

江苏省精品教材配套用书

工科数学

案例与练习

● 主 编 杨 军



■ 案例分析

■ 随堂练习

■ 自测练习



南京大学出版社

中国工程教育认证标准教材

工科数学

案例与练习

· · · ·



· · · ·

江苏省精品教材配套用书

工科数学 案例与练习

主 编 杨 军



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工科数学案例与练习 / 杨军主编. — 南京: 南京大学出版社, 2013. 5

ISBN 978-7-305-11453-3

I. ①工… II. ①杨… III. ①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 098747 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093

网 址 <http://www.NjupCo.com>

出 版 人 左 健

书 名 工科数学案例与练习

主 编 杨 军

责任编辑 耿士祥 沈 洁 编辑热线 025-83592146

照 排 南京南琳图文制作有限公司

印 刷 扬州江扬印务有限公司

开 本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 316 千

版 次 2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-11453-3

定 价 24.00 元

发行热线 025-83594756

电子邮箱 Press@NjupCo.com

Sales@NjupCo.com(市场部)

* 版权所有,侵权必究

* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

本书的编写以高职院校的人才培养目标为依据,针对工科高职学生学习的特点,结合编者多年教学实践,紧紧围绕“数学为基,工程为用”的原则进行设计.

本书共分为十二个单元,每个单元包括三个部分.

一是案例分析,在每个单元前面,结合工程应用中的实例,讲解数学建模的方法,进一步阐明了数学建模和用数学解决几何、物理和工程等实际问题的方法与技巧.

二是随堂练习,按照教材顺序,以“三讲一练”配置了适量的随堂练习题.随堂练习题的题型有填空题,选择题,计算题和应用题.选题力求使读者理解和掌握高等数学的基本理论和常用的计算方法,初步受到用数学方法解决几何、物理和工程等实际问题的能力训练.

三是自测练习,精选了能反映本单元知识综合运用的一定数量题目.读者通过做自测练习,能巩固本单元所学知识,进一步提高综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力.

本书的编写分工为:陆峰(函数、极限与连续单元,向量代数与空间解析几何单元,线性代数初步单元),杨军(一元函数微分学及应用单元,傅里叶级数与积分变换单元,多元函数微分学及应用单元,多元函数积分学及应用单元),俞金元(常微分方程单元,无穷级数单元),盛秀兰(一元函数积分学及应用单元,概率论与数理统计初步单元),凌佳(图论初步单元).本书由杨军修改、统稿、定稿.

本书的出版得到江苏城市职业学院公共基础课部、教务处以及南京大学出版社的大力支持,在此谨表示衷心感谢.

限于编者水平,加上时间仓促,书中难免有不当之处,敬请广大师生和读者批评指正.

编 者

2013年3月

目 录

第一章 函数、极限与连续案例与练习	1
函数、极限与连续(练习一)	8
函数、极限与连续(练习二)	10
函数、极限与连续(练习三)	12
函数、极限与连续测试题	14
第二章 一元函数微分学及应用案例与练习	16
一元函数微分学及应用(练习一)	22
一元函数微分学及应用(练习二)	24
一元函数微分学及应用(练习三)	26
一元函数微分学及应用(练习四)	29
一元函数微分学及应用(练习五)	31
一元函数微分学及应用测试题(一)	33
一元函数微分学及应用测试题(二)	35
第三章 一元函数积分学及应用案例与练习	38
一元函数积分学及应用(练习一)	45
一元函数积分学及应用(练习二)	47
一元函数积分学及应用(练习三)	49
一元函数积分学及应用(练习四)	52
一元函数积分学及应用(练习五)	54
一元函数积分学及应用测试题(一)	56
一元函数积分学及应用测试题(二)	58
第四章 常微分方程案例与练习	60
常微分方程(练习一)	67
常微分方程(练习二)	69
常微分方程测试题	71
第五章 无穷级数案例与练习	73
无穷级数(练习一)	77
无穷级数(练习二)	79
无穷级数测试题	81
第六章 傅里叶级数与积分变换案例与练习	83
傅里叶级数与积分变换(练习一)	89

傅里叶级数与积分变换(练习二)	91
傅里叶级数与积分变换(练习三)	93
傅里叶级数与积分变换(练习四)	95
傅里叶级数与积分变换测试题	97
第七章 向量代数与空间解析几何案例与练习	100
向量代数与空间解析几何(练习一)	105
向量代数与空间解析几何(练习二)	107
向量代数与空间解析几何测试题	109
第八章 多元函数微分学及应用案例与练习	111
多元函数微分学及应用(练习一)	116
多元函数微分学及应用(练习二)	118
多元函数微分学及应用测试题	120
第九章 多元函数积分学及应用案例与练习	123
多元函数积分学及应用(练习一)	127
多元函数积分学及应用(练习二)	129
多元函数积分学及应用测试题	132
第十章 线性代数初步案例与练习	135
线性代数初步(练习一)	142
线性代数初步(练习二)	145
线性代数初步(练习三)	147
线性代数初步(练习四)	150
线性代数初步测试题	152
第十一章 概率论与数理统计初步案例与练习	155
概率论与数理统计初步(练习一)	163
概率论与数理统计初步(练习二)	166
概率论与数理统计初步(练习三)	169
概率论与数理统计初步(练习四)	172
概率论与数理统计初步测试题	175
第十二章 图论初步案例与练习	178
图论初步(练习一)	184
图论初步(练习二)	186
图论初步测试题	188
参考答案	191
参考文献	205

第一章 函数、极限与连续案例与练习

本章的内容主要是函数、极限与连续.

函数部分的基本内容:函数概念,基本初等函数,反函数,复合函数,分段表示的函数,初等函数.

极限部分的基本内容:数列极限、函数极限、左右极限,无穷小量与无穷大量,无穷小量的性质和无穷小量的比较,极限的四则运算,两个重要极限.

连续部分的基本内容:函数在一点连续,左右连续,连续函数,间断点及其分类,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

为了帮助大家更好地理解、掌握和应用这些内容,我们编写了下面的案例与练习.

案例 1.1[水池注水问题]某工厂有一水池,其容积为 100 立方米,原有水 10 立方米,现在每分钟注入 0.5 立方米的水,试将池中的水的体积表示为时间 t 的函数,并问需多少分钟水池才能灌满?

解:函数为 $y=10+0.5t$,水池灌满的时间为 $t=\frac{100-10}{0.5}=180$ (分钟).

案例 1.2[河面上水流速度问题]在宽为 $2R$ 的河面上,任一点处的流速与该点到两岸距离之积成正比.已知河道中心线处水的流速为 v_0 ,求河面上距河道中心线 r 处水流的流速 v .

解:在河面上距河道中心线 r 的点处,到两岸的距离分别为 $R-r$ 和 $R+r$ (如图 1.1),根据题意可知,该点处的流速为

$$v(r)=k(R-r)(R+r)=k(R^2-r^2).$$

因为在河道中心线处水的流速为 v_0 ,即 $v(0)=v_0$,由此可求得

$$k=\frac{v_0}{R^2}.$$

代入上式可求得距河道中心线 r 处水流的流速 v 为

$$v(r)=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), -R \leq r \leq R.$$

案例 1.3[钢珠测内径问题]有一种测量中空工件内径的方法,就是用半径为 R 的钢珠放在圆柱形内孔上,只要测得了钢珠顶点与工件端面之间的距离为 x ,就可以求出工件内孔的半径 y .试求出 y 与 x 之间的函数表达式.这里的工件端面是指垂直于内孔圆柱面中心轴的平面.

解:在图 1.2 中,可以看出

$$OC=DC-DO=x-R.$$

根据勾股定理有

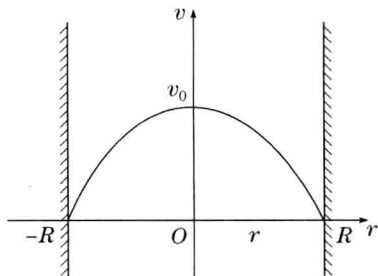


图 1.1

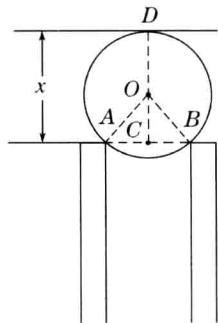


图 1.2

$$y = AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - (x-R)^2} \\ = \sqrt{2Rx - x^2}.$$

这里函数的自然定义域是 $0 \leq x \leq 2R$, 但是与实际意义不完全相符, 所以应该按照实际意义重新确定其实际定义域是 $0 < x < 2R$.

案例 1.4 [曲柄连杆驱动机构问题] 如图 1.3 所示是一个曲柄连杆驱动机构, 其中曲柄 OA 长 r , 连杆 AB 长 $l (> 2r)$. 当曲柄 OA 绕点 O 以匀角速度 ω (弧度/秒) 旋转时, 使连杆 AB 推动滑块 B 沿直线 PQ 来回滑动, 求滑块 B 的运动规律.

解: 以 O 为坐标原点, OPQ 方向为正向建立坐标轴 x , 则在时刻 t , 有

$$A = (r \cos \omega t, r \sin \omega t).$$

设 N 为点 A 在 x 轴上的投影, 则

$$ON = r \cos \omega t, AN = r \sin \omega t.$$

于是得到滑块 B 的运动规律为

$$x = ON + NB = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}.$$

其定义域为 $t \in [0, +\infty)$.

案例 1.5 [储油罐尺寸问题] 某炼油厂要建造一个容积为 V_0 的圆柱形储油罐, 试建立表面积和底半径之间的函数关系.

解: 易知储油罐的表面积等于上下底面 (都是半径为 r 的圆) 面积及侧面 (长为 $2\pi r$, 高为 h 的矩形) 面积之和:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

又因为 $\pi r^2 h = V_0$,

所以我们得到表面积和底半径之间的函数关系为

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V_0}{r}.$$

其定义域为 $r \in (0, +\infty)$.

案例 1.6 [波形函数] 脉冲器产生一个单三角脉冲, 其波形如图 1.4 所示, 电压 U 与时间 t ($t \geq 0$) 的函数关系式为一分段函数, 即

$$U = \begin{cases} \frac{2E}{\tau}t, & t \in [0, \frac{\tau}{2}], \\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & t \in (\frac{\tau}{2}, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, +\infty). \end{cases}$$

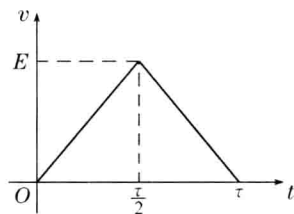


图 1.4

案例 1.7 [话费问题] 某市私人电话收费标准如下: 月租 24 元, 如果通话超过 60 次, 则超过部分每次收费 0.1 元 (假定每次通话时间不超过 3 分钟).

(1) 写出月电话费 y (元) 与通话次数 x 之间的函数关系式;

(2) 某用户两个月通话次数分别为 50 次和 80 次, 试求这两个月的电话费.

解: (1) 当 $0 \leq x \leq 60$ 时, $y = 24$; 当 $x > 60$ 时, 超出部分 $(x-60)$ 加收 $0.1(x-60)$ 元, 即 $y = 24 + 0.1(x-60)$, 于是 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y = \begin{cases} 24, & 0 \leq x \leq 60, x \in \mathbf{N}, \\ 24 + 0.1(x - 60), & x > 60, x \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

(2) 当 $x=50$ 时, $y=24$ (元).

当 $x=80$ 时, $y=24+0.1(80-60)=26$ (元).

案例 1.8[邮资费用问题]国内信函(外埠)邮资标准如下:首重 100 g 以内,每重 20 g(不足 20 g 按 20 g 计算)邮资 0.80 元,续重 101~2 000 g,每重 100 g(不足 100 g 按 100 g 计算)邮资 2.00 元. 试建立邮资和信件重量 m 之间的函数关系式,并求信件重量为 60 g 时的邮资.

解:

$$F(m) = \begin{cases} 0.8 \left\{ \left[\frac{m}{20} \right] + \operatorname{sgn} \left(\frac{m}{20} - \left[\frac{m}{20} \right] \right) \right\}, & 0 < m \leq 100, \\ 4 + 2.00 \left\{ \left[\frac{m-100}{100} \right] + \operatorname{sgn} \left(\frac{m-100}{100} - \left[\frac{m-100}{100} \right] \right) \right\}, & 100 < m \leq 2\,000. \end{cases}$$

这个函数的定义域是 $(0, 2\,000]$, 值域是 $\{F | 0.8, 1.6, 2.4, 3.2, 4, 4.8, 5.6, 6.4, 7.2, 8, 8.8, 9.6, 10.4, 11.2, 12, 12.8, 13.6, 14.4, 15.2, 16, 16.8, 17.6, 18.4, 19.2, 20, 20.8, 21.6, 22.4, 23.2, 24, 24.8, 25.6, 26.4, 27.2, 28, 28.8, 29.6, 30.4, 31.2, 32, 32.8, 33.6, 34.4, 35.2, 36, 36.8, 37.6, 38.4, 39.2, 40, 40.8, 41.6, 42.4, 43.2, 44, 44.8, 45.6, 46.4, 47.2, 48, 48.8, 49.6, 50.4, 51.2, 52, 52.8, 53.6, 54.4, 55.2, 56, 56.8, 57.6, 58.4, 59.2, 60, 60.8, 61.6, 62.4, 63.2, 64, 64.8, 65.6, 66.4, 67.2, 68, 68.8, 69.6, 70.4, 71.2, 72, 72.8, 73.6, 74.4, 75.2, 76, 76.8, 77.6, 78.4, 79.2, 80, 80.8, 81.6, 82.4, 83.2, 84, 84.8, 85.6, 86.4, 87.2, 88, 88.8, 89.6, 90.4, 91.2, 92, 92.8, 93.6, 94.4, 95.2, 96, 96.8, 97.6, 98.4, 99.2, 100, 100.8, 101.6, 102.4, 103.2, 104, 104.8, 105.6, 106.4, 107.2, 108, 108.8, 109.6, 110.4, 111.2, 112, 112.8, 113.6, 114.4, 115.2, 116, 116.8, 117.6, 118.4, 119.2, 120, 120.8, 121.6, 122.4, 123.2, 124, 124.8, 125.6, 126.4, 127.2, 128, 128.8, 129.6, 130.4, 131.2, 132, 132.8, 133.6, 134.4, 135.2, 136, 136.8, 137.6, 138.4, 139.2, 140, 140.8, 141.6, 142.4, 143.2, 144, 144.8, 145.6, 146.4, 147.2, 148, 148.8, 149.6, 150.4, 151.2, 152, 152.8, 153.6, 154.4, 155.2, 156, 156.8, 157.6, 158.4, 159.2, 160, 160.8, 161.6, 162.4, 163.2, 164, 164.8, 165.6, 166.4, 167.2, 168, 168.8, 169.6, 170.4, 171.2, 172, 172.8, 173.6, 174.4, 175.2, 176, 176.8, 177.6, 178.4, 179.2, 180, 180.8, 181.6, 182.4, 183.2, 184, 184.8, 185.6, 186.4, 187.2, 188, 188.8, 189.6, 190.4, 191.2, 192, 192.8, 193.6, 194.4, 195.2, 196, 196.8, 197.6, 198.4, 199.2, 200, 200.8, 201.6, 202.4, 203.2, 204, 204.8, 205.6, 206.4, 207.2, 208, 208.8, 209.6, 210.4, 211.2, 212, 212.8, 213.6, 214.4, 215.2, 216, 216.8, 217.6, 218.4, 219.2, 220, 220.8, 221.6, 222.4, 223.2, 224, 224.8, 225.6, 226.4, 227.2, 228, 228.8, 229.6, 230.4, 231.2, 232, 232.8, 233.6, 234.4, 235.2, 236, 236.8, 237.6, 238.4, 239.2, 240, 240.8, 241.6, 242.4, 243.2, 244, 244.8, 245.6, 246.4, 247.2, 248, 248.8, 249.6, 250.4, 251.2, 252, 252.8, 253.6, 254.4, 255.2, 256, 256.8, 257.6, 258.4, 259.2, 260, 260.8, 261.6, 262.4, 263.2, 264, 264.8, 265.6, 266.4, 267.2, 268, 268.8, 269.6, 270.4, 271.2, 272, 272.8, 273.6, 274.4, 275.2, 276, 276.8, 277.6, 278.4, 279.2, 280, 280.8, 281.6, 282.4, 283.2, 284, 284.8, 285.6, 286.4, 287.2, 288, 288.8, 289.6, 290.4, 291.2, 292, 292.8, 293.6, 294.4, 295.2, 296, 296.8, 297.6, 298.4, 299.2, 300, 300.8, 301.6, 302.4, 303.2, 304, 304.8, 305.6, 306.4, 307.2, 308, 308.8, 309.6, 310.4, 311.2, 312, 312.8, 313.6, 314.4, 315.2, 316, 316.8, 317.6, 318.4, 319.2, 320, 320.8, 321.6, 322.4, 323.2, 324, 324.8, 325.6, 326.4, 327.2, 328, 328.8, 329.6, 330.4, 331.2, 332, 332.8, 333.6, 334.4, 335.2, 336, 336.8, 337.6, 338.4, 339.2, 340, 340.8, 341.6, 342.4, 343.2, 344, 344.8, 345.6, 346.4, 347.2, 348, 348.8, 349.6, 350.4, 351.2, 352, 352.8, 353.6, 354.4, 355.2, 356, 356.8, 357.6, 358.4, 359.2, 360, 360.8, 361.6, 362.4, 363.2, 364, 364.8, 365.6, 366.4, 367.2, 368, 368.8, 369.6, 370.4, 371.2, 372, 372.8, 373.6, 374.4, 375.2, 376, 376.8, 377.6, 378.4, 379.2, 380, 380.8, 381.6, 382.4, 383.2, 384, 384.8, 385.6, 386.4, 387.2, 388, 388.8, 389.6, 390.4, 391.2, 392, 392.8, 393.6, 394.4, 395.2, 396, 396.8, 397.6, 398.4, 399.2, 400, 400.8, 401.6, 402.4, 403.2, 404, 404.8, 405.6, 406.4, 407.2, 408, 408.8, 409.6, 410.4, 411.2, 412, 412.8, 413.6, 414.4, 415.2, 416, 416.8, 417.6, 418.4, 419.2, 420, 420.8, 421.6, 422.4, 423.2, 424, 424.8, 425.6, 426.4, 427.2, 428, 428.8, 429.6, 430.4, 431.2, 432, 432.8, 433.6, 434.4, 435.2, 436, 436.8, 437.6, 438.4, 439.2, 440, 440.8, 441.6, 442.4, 443.2, 444, 444.8, 445.6, 446.4, 447.2, 448, 448.8, 449.6, 450.4, 451.2, 452, 452.8, 453.6, 454.4, 455.2, 456, 456.8, 457.6, 458.4, 459.2, 460, 460.8, 461.6, 462.4, 463.2, 464, 464.8, 465.6, 466.4, 467.2, 468, 468.8, 469.6, 470.4, 471.2, 472, 472.8, 473.6, 474.4, 475.2, 476, 476.8, 477.6, 478.4, 479.2, 480, 480.8, 481.6, 482.4, 483.2, 484, 484.8, 485.6, 486.4, 487.2, 488, 488.8, 489.6, 490.4, 491.2, 492, 492.8, 493.6, 494.4, 495.2, 496, 496.8, 497.6, 498.4, 499.2, 500, 500.8, 501.6, 502.4, 503.2, 504, 504.8, 505.6, 506.4, 507.2, 508, 508.8, 509.6, 510.4, 511.2, 512, 512.8, 513.6, 514.4, 515.2, 516, 516.8, 517.6, 518.4, 519.2, 520, 520.8, 521.6, 522.4, 523.2, 524, 524.8, 525.6, 526.4, 527.2, 528, 528.8, 529.6, 530.4, 531.2, 532, 532.8, 533.6, 534.4, 535.2, 536, 536.8, 537.6, 538.4, 539.2, 540, 540.8, 541.6, 542.4, 543.2, 544, 544.8, 545.6, 546.4, 547.2, 548, 548.8, 549.6, 550.4, 551.2, 552, 552.8, 553.6, 554.4, 555.2, 556, 556.8, 557.6, 558.4, 559.2, 560, 560.8, 561.6, 562.4, 563.2, 564, 564.8, 565.6, 566.4, 567.2, 568, 568.8, 569.6, 570.4, 571.2, 572, 572.8, 573.6, 574.4, 575.2, 576, 576.8, 577.6, 578.4, 579.2, 580, 580.8, 581.6, 582.4, 583.2, 584, 584.8, 585.6, 586.4, 587.2, 588, 588.8, 589.6, 590.4, 591.2, 592, 592.8, 593.6, 594.4, 595.2, 596, 596.8, 597.6, 598.4, 599.2, 600, 600.8, 601.6, 602.4, 603.2, 604, 604.8, 605.6, 606.4, 607.2, 608, 608.8, 609.6, 610.4, 611.2, 612, 612.8, 613.6, 614.4, 615.2, 616, 616.8, 617.6, 618.4, 619.2, 620, 620.8, 621.6, 622.4, 623.2, 624, 624.8, 625.6, 626.4, 627.2, 628, 628.8, 629.6, 630.4, 631.2, 632, 632.8, 633.6, 634.4, 635.2, 636, 636.8, 637.6, 638.4, 639.2, 640, 640.8, 641.6, 642.4, 643.2, 644, 644.8, 645.6, 646.4, 647.2, 648, 648.8, 649.6, 650.4, 651.2, 652, 652.8, 653.6, 654.4, 655.2, 656, 656.8, 657.6, 658.4, 659.2, 660, 660.8, 661.6, 662.4, 663.2, 664, 664.8, 665.6, 666.4, 667.2, 668, 668.8, 669.6, 670.4, 671.2, 672, 672.8, 673.6, 674.4, 675.2, 676, 676.8, 677.6, 678.4, 679.2, 680, 680.8, 681.6, 682.4, 683.2, 684, 684.8, 685.6, 686.4, 687.2, 688, 688.8, 689.6, 690.4, 691.2, 692, 692.8, 693.6, 694.4, 695.2, 696, 696.8, 697.6, 698.4, 699.2, 700, 700.8, 701.6, 702.4, 703.2, 704, 704.8, 705.6, 706.4, 707.2, 708, 708.8, 709.6, 710.4, 711.2, 712, 712.8, 713.6, 714.4, 715.2, 716, 716.8, 717.6, 718.4, 719.2, 720, 720.8, 721.6, 722.4, 723.2, 724, 724.8, 725.6, 726.4, 727.2, 728, 728.8, 729.6, 730.4, 731.2, 732, 732.8, 733.6, 734.4, 735.2, 736, 736.8, 737.6, 738.4, 739.2, 740, 740.8, 741.6, 742.4, 743.2, 744, 744.8, 745.6, 746.4, 747.2, 748, 748.8, 749.6, 750.4, 751.2, 752, 752.8, 753.6, 754.4, 755.2, 756, 756.8, 757.6, 758.4, 759.2, 760, 760.8, 761.6, 762.4, 763.2, 764, 764.8, 765.6, 766.4, 767.2, 768, 768.8, 769.6, 770.4, 771.2, 772, 772.8, 773.6, 774.4, 775.2, 776, 776.8, 777.6, 778.4, 779.2, 780, 780.8, 781.6, 782.4, 783.2, 784, 784.8, 785.6, 786.4, 787.2, 788, 788.8, 789.6, 790.4, 791.2, 792, 792.8, 793.6, 794.4, 795.2, 796, 796.8, 797.6, 798.4, 799.2, 800, 800.8, 801.6, 802.4, 803.2, 804, 804.8, 805.6, 806.4, 807.2, 808, 808.8, 809.6, 810.4, 811.2, 812, 812.8, 813.6, 814.4, 815.2, 816, 816.8, 817.6, 818.4, 819.2, 820, 820.8, 821.6, 822.4, 823.2, 824, 824.8, 825.6, 826.4, 827.2, 828, 828.8, 829.6, 830.4, 831.2, 832, 832.8, 833.6, 834.4, 835.2, 836, 836.8, 837.6, 838.4, 839.2, 840, 840.8, 841.6, 842.4, 843.2, 844, 844.8, 845.6, 846.4, 847.2, 848, 848.8, 849.6, 850.4, 851.2, 852, 852.8, 853.6, 854.4, 855.2, 856, 856.8, 857.6, 858.4, 859.2, 860, 860.8, 861.6, 862.4, 863.2, 864, 864.8, 865.6, 866.4, 867.2, 868, 868.8, 869.6, 870.4, 871.2, 872, 872.8, 873.6, 874.4, 875.2, 876, 876.8, 877.6, 878.4, 879.2, 880, 880.8, 881.6, 882.4, 883.2, 884, 884.8, 885.6, 886.4, 887.2, 888, 888.8, 889.6, 890.4, 891.2, 892, 892.8, 893.6, 894.4, 895.2, 896, 896.8, 897.6, 898.4, 899.2, 900, 900.8, 901.6, 902.4, 903.2, 904, 904.8, 905.6, 906.4, 907.2, 908, 908.8, 909.6, 910.4, 911.2, 912, 912.8, 913.6, 914.4, 915.2, 916, 916.8, 917.6, 918.4, 919.2, 920, 920.8, 921.6, 922.4, 923.2, 924, 924.8, 925.6, 926.4, 927.2, 928, 928.8, 929.6, 930.4, 931.2, 932, 932.8, 933.6, 934.4, 935.2, 936, 936.8, 937.6, 938.4, 939.2, 940, 940.8, 941.6, 942.4, 943.2, 944, 944.8, 945.6, 946.4, 947.2, 948, 948.8, 949.6, 950.4, 951.2, 952, 952.8, 953.6, 954.4, 955.2, 956, 956.8, 957.6, 958.4, 959.2, 960, 960.8, 961.6, 962.4, 963.2, 964, 964.8, 965.6, 966.4, 967.2, 968, 968.8, 969.6, 970.4, 971.2, 972, 972.8, 973.6, 974.4, 975.2, 976, 976.8, 977.6, 978.4, 979.2, 980, 980.8, 981.6, 982.4, 983.2, 984, 984.8, 985.6, 986.4, 987.2, 988, 988.8, 989.6, 990.4, 991.2, 992, 992.8, 993.6, 994.4, 995.2, 996, 996.8, 997.6, 998.4, 999.2, 1000, 1000.8, 1001.6, 1002.4, 1003.2, 1004, 1004.8, 1005.6, 1006.4, 1007.2, 1008, 1008.8, 1009.6, 1010.4, 1011.2, 1012, 1012.8, 1013.6, 1014.4, 1015.2, 1016, 1016.8, 1017.6, 1018.4, 1019.2, 1020, 1020.8, 1021.6, 1022.4, 1023.2, 1024, 1024.8, 1025.6, 1026.4, 1027.2, 1028, 1028.8, 1029.6, 1030.4, 1031.2, 1032, 1032.8, 1033.6, 1034.4, 1035.2, 1036, 1036.8, 1037.6, 1038.4, 1039.2, 1040, 1040.8, 1041.6, 1042.4, 1043.2, 1044, 1044.8, 1045.6, 1046.4, 1047.2, 1048, 1048.8, 1049.6, 1050.4, 1051.2, 1052, 1052.8, 1053.6, 1054.4, 1055.2, 1056, 1056.8, 1057.6, 1058.4, 1059.2, 1060, 1060.8, 1061.6, 1062.4, 1063.2, 1064, 1064.8, 1065.6, 1066.4, 1067.2, 1068, 1068.8, 1069.6, 1070.4, 1071.2, 1072, 1072.8, 1073.6, 1074.4, 1075.2, 1076, 1076.8, 1077.6, 1078.4, 1079.2, 1080, 1080.8, 1081.6, 1082.4, 1083.2, 1084, 1084.8, 1085.6, 1086.4, 1087.2, 1088, 1088.8, 1089.6, 1090.4, 1091.2, 1092, 1092.8, 1093.6, 1094.4, 1095.2, 1096, 1096.8, 1097.6, 1098.4, 1099.2, 1100, 1100.8, 1101.6, 1102.4, 1103.2, 1104, 1104.8, 1105.6, 1106.4, 1107.2, 1108, 1108.8, 1109.6, 1110.4, 1111.2, 1112, 1112.8, 1113.6, 1114.4, 1115.2, 1116, 1116.8, 1117.6, 1118.4, 1119.2, 1120, 1120.8, 1121.6, 1122.4, 1123.2, 1124, 1124.8, 1125.6, 1126.4, 1127.2, 1128, 1128.8, 1129.6, 1130.4, 1131.2, 1132, 1132.8, 1133.6, 1134.4, 1135.2, 1136, 1136.8, 1137.6, 1138.4, 1139.2, 1140, 1140.8, 1141.6, 1142.4, 1143.2, 1144, 1144.8, 1145.6, 1146.4, 1147.2, 1148, 1148.8, 1149.6, 1150.4, 1151.2, 1152, 1152.8, 1153.6, 1154.4, 1155.2, 1156, 1156.8, 1157.6, 1158.4, 1159.2, 1160, 1160.8, 1161.6, 1162.4, 1163.2, 1164, 1164.8, 1165.6, 1166.4, 1167.2, 1168, 1168.8, 1169.6, 1170.4, 1171.2, 1172, 1172.8, 1173.6, 1174.4, 1175.2, 1176, 1176.8, 1177.6, 1178.4, 1179.2, 1180, 1180.8, 1181.6, 1182.4, 1183.2, 1184, 1184.8, 1185.6, 1186.4, 1187.2, 1188, 1188.8, 1189.6, 1190.4, 1191.2, 1192, 1192.8, 1193.6, 1194.4, 1195.2, 1196, 1196.8, 1197.6, 1198.4, 1199.2, 1200, 1200.8, 1201.6, 1202.4, 1203.2, 1204, 1204.8, 1205.6, 1206.4, 1207.2, 1208, 1208.8, 1209.6, 1210.4, 1211.2, 1212, 1212.8, 1213.6, 1214.4, 1215.2, 1216, 1216.8, 1217.6, 1218.4, 1219.2, 1220, 1220.8, 1221.6, 1222.4, 1223.2, 1224, 1224.8, 1225.6, 1226.4, 1227.2, 1228, 1228.8, 1229.6, 1230.4, 1231.2, 1232, 1232.8, 1233.6, 1234.4, 1235.2, 1236, 1236.8, 1237.6, 1238.4, 1239.2, 1240, 1240.8, 1241.6, 1242.4, 1243.2, 1244, 1244.8, 1245.6, 1246.4, 1247.2, 1248, 1248.8, 1249.6, 1250.4, 1251.2, 1252, 1252.8, 1253.6, 1254.4, 1255.2, 1256, 1256.8, 1257.6, 1258.4, 1259.2, 1260, 1260.8, 1261.6, 1262.4, 1263.2, 1264, 1264.8, 1265.6, 1266.4, 1267.2, 1268, 1268.8, 1269.6, 1270.4, 1271.2, 1272, 1272.8, 1273.6, 1274.4, 1275.2, 1276, 1276.8, 1277.6, 1278.4, 1279.2, 1280, 1280.8, 1281.6, 1282.4, 1283.2, 1284, 1284.8, 1285.6, 1286.4, 1287.2, 1288, 1288.8, 1289.6, 1290.4, 1291.2, 1292, 1292.8, 1293.6, 1294.4, 1295.2, 1296, 1296.8, 1297.6, 1298.4, 1299.2, 1300, 1300.8, 1301.6, 1302.4, 1303.2, 1304, 1304.8, 1305.6, 1306.4, 1307.2, 1308, 1308.8, 1309.6, 1310.4, 1311.2, 1312, 1312.8, 1313.6, 1314.4, 1315.2, 1316, 1316.8, 1317.6, 1318.4, 1319.2, 1320, 1320.8, 1321.6, 1322.4, 1323.2, 1324, 1324.8, 1325.6, 1326.4, 1327.2, 1328, 1328.8, 1329.6, 1330.4, 1331.2, 1332, 1332.8, 1333.6, 1334.4, 1335.2, 1336, 1336.8, 1337.6, 1338.4, 1339.2, 1340, 1340.8, 1341.6, 1342.4, 1343.2, 1344, 1344.8, 1345.6, 1346.4, 1347.2, 1348, 1348.8, 1349.6, 1350.4, 1351.2, 1352, 1352.8, 1353.6, 1354.4, 1355.2, 1356, 1356.8, 1357.6, 1358.4, 1359.2, 1360, 1360.8, 1361.6, 1362.4, 1363.2$

解: (1) $s(6) = \frac{200 \times 6}{6^2 + 100} = \frac{1\ 200}{136} \approx 8.823\ 5,$

$$s(12) = \frac{200 \times 12}{12^2 + 100} = \frac{2\ 400}{244} \approx 9.836\ 1,$$

$$s(36) = \frac{200 \times 36}{36^2 + 100} \approx 5.157\ 6.$$

(2) 从上面的数据可以看出, 随着时间的推移, 该产品的长期销售应为时间 $t \rightarrow +\infty$ 时的销售量, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{200t}{t^2 + 100} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{200}{t + \frac{100}{t}} = 0.$

上式说明当时间 $t \rightarrow +\infty$ 时, 销售量的极限为 0, 即人们购买此游戏的数量会越来越少, 从而转向购买新的游戏.

案例 1.12 [细菌培养] 已知在时刻 t (单位: min), 容器中细菌的个数为 $y = 10^4 \times 2^{kt}$. (1) 若经过 30 min, 细菌的个数增加一倍, 求 k 值; (2) 预测 $t \rightarrow +\infty$ 时容器中细菌的个数.

解: (1) 因为时刻 t 容器中细菌的个数为 $y = 10^4 \times 2^{kt}$,

所以经过 30 分钟, 即 $t+30$ 时细菌的个数为 $10^4 \times 2^{k(t+30)}$.

由题意知 $10^4 \times 2^{k(t+30)} = 2 \times 10^4 \times 2^{kt}$,

解之, 得 $k = \frac{1}{30}$.

$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} 10^4 \times 2^{\frac{1}{30}t} = 10^4 \times \lim_{t \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{30}t} = +\infty.$$

由此可知, 当时间无限增大时, 容器中的细菌个数也无限增大.

案例 1.13 [奖励基金问题] 建立一项奖励基金, 每年年终发放一次, 资金总额为 10 万元. 若以年复利率 5% 计算, 试求若奖金发放永远继续下去, 即奖金发放年数 $n \rightarrow +\infty$ (此时, 称永续性奖金, 如诺贝尔奖金), 基金 P 应为多少?

解: 若每年年终奖金为 A , 则第 1 年至第 n 年末奖金 A 的现值 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 分别为 $\frac{A}{(1+r)}, \frac{A}{(1+r)^2}, \frac{A}{(1+r)^3}, \dots, \frac{A}{(1+r)^n}$ (r 为年利率), 显然 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 构成一个公比为 $\frac{1}{1+r}$ 的等比数列, 所以前 n 年奖金的现值之和为

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \dots + \frac{A}{(1+r)^n} \\ &= \frac{A}{(1+r)} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}} \\ &= \frac{A}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right]. \end{aligned}$$

当奖金的年数永远继续, 即 $n \rightarrow +\infty$, 上述公式中令 $n \rightarrow +\infty$, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A}{r} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right] = \frac{A}{r},$$

则永续性奖金的现值为

$$P = \frac{A}{r} = \frac{10}{0.05} = 200 \text{ (万元)}.$$

案例 1.14[矩形波分析]对于如下的矩形波函数:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ A, & 0 \leq x < \pi, \end{cases} \text{ 其中 } A \neq 0.$$

试讨论在 $x=0$ 处的极限.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} A = A$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$,

所以,此函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

案例 1.15[电流分析]在一个电路中的电荷量 Q 由下式定义:

$$Q = \begin{cases} C, & t \leq 0, \\ Ce^{-\frac{t}{RC}}, & t > 0, \end{cases}$$

其中 C, R 为正的常数值. 分析电荷量 Q 在时间 $t \rightarrow 0$ 时的极限.

解: 因为 $\lim_{t \rightarrow 0^-} Q = \lim_{t \rightarrow 0^-} C = C$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} Q = \lim_{t \rightarrow 0^+} Ce^{-\frac{t}{RC}} = C$,

所以 $\lim_{t \rightarrow 0^-} Q = C = \lim_{t \rightarrow 0^+} Q$,

所以 $\lim_{t \rightarrow 0} Q = C$.

案例 1.16[电势函数]分布于 y 轴上一点电荷的电势 φ , 由以下公式定义:

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}-y), & y < 0, \\ 2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}+y), & y \geq 0, \end{cases}$$

其中 σ 和 a 都是正的常数. 问 φ 在 $y=0$ 处连续吗?

解: 因为 $\lim_{y \rightarrow 0^-} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} 2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}-y) = 2\pi\sigma a$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 2\pi\sigma(\sqrt{y^2+a^2}+y) = 2\pi\sigma a$, $\varphi(0) = 2\pi\sigma a$.

所以 $\lim_{y \rightarrow 0^-} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \varphi(y) = \varphi(0)$,

所以,此函数在 $y=0$ 处连续.

案例 1.17[运费问题]某运输公司规定货物的运费如下:在 a 公里以内,每吨公里 k 元;超过 a 公里,超过部分每吨公里为 $\frac{4}{5}k$ 元. 讨论运费 m 在里程 a 处的连续性.

解: 根据题意可列出分段函数如下:

$$m = \begin{cases} ks, & 0 \leq s \leq a, \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a. \end{cases}$$

因为 $\lim_{s \rightarrow a^-} m(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} (ks) = ka$, $\lim_{s \rightarrow a^+} m(s) = \lim_{s \rightarrow a^+} [ka + \frac{4}{5}k(s-a)] = ka$, $m(a) = ka$,

所以 $\lim_{s \rightarrow a^-} m(s) = \lim_{s \rightarrow a^+} m(s) = m(a)$,

所以,运费 m 在里程 a 处是连续的.

案例 1.18[停车场收费]一个停车场第一个小时(或不到一小时)收费 3 元,以后每小时(或不到整时)收费 2 元,每天最多收费 10 元. 讨论此函数在 t 时的连续性以及此函数的间断点,并说明其实际意义.

解:设停车场第 t 小时的收费为 y , 则

$$y = \begin{cases} 3, & 0 < t \leq 1, \\ 5, & 1 < t \leq 2, \\ 7, & 2 < t \leq 3, \\ 9, & 3 < t \leq 4, \\ 10, & 4 < t \leq 24. \end{cases}$$

因为 $\lim_{t \rightarrow 2^+} y = 7, \lim_{t \rightarrow 2^-} y = 5$,

所以 $\lim_{t \rightarrow 2} y$ 不存在, 即函数在 $t=2$ 处不连续.

同理, 此函数在 $t=1, 2, 3, 4$ 处间断.

实际意义: 由于超过整时后, 收费价格会突然增加, 因此, 在停车时, 为节省费用, 应尽量控制在整时之内; 由于一天的停车费最高价格不超过 10 元, 因此, 超过 4 小时后, 可以急于取车.

案例 1.19 [四脚方椅的稳定问题] 众所周知, 三条腿的椅子总是能稳定着地的, 但四条腿的椅子, 在起伏不平的地面上能不能也让它四脚同时着地呢?

解: 假设地面是一个连续的曲面, 即沿任意方向地面的高度不会出现间断, 即地面没有台阶或裂口等情况.

假定椅子是正方形的, 它的四条腿长都相等, 并记椅子的四脚分别为 A, B, C, D , 正方形 $ABCD$ 的中心点为 O , 以 O 为原点建立坐标系如图 1.5 所示.

当我们将椅子绕 O 点转动时, 用对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 来表示椅子的位置.

记 A, C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$, B, D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$. 容易知道, 它的四脚能同时着地的充要条件是 $f(\theta) = g(\theta)$. 当然此时这个正方形平面不一定与水平面平行.

另一方面, 根据正方形具有的旋转对称性可知, 对于任意的 θ , 有

$$f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = g(\theta), g\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = f(\theta).$$

作辅助函数 $\varphi(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 则函数 $\varphi(\theta)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 且有

$$\begin{aligned} \varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= [f(0) - g(0)][f\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)] = [f(0) - g(0)][g(0) - f(0)] \\ &= -[f(0) - g(0)]^2 \leq 0. \end{aligned}$$

根据闭区间上连续函数的零点定理可知, 一定存在 $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使得 $\varphi(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = g(\xi)$, 这就说明只要转动适当的角度, 总能使四条腿的椅子稳定地着地.

案例 1.20 [铁丝温度问题] 有一圆形铁丝, 上面有连续变化着的温度, 试证明总存在某条直径, 其两端点处的温度相等.

解: 设该圆的半径为 R , 以该圆的中心 O 为坐标原点, 建立坐标系如图 1.6 所示, 得到该圆以圆心角 t 为参数的参数方程为

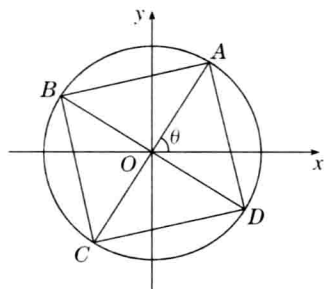


图 1.5

$$x=R\cos t, y=R\sin t, 0\leq t\leq 2\pi.$$

根据题意条件可知,该圆上 $P=(R\cos t, R\sin t)$ 点处的温度 $f(t)$ 是闭区间 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数,且有

$$f(0)=f(2\pi).$$

由于任一条直径两 endpoints 所对应的参数正好相差 π , 所以我们的目标就是要证明:存在一点 $\xi\in[0, \pi]$, 使

$$f(\xi)=f(\xi+\pi).$$

作辅助函数 $\varphi(t)=f(t)-f(t+\pi)$, 显然函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned}\varphi(0)\varphi(\pi) &= [f(0)-f(\pi)][f(\pi)-f(2\pi)] \\ &= [f(0)-f(\pi)][f(\pi)-f(0)] \\ &= -[f(0)-f(\pi)]^2 \leq 0.\end{aligned}$$

根据闭区间上连续函数的零点定理可知,一定存在 $\xi\in[0, \pi]$, 使得 $\varphi(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+\pi)$, 这就得到了所需证明的结论.

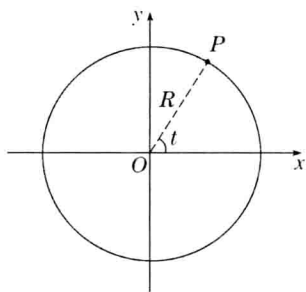


图 1.6

姓名_____ 班级学号_____

函数、极限与连续(练习一)

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ 的定义域是_____.
2. 设 $f(x-1) = x^2 - 2x$, 则 $f(x) =$ _____.
3. 函数 $y = \frac{x+2}{x-2}$ 的反函数是_____.
4. 曲线 $y = x \cos x$ 关于_____对称.
5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(0) =$ _____.

二、单选题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 设函数 $y = x^2 \sin x$, 则该函数是().
A. 奇函数 B. 偶函数 C. 非奇非偶函数 D. 既奇又偶函数
2. 函数 $f(x) = x \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ 的图形是关于()对称.
A. $y = x$ B. x 轴 C. y 轴 D. 坐标原点
3. 设 $f(x+1) = x^2 - 1$, 则 $f(x) =$ ().
A. $x(x+1)$ B. x^2 C. $x(x-2)$ D. $(x+2)(x-1)$
4. 已知 $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2$, 则复合函数 $f[g(x)] =$ ().
A. $2 \ln x$ B. $\ln x^2$ C. $\ln^2 x$ D. $(\ln|x|)^2$
5. 下列各函数对中, () 中的两个函数相等.
A. $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x$ B. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = x$
C. $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$ D. $f(x) = \ln x^3, g(x) = 3 \ln x$

三、分解下列各复合函数(每小题 6 分,共 30 分)

1. $y = 5^{\cos(x^2)}$.
2. $y = e^{(2x+1)^2}$.

3. $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}.$

4. $y = \cos \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}.$

5. $y = \ln[\tan(x^2+1)^2].$

四、应用题(每小题 15 分, 共 30 分)

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \\ 4-x, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

(1) 作函数 $f(x)$ 的图形, 并写出其定义域; (2) 求 $f(0), f(1.2), f(3), f(4)$.

2. 要设计一个容积为 $V = 20\pi \text{ m}^3$ 的有盖圆柱形贮油桶, 已知桶盖单位面积造价是侧面的一半, 而侧面单位面积造价又是底面的一半. 设桶盖造价为 a (单位: 元/ m^2), 试把贮油桶总造价 p 表示为贮油桶半径 r 的函数.

姓名_____ 班级学号_____

函数、极限与连续(练习二)

一、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[4 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \underline{\hspace{2cm}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + k}{x - 2} = 3$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$
- 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{2x} = e$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、单选题(每小题 4 分,共 20 分)

- 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,下列数列极限存在的是().
 A. $(-1)^n \cdot n$ B. $\frac{n+1}{n}$ C. 2^n D. $\sin n$
- 设 $f(x) = \begin{cases} |x| + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值为().
 A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在是函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 有极限的().
 A. 充分条件 B. 必要条件
 C. 充分必要条件 D. 无关条件
- 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列变量中为无穷小量的是().
 A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{\sin x}{x}$ C. $\ln(1+x)$ D. $\frac{x}{x^2}$
- 下列各式中正确的是().
 A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = e$ B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} = e$
 C. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = e$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

三、求下列极限(每小题 6 分,共 30 分)

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+6)^7 (8x-5)^3}{(5x-1)^{10}}.$