21世纪高等职业教育规划教材

数学系列

大学数学应用基础

DAXUE SHUXUE YINGYONG JICHU

■ 主编 万兰萍 何兆菊

SHUXUE

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪高等职业教育规划教材·数学系列

大学数学应用基础

主　　编：万兰萍　何兆菊
副 主 编：杨安平　郑多玲

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，充分考虑当前我国高职高专的教育现状，结合新的课程改革理念编写而成。

全书包括微积分、线性代数、概率统计三大模块，主要内容有函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分及其应用、线性代数及其应用、概率统计等。

本书可作为高职高专各专业通用的数学教材，还可作为专升本考试培训教材，也可作为职业大学、成人大学和自考的教材。

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

大学数学应用基础/万兰萍，何兆菊主编. —武汉：华中师范大学出版社，2012.7
(21世纪高等职业教育规划教材·数学系列)

ISBN 978-7-5622-5637-3

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①万…　②何…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第153789号

大学数学应用基础

©万兰萍　何兆菊　主编

编 辑 室：第二编辑室　　**电话**：027－67867362
责任编辑：袁正科　　**责任校对**：罗　艺　　**封面设计**：罗明波
出版发行：华中师范大学出版社
社　　址：湖北省武汉市洪山区珞喻路152号　　**邮　　编**：430079
销售电话：027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)
网　　址：http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印　　刷：武汉市新华印刷有限责任公司　　**督　　印**：章光琼
开　　本：787mm×960mm　1/16　　**印　　张**：17.5　　**字　　数**：340千字
版　　次：2012年8月第1版　　**印　　次**：2012年8月第1次印刷
印　　数：1—3000　　**定　　价**：35.00元

前　言

为了适应高职高专教育发展的需要，满足高职高专教育应用型人才培养目标的要求，进一步提高教学质量，我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写了本书。编写过程始终贯彻以下四项原则：

第一，必需够用，淡化推理。教材内容安排突出高职数学在专业课程和实际生活中的应用，理论知识以够用为度，涉及性质与定理的内容，以图形描述或数值表达或文字说明加以适当解释，淡化逻辑推理，具有高职高专教育特色。

第二，专业结合，突出应用。教材体系突出与各专业紧密结合，体现数学知识专业化、专业问题数学化，尽可能用数学方法解决实际问题，实现“教、学、用”融为一体，体现教育部教学改革的精神。

第三，案例驱动，问题导向。数学概念以案例为背景导入，知识的展开以解决问题为导向，形成数学知识来源于实际问题，反过来又应用于实际问题，符合高职高专学生的认知规律。

第四，融入建模，体现人文。每一知识模块融入数学建模的概念思想与数学实验方法，注重学生创新能力与综合素质的培养，增强学生可持续发展能力；结合教学内容，渗透数学教育思想，培养学生睿智、细致、坚毅的品格。

全书内容包括：微积分、线性代数与概率统计三大模块。内容由浅入深，通俗易懂。既从学生知识基础出发，又从学生接受能力出发，特别设置了带“*”号的内容。带“*”号的内容是拓展型内容，能进一步培养学生创新型思维，学生可根据自身能力进行选学。为了巩固每章的知识学习情况，我们在每章的最后配有小结和复习题。

本书由万兰萍、何兆菊任主编，杨安平、郑多玲任副主编。各参编人员分工为：万兰萍：第1章；何兆菊：第3、7、8章、附录；杨安平：第2、5章；郑多玲：第4、6章。全书的合成统稿由万兰萍、何兆菊共同完成。

本书在编写过程中得到了黄冈科技职业学院校领导李友芳教授和各系部的大力支持，在此对他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免还有一些不妥之处，敬请同行、专家、广大读者批评指正。

编　者

2012年6月

目　录

第1章　函数、极限与连续

极限是高等数学中的一个基本概念，是深入研究函数的重要工具. 同时，利用极限可以分析和解决许多实际问题，它是微积分的理论基础. 本章将讨论函数的极限和函数的连续等问题. 学好本章的内容，对微积分学习以及后续的专业学习，起着重要作用.

1.1　函　数

1.1.1　常量与变量

现实生活所遇到的各种各样的量中，那些在某一过程中始终保持不变的量，称为**常量**；而在某一过程中不断变化着的量，称为**变量**. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量.

1.1.2　函数的定义及其表示法

1. 函数的定义

定义 1.1　**设 D,M 是两个数集，x,y 是两个变量，如果对于 D 中的任意一个数 x(简记为 $\forall x \in D$)，按照某个确定的对应法则 f，M 中都有唯一确定的数值 y 与之相对应，则称 y 为定义在 D 上关于 x 的单值函数，记作 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.**

例如，函数 $y^2 = x$，当 $x \in (0, +\infty)$ 时有两个 y 值与之相对应，它是一个**多值函数**，其中 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = -\sqrt{x}$ 是它的两个**单值分支**.

2. 函数的定义域

由定义 1.1 可知，函数的定义域是确定函数的一个重要因素，在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定.

例如，圆的面积公式 $S = \pi \cdot r^2$ 中，自变量半径 r 的取值范围就为 $\{r \mid r > 0\}$.

要使数学解析式有意义，一般需要满足以下条件：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方根；

(3) 在对数式中，真数必须大于零；

(4) 在反三角函数式中，应满足反三角函数式的定义要求；

(5) 如果函数的解析表达式中含有分式、根式、对数式和反三角函数式，则应取各部分定义域的交集.

例 1 求 $y=\sqrt{x+3}+\dfrac{\lg(2-x)}{x+1}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}x+3\geqslant 0,\\ 2-x>0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x\geqslant -3,\\ x<2,\\ x\neq -1,\end{cases}$$

即 $-3\leqslant x<2$ 且 $x\neq -1$. 所以，函数的定义域为 $[-3,-1)\cup(-1,2)$.

3. 函数的表示法

函数的表示法通常有**解析法**，**表格法**，**图像法**.

解析法的优点是：形式简明，便于作理论研究与数值计算；缺点是：不如图示来得直观.

表格法的优点是：表中有对应数据，可以直接查用(如三角函数表，对数函数表等)；缺点是：不便于作理论研究，也不直观.

图像法的优点是：直观并可以从图形直接看出函数的变化情况；缺点是：不便于作理论研究.

应当指出，在实际应用上有些函数虽然也可以用解析式表示出来，但不能只用一个解析式表出. 当自变量取某些值时，可用这个解析式表示，当自变量取另外一些值时，就得用另一个解析式表示，这样的函数称为**分段函数**，例如：

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<-1,\\ 1, & x=-1,\\ x, & -1<x<1,\\ 1-x, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

其图像如图 1.1 所示.

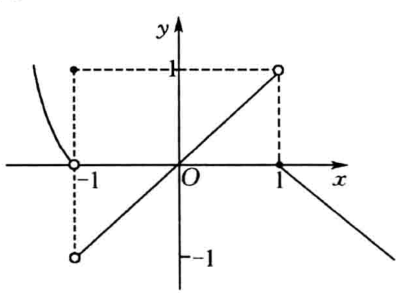


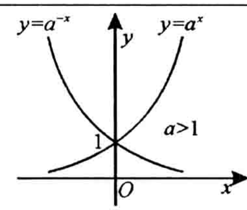
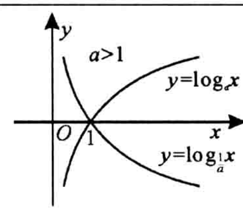
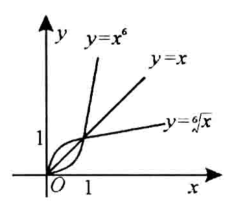
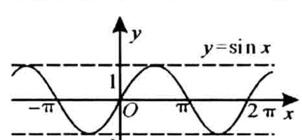
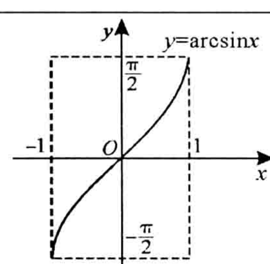
图 1-1

分段函数的定义域，就是其自变量各个取值范围的并集.

1.1.3 基本初等函数

我们最常用的基本初等函数有五种，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数. 这五种初等函数是研究其他各种函数的基础，统称为**基本初等函数**. 也是今后我们经常要用到的函数. 它们的图像和基本性质如表 1-1 所示：

表 1-1

<table>
<tr><th>函数名称</th><th>表达式</th><th>图像</th><th>性质</th></tr>
<tr><td>指数函数</td><td>$y = a^x$
$(a > 0, a \neq 1)$</td><td>
</td><td>(1) 不论 x 为何值，y 总为正数；
(2) 当 $x = 0$ 时，$y = 1$.</td></tr>
<tr><td>对数函数</td><td>$y = \log_a x$
$(a > 0, a \neq 1)$</td><td>
</td><td>(1) 其图像总位于 y 轴右侧，并过(1,0) 点；
(2) 当 $a > 1$ 时，在区间(0,1) 的值为负；在区间$(1, +\infty)$ 的值为正；在定义域内单调递增.</td></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y = x^a$
(a 为任意实数)</td><td>
</td><td>令 $a = \frac{m}{n}$
(1) 当 m 为偶数，n 为奇数时，y 是偶函数；
(2) 当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数；
(3) 当 m 为奇数，n 偶数时，y 在$(-\infty,0)$ 上无意义.</td></tr>
<tr><td>三角函数</td><td>$y = \sin x$，这里只写出了正弦函数</td><td>
</td><td>(1) 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数；
(2) 正弦函数是奇函数且 $|\sin x| \leqslant 1$.</td></tr>
<tr><td>反三角函数</td><td>$y = \arcsin x$，这里只写出了反正弦函数</td><td>
</td><td>(1)$x \in [-1,1]$；
(2) 由于此函数为多值函数，因此我们把函数值限制在$[-\pi/2,\pi/2]$ 上，并称其为反正弦函数的主值.</td></tr>
</table>

1.1.4 复合函数

定义 1.2 如果 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，u 是 x 的函数，$u=g(x)$，当 x 在某一范围内取值时，相应的 u 值能使 $y=f(u)$ 有意义，则 y 是函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，记为 $y=f[g(x)]$，其中 x 是自变量，u 是中间变量，f 是外层函数，g 是内层函数.

例 2 指出下列各复合函数的复合过程及其定义域.

(1)$y=\cos\sqrt{x}$；　　(2)$y=\ln\sqrt{2+x^2}$.

解 (1)$y=\cos\sqrt{x}$ 是由 $y=\cos u$，$u=\sqrt{x}$ 两个函数复合而成的，其定义域是 $[0,+\infty)$.

(2)$y=\ln\sqrt{2+x^2}$ 是由函数 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2+x^2$ 复合而成的，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

必须注意的是，并非任何两个(或若干个)函数都可以复合成一个复合函数.

例如，函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，这是因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内.

1.1.5 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或有限次的复合步骤所形成，并且可以用一个解析表达式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt{\sin x}-2$，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但有些特殊的分段函数，例如，

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是初等函数，因为它可以写成 $y=\sqrt{x^2}$.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{2x+3}$；　　(2)$y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$；

(3)$y=\sqrt{x^2-1}+\ln(3-x)$；　　(4)$y=\lg\dfrac{2x}{x-3}$.

2. 判断下列各对函数是否为相同函数.

(1)$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　　(2)$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 与 $y=x-1$；

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$.

3. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=e^{x+1}$；　(3) $y=\sin\frac{3x}{2}$；

(4) $y=\cos^2(3x+1)$；　(5) $y=\ln\sqrt{1+x}$；　(6) $y=\arccos(1-x^2)$.

4. 设 $f(x-1)=x^2$，求 $f(2x+1)$.

1.2　极限的概念

1.2.1　数列的极限

引例 1　极限的概念来源于实践，在我国古代就有了极限概念的萌芽，《庄子·天下篇》著有"一尺之棰，日取其半，万世不竭"，它的含义是：一尺长的一根木棒，第一天截取其长的一半（还剩下$\frac{1}{2}$尺），第二天截取第一天所剩下的一半（还剩下$\frac{1}{4}$尺），第三天再截取第二天所剩下的$\frac{1}{4}$尺的一半（还剩$\frac{1}{8}$尺）……第 $n+1$ 天截取第 n 天所剩下的$\frac{1}{2^n}$尺的一半……

表 1-2

日子序号	n	1	2	3	4	5	…	n	…
剩余量	$f(n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	…	$\frac{1}{2^n}$	…

可见当天数 n 无限地增大时，其剩下的长度$\frac{1}{2^n}$将无限地减小，而逐渐地趋向于零，用数字形式表达出来就是$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$ 可见，当 n 无限增大时，这个分数逐渐趋向于 0（但永远不等于 0）.

定义 1.3　**对于数列 $\{u_n\}$，如果当 n 无限增大时，通项 u_n 无限趋于某个确定的常数 A，则称该数列以 A 为极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$. 若数列 $\{u_n\}$ 没有极限，则称该数列发散.**

例 1　观察下列各数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{n^3}$；　(2) $x_n=2-\frac{1}{n^2}$；　(3) $x_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

解　(1) 当 n 依次取 $1,2,3,4,\cdots$ 时，数列的各项顺次为

$$1,\frac{1}{8},\frac{1}{27},\frac{1}{64},\cdots$$

当 n 增大时，x_n 减小且大于 0. 当 n 无限增大时，x_n 无限地趋近于 0. 由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0.$$

(2) 当 n 依次取 1,2,3,4,… 时，数列的各项顺次为

$$2-1,2-\frac{1}{4},2-\frac{1}{9},2-\frac{1}{16},\cdots$$

当 n 增大时，x_n 增大但小于 2. 当 n 无限增大时，x_n 无限地趋近于 2. 由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2.$$

(3) 当 n 依次取 1,2,3,4,… 时，数列的各项顺次为

$$-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},-\frac{1}{243},\cdots$$

当 n 增大时，x_n 正负交错出现，但其绝对值减小. 当 n 无限增大时，x_n 无限地趋近于 0. 由极限的定义知

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0.$$

如果数列 $\{u_n\}$ 对于每一个正整数 n，都有 $u_{n+1}>u_n$，则称数列 $\{u_n\}$ 为**单调递增数列**. 类似地，如果数列 $\{u_n\}$ 对于每一个正整数 n，都有 $u_{n+1}<u_n$，则称数列 $\{u_n\}$ 为**单调递减数列**. 如果对于数列 $\{u_n\}$，存在一个正的常数 M，使得对于每一项 u_n，都有 $|u_n|\leqslant M$，则称数列 $\{u_n\}$ 为**有界数列**.

定理 1.1(单调有界定理) 单调有界数列必有极限.

1.2.2 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例 2 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

解 如图 1-2 所示.

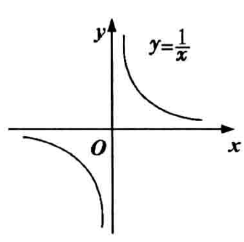


图 1-2