高等职业教育“十二五”创新型规划教材

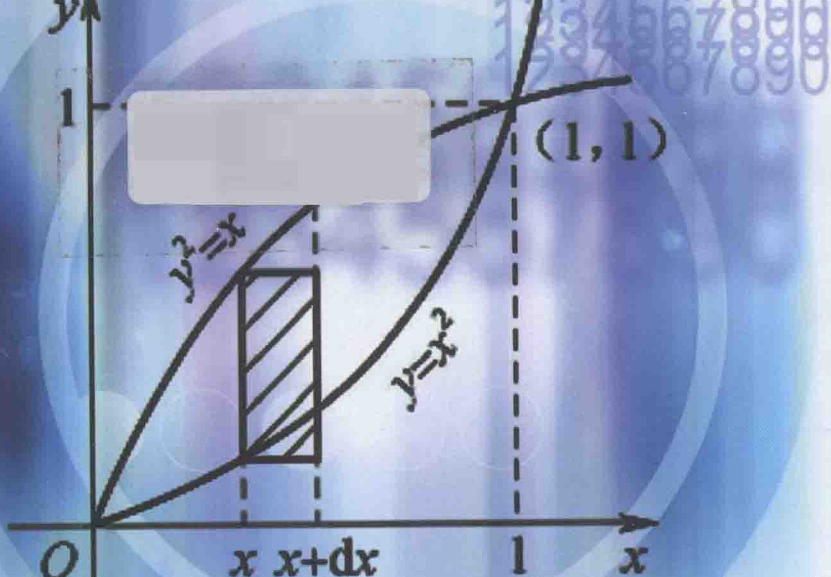
应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

主编 刘美英 赵彩秀

主审 孙喜平 肖丽媛

（下册）



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育"十二五"创新型规划教材

应用数学基础

（下册）

主　编　刘美英　赵彩秀
副主编　杨建平　李广利
主　审　孙喜平　肖丽媛

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础．下册/刘美英，赵彩秀主编．—北京：北京理工大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5640-4937-9

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①刘…②赵…　Ⅲ.①应用数学-高等职业教育-教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 161461 号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京国马印刷厂
开　　本／787 毫米×1092 毫米
印　　张／12
字　　数／273 千字
版　　次／2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
印　　数／1～4000 册
定　　价／24.00 元

责任编辑／钟　博
责任校对／陈玉梅
责任印制／王美丽

前　　言

本书共分上、下两册，上册包括函数、极限、一元微分学和积分学，下册包括微分方程、拉普拉斯变换、线性代数、概率论与统计学的内容. 全书内容是由内蒙古机电职业技术学院基础部数理教研室的全体教师，结合多年从事高职高专教学的经验，通过对各专业的调研，经全体教师集体讨论后选定的，由每位老师各自编写一部分，最终统筹定稿形成. 全书力图反应如下特点：

1. 有较强的专业适应性

在各类高职高专院校中，大量的专业都需要开设《应用数学基础》，而不同的专业所需内容也不尽相同. 因此，我们上册是各专业学生的必修内容，下册是根据各自不同专业的选学内容，同时在练习题和例题中也适当选择了一定数量的专业例子.

2. 尽可能适应当前学生的实际认知水平

在大力普及高职高专教育的背景下，我们所面对的学生生源其学习能力和认知水平都有所下降，由此我们在编写过程中，力求语言描述通俗易懂，省略较繁琐的理论证明和推导，对难懂的概念定义尽量用通俗语言讲解清楚其基本思想和含意，习题与例题尽可能简洁.

3. 尽可能适应当前高职高专的教学改革

在加大实践性教学，压缩理论教学时数，重点培养学生实际动手能力的高职高专教育理念下，我们在保证理论体系完整的同时，对内容的选择、章节的安排作了适当的合并删减，以灌输数学思想为主，培养学生的数学思维方法，掌握基本的数学运算和简单应用，体现数学的工具性与适用性.

参加本书编写的有：刘志劲老师编写第一章，张爱英老师编写第二章，蔡兴华老师编写第三章，李军老师编写第四章，李海琴老师编写第五章，薛娜老师编写第六章，赵彩秀老师编写第七章、第八章，杨建平老师编写第九章，李广利老师编写第十章、第十一章，刘美英老师编写第十二章、第十三章. 张爱英老师为本书选配了阅读材料，敖特老师为本书的文字和物理例子的选用提出了不少建设性的意见.

本书在组织、策划、审核过程中得到了孙喜平院长的大力支持与帮助，内蒙古呼和浩特职业技术学院的肖丽嫒老师对本书做了审阅修改并提出了许多宝贵意见，在编写过程中也得到学院有关部门和出版社的支持与帮助，在此表示感谢.

由于时间仓促，编者水平有限，错误与不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

目　　录

下　册

第七章　常微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映，利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究. 因此如何寻求函数关系，在实践中具有重要意义. 但由于现实世界中事物发展运动规律的复杂性，在许多问题中，往往不能直接找出所需要的变量之间的函数关系，而是根据问题可以列出要找的函数及其导数(或微分)间的关系式，这样的关系式在数学上称之为微分方程. 在自然科学、社会科学和工程技术等诸多领域的实际问题中，都会涉及到微分方程的问题. 本章主要介绍常微分方程的概念、性质及其解法.

第一节　微分方程

一、微分方程的概念

在许多科技领域里，常会遇到这样的问题：

某个函数的表达式并不知道，但根据科技领域的普遍规律，却可以知道这个未知函数及其导数与自变量之间会满足某种关系. 下面我们先来看一个例子：

引例　一曲线通过点(1,2)，且曲线上任一点处的切线斜率等于该点的横坐标的 2 倍，求此曲线的方程.

解　设所求曲线方程是 $y=f(x)$，由导数的几何意义及已知条件得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ f(1)=2\end{cases}$$

由 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，得 $y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$($C$ 为任意常数).

$y=x^2+C$ 代表一簇曲线，簇中每一条曲线在点 x 处的切线斜率均为 $2x$，再利用已知条件 $y(1)=2$，可求出 $C=1$，则

$$y=x^2+1$$

为所求曲线的方程.

上例所得关系式$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 中含有未知函数的导数或微分，像这样的方程称为**微分方程**.

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**. 本章只讨论常微分方程(简称微分方程).

如

(1)$2y'+x^2=\mathrm{e}^x$

(2)$x^2y''-xy'+y=0$

(3)$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=5$

(4)$y^4+xy^{(6)}-x^8=0$

都是常微分方程.

微分方程中未知函数的导数或微分的最高阶数称为**微分方程的阶**.

如上(1)(3) 是一阶微分方程;(2)是二阶微分方程;(4)是六阶微分方程.

例 7-1 试写出下列各微分方程的阶.

(1)$x(y')^2-2y+x=0$

(2)$y'''+3y'-y=0$

(3)$(1+x^2)\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x=0$

(4)$y''+8y'+7y=5x$

解 (1)是一阶微分方程;(2)是三阶微分方程;(3)是一阶微分方程;(4)是二阶微分方程.

二、微分方程的解

定义 2 如果把某个函数代入微分方程中,能使该微分方程成立,那么这个函数称为**微分方程的解**,我们把求微分方程解的过程称为**解微分方程.**

如 函数 $y=e^x$ 代入微分方程 $y''+y'=2e^x$,方程成立,那么函数 $y=e^x$ 是微分方程 $y''+y'=2e^x$ 的解,且易知 $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x$ 也是此方程的解.

微分方程的解如果含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称这样的解为微分方程的**通解**;而不含有任意常数的解称为微分方程的**特解.**

像上例中 $y=C_1+C_2e^{-x}+e^x$ 是微分方程的通解, $y=e^x$ 是微分方程的特解.

通解是在一定范围内微分方程的所有解的共同表达式;特解是通解满足一定附加条件来确定任意常数而得到的解,这种附加条件称为**初始条件**,带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题.**

例 7-2 验证函数 $y=e^x$ 是微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的解.

解 由已知得

$y'=e^x$,把 y、y'代入方程 $xy'-y\ln y=0$ 的左边,得

左边$=xe^x-e^x\ln e^x=xe^x-e^x x=0=$右边

所以函数 $y=e^x$ 是方程 $xy'-y\ln y=0$ 的解.

例 7-3 验证函数 $y=Ce^{x^2}$ 是微分方程 $y'=2xy$ 的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解.

解 由已知得

$y'=2Cxe^{x^2}$,把 y'、y 分别代入方程 $y'=2xy$ 的左边和右边,得

左边$=2Cxe^{x^2}$,右边$=2xCe^{x^2}$,左边=右边,

所以 $y=Ce^{x^2}$ 是方程 $y'=2xy$ 的通解.

把初始条件 $y|_{x=0}=2$ 代入通解 $y=Ce^{x^2}$,得 $C=2$.

故满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解为 $y=2e^{x^2}$.

例 7-4 验证函数 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$是微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解,并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0$,$y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解 $y'=2C_1e^{2x}+(1+2x)C_2e^{2x}$,$y''=4C_1e^{2x}+4C_2e^{2x}(1+x)$

代入方程 $y''-4y'+4y=0$ 的左边，得

左边 $=4C_1e^{2x}+4C_2e^{2x}(1+x)-8C_1e^{2x}-4C_2e^{2x}(1+2x)+4(C_1+C_2x)e^{2x}=0=$ 右边

所以 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$ 是方程的通解.

把 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 代入通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，得

$$\begin{cases}0=C_1\\1=2C_1+C_2\end{cases}$$

解得　$C_1=0,C_2=1$，故所求微分方程的特解为 $y=xe^{2x}$.

练习题 7-1

1. 指出下列各微分方程的阶数.

(1) $y'+2y=x$

(2) $(x+y)\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$

(3) $y''+2y'=e^{-x}$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-5x=0$

2. 验证下列函数是否为所对应微分方程的解，是通解还是特解(其中 C、C_1、C_2 均为常数).

(1) $y=\cos 2x,y''+4y=0$

(2) $y=xe^x+C,xy'=(1+x)y$

(3) $y=3\sin x-4\cos x,y''+y=0$

(4) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x},y''-5y'+6y=0$

3. 验证函数 $y=5x^2$ 是微分方程 $xy'=2y$ 的解.

4. 验证函数 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$(C_1、C_2 为任意常数)是二阶微分方程 $y''-4y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$的特解.

5. 写出满足曲线在 (x,y) 处的切线斜率等于该点横坐标的平方的微分方程.

第二节　一阶微分方程

本节主要讨论一阶微分方程的解法.

一阶微分方程的一般式是

$$F(x,y,y')=0$$

一、可分离变量的微分方程

定义 1　形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\cdot g(y) \tag{7-1}$$

的一阶微分方程，称为可分离变量的微分方程.

可分离变量的微分方程的求解步骤如下：

(1)分离变量，得

$$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$$

(2)方程两边取不定积分,计算积分得微分方程的通解

$$\int\frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$$

例 7-5　求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$的通解.

解　此方程为可分离变量的微分方程,分离变量($y\neq0$ 时)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int3x^2\mathrm{d}x$$

得
$$\ln|y|=x^3+C_1$$

即
$$|y|=\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$$

所求通解为 $y=C\mathrm{e}^{x^3}$(其中 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 为任意常数).

$y=0$ 也是方程的解,当任意常数 C 取零时,此解含在通解中.

注:为了书写方便,可以不必先取绝对值 $\ln|y|$,去掉绝对值后再令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$,而在积分时直接写成 $\ln y$,常数 C_1 写成 $\ln C$,这样可由 $\ln y=x^3+\ln C$ 即得到 $y=C\mathrm{e}^{x^3}$. 但要记住,最后得到的常数 C 是(可正可负的)任意常数,以后遇到类似的情况均可这样表示.

例 7-6　求微分方程 $y'=y^2$ 的通解.

解　此方程为可分离变量的一阶微分方程.

当 $y\neq0$ 时,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int\mathrm{d}x$$

得通解为
$$-\frac{1}{y}=x+C(C\text{ 为任意常数}).$$

显然 $y=0$ 也是上述方程的解,但它不包含在通解中.

如果求得的微分方程的解是一个显函数,那么这样的解称为**显式解**,如本节例 7-5 的通解;如果求得的微分方程的解是一个隐函数,那么这样的解称为**隐式解**,如本节例 7-6 的通解.

在求解微分方程时,由于方程的变形,常使某些特解不在所求得的通解中. 这种解一般容易从方程中直接观察出来,有时适当扩大通解中任意常数的取值范围,就可以把这些特解包含进去(如本节例 7-5). 另一方面,实际问题中求解微分方程的主要目的是寻找满足初始条件的特解,这样的特解可以从通解中确定或直接从方程得出,所以今后将不再指出这些不属于通解中的特解.

例 7-7　求微分方程$(1+x^2)\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x=0$ 的通解.

解　这是可分离变量的微分方程,分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

两边积分
$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
得
$$\ln y=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C$$
于是微分方程的通解是
$$y=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$$

例 7－8　求微分方程 $xy'=y\ln y$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$的特解.

解

这是可分离变量的微分方程,分离变量得
$$\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
两边积分
$$\int\frac{1}{\ln y}\mathrm{d}(\ln y)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
得
$$\ln\ln y=\ln x+\ln C$$
去掉对数符号,通解可记作 $y=\mathrm{e}^{Cx}$.

代入初始条件 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$,得 $\mathrm{e}=\mathrm{e}^C$,$C=1$,所以满足初始条件的特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

二、一阶线性微分方程

定义 2　形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)\tag{7-2}$$
的微分方程称为**一阶线性微分方程**,其中 $P(x)$,$Q(x)$都是自变量 x 的已知函数. 特别地,当 $Q(x)\equiv0$ 则方程(7－2)式变为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0\tag{7-3}$$
称为**一阶线性齐次微分方程.**

如果 $Q(x)\neq0$,方程(7－2)称为**一阶线性非齐次微分方程.** 方程(7－3)式为方程(7－2)式的对应齐次方程. 一阶线性齐次方程与一阶线性非齐次方程统称为一阶线性(微分)方程. 下面从一阶线性齐次方程开始,逐步地讨论一阶线性方程的求解方法.

1. 一阶线性齐次微分方程的通解

不难看出方程(7－3)是可分离变量的微分方程,分离变量得
$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$
积分得
$$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x$$
即
$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\tag{7-4}$$

方程(7－4)式为一阶线性齐次方程(7－3)的通解,其中 $P(x)$的积分 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 只取一个原函数.

2. 一阶线性非齐次微分方程的通解

由于线性非齐次方程(7-2)式的右端是 x 的函数 $Q(x)$，考虑到线性非齐次方程与其对应的线性齐次方程左端相同，因此，可设想将线性齐次方程通解式(7-4)中的常数 C 换成待定函数 $C(x)$后，有可能是线性非齐次方程的解. 即令 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 为线性非齐次方程的解，并将其代入线性非齐次方程(7-2)式，有

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

得
$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

即
$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

两边积分得
$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C$$

将 $C(x)$代入 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$中，便得线性非齐次方程的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \tag{7-5}$$

由通解公式(7-5)可得

$$y=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+Ce^{-\int P(x)dx}$$

由此可以看出，一阶线性非齐次方程的通解等于它的一个特解加上对应的线性齐次方程的通解.

上述求解方法称为**常数变易法**. 用常数变易法求一阶线性非齐次微分方程通解的步骤为：

(1)先求出线性非齐次方程所对应的线性齐次方程的通解式(7-4)；

(2)根据所求出的线性齐次方程的通解设出线性非齐次方程的解，即把所求出的线性齐次方程的通解中的任意常数 C 改为待定函数 $C(x)$；

(3)将所设解代入线性非齐次方程，解出 $C(x)$，并写出线性非齐次方程的通解公式(7-5).

例 7-9 求微分方程 $2y'-y=e^x$ 的通解.

解 将所给方程改写为下列形式：

$$y'-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^x$$

这是一阶线性非齐次微分方程.

解法一 (常数变易法)：

(1)先求出原方程对应的线性齐次方程 $y'-\frac{1}{2}y=0$ 的通解，代入通解(7-4)式得线性齐次方程的通解为
$$y=Ce^{\frac{x}{2}}.$$

(2)设 $y=C(x)e^{\frac{x}{2}}$ 为原方程的解，将 y,y'代入原方程，得

$$C'(x)e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}e^x$$

$$C'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

所以
$$C(x)=\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx=e^{\frac{x}{2}}+C$$

故原方程的通解为 $y=Ce^{\frac{x}{2}}+e^x$.

解法二 (公式法)：

该方程中 $P(x)=-\dfrac{1}{2}$，$Q(x)=\dfrac{1}{2}e^x$. 将其代入一阶线性非齐次微分方程的通解公式(7-5)，得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\\&=e^{\int\frac{1}{2}dx}\left[\int\frac{1}{2}e^xe^{-\int\frac{1}{2}dx}dx+C\right]\\&=e^{\frac{x}{2}}\left[\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx+C\right]=e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}}+C)\end{aligned}$$

故原方程的通解为 $y=Ce^{\frac{x}{2}}+e^x$.

与**解法一**结果相同. 可以看出**解法二**简单些，但必须熟记公式，而**解法一**只要知道常数变易法的思路即可求出解，在实际做题时用两种方法中的哪一种都可以.

例 7-10　求方程 $xy'+y=\sin x$ 满足初始条件 $y|_{x=\pi}=0$ 的特解.

解　原方程变形为 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$，是一阶线性非齐次微分方程，其中 $P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，由通解公式(7-5)得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)\\&=e^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx+C\right)\\&=\frac{1}{x}\left(\int\sin x dx+C\right)\\&=\frac{1}{x}(-\cos x+C)\end{aligned}$$

将初始条件 $y|_{x=\pi}=0$ 代入，得 $C=-1$

故满足初始条件的特解为 $y=-\dfrac{1}{x}(\cos x+1)$.

例 7-11　已知一曲线通过原点，并且它在点(x,y)处的切线斜率等于 $2x-y$，求此曲线的方程.

解　根据已知可得 $y'=2x-y$，即 $y'+y=2x$. 此方程是一阶线性非齐次方程，其中 $P(x)=1$，$Q(x)=2x$，所以由通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dx}\left(\int 2xe^{\int dx}dx+C\right)\\&=e^{-x}\left(2\int xe^xdx+C\right)\\&=e^{-x}\left(2\int xd(e^x)+C\right)\\&=e^{-x}\left(2xe^x-2\int e^xdx+C\right)\\&=e^{-x}(2xe^x-2e^x+C)\\&=2x-2+Ce^{-x}\end{aligned}$$

因曲线通过原点，即 $y|_{x=0}=0$，代入通解得 $C=2$，所以所求曲线方程为 $y=2x-2+2e^{-x}$.

现将一阶微分方程的解法归纳如表 7 - 1:

表 7 - 1

<table>
<tr><th colspan="2">方程类型</th><th>方程形式</th><th>方程解法</th></tr>
<tr><td colspan="2">可分离变量</td><td>$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$</td><td>分离变量,两边积分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">一阶线性</td><td>齐次</td><td>$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$</td><td>分离变量,两边积分
或用公式 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$</td></tr>
<tr><td>非齐次</td><td>$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$</td><td>常数变易法或用公式
$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$</td></tr>
</table>

练习题 7 - 2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y'=2xy$　　(2) $3x^2+5x-5y'=0$

(3) $xdy+ydx=0$　　(4) $2xy'+y\ln y=0$

(5) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$　　(6) $y^2dx+(x^2+1)dy=0$

(7) $y'+y=xe^x$　　(8) $y'+\frac{y}{x}-\sin x=0$

(9) $y'+2y=1$　　(10) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解.

(1) $y'-y=\cos x, y|_{x=0}=0$

(2) $y'+y=2x, y|_{x=0}=1$

(3) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}, y|_{x=0}=0$

(4) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}, y|_{x=0}=2$

3. 一曲线通过点(3,10),其在任意点处的切线斜率等于该点横坐标的平方,求此曲线方程.

4. 求一曲线方程,该曲线过原点,且它在点(x,y)处的切线斜率为 $2x+y$.

第三节　二阶常系数线性微分方程

一、二阶常系数线性微分方程的概念

形如

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{7-6}$$

的微分方程称为**二阶常系数线性微分方程**. 其中 p,q 都是常数.

若 $f(x)\equiv 0$,则方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{7-7}$$

称为**二阶常系数线性齐次微分方程**.

若 $f(x)\neq 0$，则方程 $y''+py'+qy=f(x)$
称为**二阶常系数线性非齐次微分方程.**
如

(1)$y''+3y'+2y=0$

(2)$y''-5y'+6y=2x$

(3)$y''+y'+y=e^x$

都是二阶常系数线性微分方程. 其中(1)是二阶常系数线性齐次微分方程；(2)(3)是二阶常系数线性非齐次微分方程.

定义　设函数 y_1 和 y_2 是定义在某一区间 I 上的两个函数. 如果存在两个不全为 0 的常数 k_1 和 k_2，使在区间 I 上 $k_1y_1+k_2y_2=0$ 成立，则称函数 y_1 与 y_2 在区间 I 上是线性相关的，否则称为线性无关.

也可以这样理解：函数 y_1 和 y_2 之比为常数时，称 y_1 和 y_2 是线性相关的；函数 y_1 和 y_2 之比不为常数时，称 y_1 和 y_2 是线性无关的.

二、二阶常系数线性微分方程解的结构

定理 1　若函数 y_1,y_2 都是微分方程(7-7)的两个线性无关的解，则

$$y=C_1y_1+C_2y_2$$

是方程(7-7)的通解，其中 C_1,C_2 是任意常数.

定理 2　若 y^* 是方程(7-6)的一个特解，$\overline{y}$ 是方程(7-7)的通解，则

$$y=\overline{y}+y^*$$

是方程(7-6)的通解.

定理 3　若方程 y_1 和 y_2 分别是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)$$

$$y''+py'+qy=f_2(x)$$

的解，则 $y=y_1+y_2$ 是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$$

的解.

三、二阶常系数线性齐次微分方程的解法

由于齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

中 p,q 是常数，所以方程中的 y,y',y'' 应具有相同的形式，而 $y=e^{rx}$ 是具有这一特性的函数. 不妨设 $y=e^{rx}$ 是方程的解(r 为待定常数)，代入方程 $y''+py'+qy=0$，得

$$r^2e^{rx}+pre^{rx}+qe^{rx}=0$$

即

$$(r^2+pr+q)e^{rx}=0$$

因 $e^{rx}\neq 0$，所以

$$r^2+pr+q=0 \tag{7-8}$$

由此可见，只要常数 r 满足方程(7-8)，函数 $y=e^{rx}$ 就是方程(7-7)的解. 因此我们把方

程(7－8)称为方程(7－7)的特征方程.特征方程的根称为特征根.

综上所述,我们已经把求常系数线性齐次方程(7－7)的解的问题转化为求它的特征方程的根的问题.

下面讨论特征方程根的情况.

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的特征根有三种情况:

(1)特征方程具有两个不等的实根 r_1 与 r_2,即 $r_1\neq r_2$,那么函数 $y_1=e^{r_1x}$ 和 $y_2=e^{r_2x}$ 都是方程(7－7)的解.且 $\frac{y_1}{y_2}=e^{(r_1-r_2)x}\neq$ 常数,所以 y_1 与 y_2 线性无关.

因而方程(7－7)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

(2)特征方程具有两个相等的实根 r_1 与 r_2,即 $r_1=r_2=r$,这时易验证 $y_1=e^{rx}$ 与 $y_2=xe^{rx}$ 都是方程(7－7)的解,且 $\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{x}$,所以 y_1 与 y_2 线性无关.

因而方程(7－7)的通解为

$$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx} \quad 或 \quad y=(C_1+C_2x)e^{rx}$$

(3)特征方程具有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta$ 与 $r_2=\alpha-i\beta$,这时有两个线性无关的特解 $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ 与 $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$.这是两个复数解,为了便于在实数中讨论问题,我们再找两个线性无关的实数解.由欧拉公式可得两个函数

$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$,$y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 均为(7－7)式的解,且它们线性无关.

因此,这时方程(7－7)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

上述求二阶常系数线性齐次微分方程通解的方法称为特征根法,其步骤是:

(1)写出所给方程的特征方程;

(2)求出特征根;

(3)根据特征根的三种不同情况,写出所给微分方程相应的通解.

对应的齐次方程(7－7)的通解如表 7－2 所示:

表 7－2

齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$(p,q 为常数)		对应特征方程 $r^2+pr+q=0$
$\Delta=p^2-4q$	特征根 r_1,r_2	通解
$\Delta>0$	两个不相等的实根 $r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$\Delta=0$	两个相等的实根 $r_1=r_2=-\frac{p}{2}$	$y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$
$\Delta<0$	一对共轭的复数根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 7－12 求方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解.

解 (1)写出方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程

$$r^2-3r+2=0$$

(2)求出特征根

$$r_1=1, r_2=2$$

(3)对照表 7－2,写出原方程的通解

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

例 7－13　求方程 $y''-8y'+16y=0$ 的通解.

解　方程 $y''-8y'+16y=0$ 的特征方程为

$$r^2-8r+16=0$$

解得特征根

$$r=r_1=r_2=4(\text{为二重根})$$

故所求方程的通解为

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$$

例 7－14　求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　方程 $y''+2y'+5y=0$ 的特征方程为

$$r^2+2r+5=0$$

解得特征根

$$r=-1\pm 2i$$

故原方程的通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

例 7－15　求方程 $y''+10y'+25y=0$ 的通解以及满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 及 $y'|_{x=0}=1$ 的特解.

解　特征方程为

$$r^2+10r+25=0$$

解特征方程,得两特征根为 $r_1=r_2=-5$ 为重实根. 因此,微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-5x}\quad (C_1, C_2\text{ 为任意常数})$$

把初始条件 $y|_{x=0}=0$ 与 $y'|_{x=0}=1$ 分别代入 $y=(C_1+C_2x)e^{-5x}$ 与 $y'=(-5C_1+C_2-5C_2x)e^{-5x}$ 中,得

$$\begin{cases} C_1=0 \\ -5C_1+C_2=1 \end{cases}$$

解方程组,得$\begin{cases} C_1=0 \\ C_2=1 \end{cases}$

因此方程满足初始条件 $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$ 的特解为 $y=xe^{-5x}$.

四、二阶常系数线性非齐次微分方程

由定理 2 知,求二阶常系数线性非齐次微分方程的通解,可先求出其对应的线性齐次微分方程的通解,再设法求出其自身的一个特解. 二者之和就是二阶线性非齐次微分方程的通解. 所以求二阶线性非齐次微分方程的通解可按如下步骤进行:

(1)求出对应的齐次方程的通解 $\overline{y}$;