(0)]^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

根据闭区间上连续函数的零点定理可知,一定存在 $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,使得 $\varphi(\xi)=0$,即 $f(\xi)=g(\xi)$,这就说明只要转动适当的角度,总能使四条腿的椅子稳定地着地.

案例 1.20[铁丝温度问题]有一圆形铁丝,上面有连续变化着的温度,试证明总存在某条直径,其两端点处的温度相等.

解:设该圆的半径为 R,以该圆的中心 O 为坐标原点,建立坐标系如图 1.6 所示,得到该圆以圆心角 t 为参数的参数方程为

$$x=R\cos t, y=R\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

根据题意条件可知，该圆上 $P=(R\cos t, R\sin t)$ 点处的温度 $f(t)$ 是闭区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数，且有

$$f(0)=f(2\pi).$$

由于任一条直径两端点所对应的参数正好相差 π，所以我们的目标就是要证明：存在一点 $\xi\in[0,\pi]$，使

$$f(\xi)=f(\xi+\pi).$$

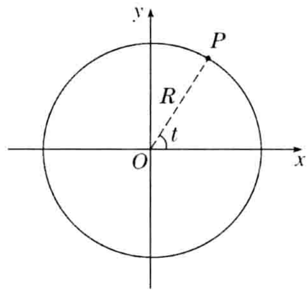

图 1.6

作辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-f(t+\pi)$，显然函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\begin{aligned}\varphi(0)\varphi(\pi)&=[f(0)-f(\pi)][f(\pi)-f(2\pi)]\\&=[f(0)-f(\pi)][f(\pi)-f(0)]\\&=-[f(0)-f(\pi)]^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

根据闭区间上连续函数的零点定理可知，一定存在 $\xi\in[0,\pi]$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+\pi)$，这就得到了所需证明的结论.

姓名__________ 班级学号__________

函数、极限与连续(练习一)

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ 的定义域是__________.

2. 设 $f(x-1)=x^2-2x$,则 $f(x)=$__________.

3. 函数 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数是__________.

4. 曲线 $y=x\cos x$ 关于__________对称.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\leqslant 0, \\ e^x, & x>0, \end{cases}$ 则 $f(0)=$__________.

二、单选题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 设函数 $y=x^2\sin x$,则该函数是( ).

   A. 奇函数　B. 偶函数　C. 非奇非偶函数　D. 既奇又偶函数

2. 函数 $f(x)=x\,\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ 的图形是关于( )对称.

   A. $y=x$　B. x 轴　C. y 轴　D. 坐标原点

3. 设 $f(x+1)=x^2-1$,则 $f(x)=$( ).

   A. $x(x+1)$　B. x^2　C. $x(x-2)$　D. $(x+2)(x-1)$

4. 已知 $f(x)=\ln x, g(x)=x^2$,则复合函数 $f[g(x)]=$( ).

   A. $2\ln x$　B. $\ln x^2$　C. $\ln^2 x$　D. $(\ln|x|)^2$

5. 下列各函数对中,( )中的两个函数相等.

   A. $f(x)=(\sqrt{x})^2, g(x)=x$　B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

   C. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$　D. $f(x)=\ln x^3, g(x)=3\ln x$

三、分解下列各复合函数(每小题 6 分,共 30 分)

1. $y=5^{\cos(x^2)}$.

2. $y=e^{(2x+1)^2}$.

3. $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$.　　　　4. $y=\cos\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.

5. $y=\ln[\tan(x^2+1)^2]$.

四、应用题(每小题 15 分,共 30 分)

1. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & 1\leqslant x<2, \\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4. \end{cases}$

(1) 作函数 $f(x)$的图形,并写出其定义域;(2) 求 $f(0)$,$f(1.2)$,$f(3)$,$f(4)$.

2. 要设计一个容积为 $V=20\pi\ \mathrm{m}^3$ 的有盖圆柱形贮油桶,已知桶盖单位面积造价是侧面的一半,而侧面单位面积造价又是底面的一半. 设桶盖造价为 a(单位:元/m^2),试把贮油桶总造价 p 表示为贮油桶半径 r 的函数.

姓名____________ 班级学号____________

函数、极限与连续(练习二)

一、填空题(每小题4分,共20分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[4+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right]=$____________.

2. $\lim\limits_{x\to0}\cos x=$____________, $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x=$____________.

3. 已知极限 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x+k}{x-2}=3$,则 $k=$____________.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$____________.

5. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$,则 $k=$____________.

二、单选题(每小题4分,共20分)

1. 当 $n\to+\infty$时,下列数列极限存在的是(　　).

A. $(-1)^n\cdot n$　　B. $\dfrac{n+1}{n}$　　C. 2^n　　D. $\sin n$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x\neq0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

3. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在是函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 有极限的(　　).

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

4. 当 $x\to0$ 时,下列变量中为无穷小量的是(　　).

A. $\dfrac{1}{x}$　　B. $\dfrac{\sin x}{x}$　　C. $\ln(1+x)$　　D. $\dfrac{x}{x^2}$

5. 下列各式中正确的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

三、求下列极限(每小题6分,共30分)

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.　　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+6)^7(8x-5)^3}{(5x-1)^{10}}$.