

隧道力学概论

GENERAL THEORY OF
TUNNEL MECHANICS

项彦勇 著



科学出版社

隧道力学概论

项彦勇 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书简明扼要地阐述了隧道力学的基本理论。正文分八章,依次阐述:固体力学基础、隧道与围岩、深埋隧道弹黏塑性力学解析理论、浅埋隧道经验公式与解析理论、浅埋隧道环境力学解析理论、数值模拟、物理模拟、参数估计与不确定性分析。附录包含五个部分,分别阐述:弹性平面模型的复变函数解法、无限平面均匀应力场的弹性解、均匀初始应力场深埋圆截面隧道弹性解的复变函数法推导、深埋椭圆截面隧道的复势函数、无限长弹性地基梁的解析解。

本书适合用作岩土工程、地下工程、隧道工程等学科的教学参考书,也可以供相关领域的研究人员和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

隧道力学概论/项彦勇著. —北京:科学出版社,2014.6

ISBN 978-7-03-041235-5

I. ①隧… II. ①项… III. ①隧道工程-工程力学-概论 IV. ①U451

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 126992 号

责任编辑:韦 沁 / 责任校对:韩 杨

责任印制:赵德静 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2014年6月第一次印刷 印张:22 1/2

字数:533 500

定价:98.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



前 言

人类为了开采地下资源和利用地下空间而修建隧道。隧道结构之区别于其他地面结构的主要特点在于其特殊的地质及建筑环境和特殊的施工过程。隧道结构的型式和构造往往是比较简单明确的,但其背后的地质及建筑环境却常常是复杂多变的。隧道施工的基本问题是如何针对特定的地质及建筑环境进行预支护(加固)、开挖、支护、衬砌,既保证施工的安全和效率,又控制施工对环境的影响。由于地质及建筑环境的多样性,隧道的修建既要依靠科学技术之理工,又要借助感知经验之判断。

隧道力学的目的是利用经验理论、解析理论、数值模拟、物理模拟、参数估计及不确定性计算方法,分析隧道与邻近地质及建筑环境的相互作用,包括定性分析与定量分析。定性分析是利用定量计算对力学机理进行分析,例如,地层初始主应力方位对隧道开挖塑性区形状影响的机理分析,隧道支护型式对邻近地层应力—变位影响的机理分析;定量分析是采用定量计算对力学参量进行分析,例如,隧道开挖形状、尺寸、步骤的参量分析,隧道支护材料、构造、形状、尺寸、次序的参量分析,隧道开挖—支护过程对邻近地层应力—变位影响的参量分析。

本书部分内容涉及的工作得到过国家自然科学基金项目(50978019)和一些企校合作课题的资助。在插图绘制方面,得到过陈建民、冯山群、李科、黄迅轩、任鹏、贾永州、魏昂、张宇宁、杨旭、时超、张勇诸位同学的协助;在书稿批阅和排版校改方面,得到过魏昂、张宇宁、杨旭三位同学的协助;在3.4节、3.6节、3.9节涉及的原始文献解析式的验证与修正方面,得到过魏昂同学的协助;在4.4节涉及的原始文献解析式的验证与修正方面,得到过杨旭同学的协助;在6.7节、6.8节、8.9节所述算例的计算方面,分别得到过路威、张志贺、何海健三位同学的协助。我在此对这些资助和协助表示感谢。

先了解现状,后提出问题,再解决问题,这就是学习与研究;了解现状和提出问题时,应由远及近,从一般走到具体;解决问题时,宜由近及远,从具体回归一般。期望本书远近得当,两所裨益,既具体可用,又不失一般。

教学、研究、读书、写书……乃至万事人生,恰如隧道开挖,虽粗知浅解,仍勤劳努力,为的就是在不久的未来与不远的前方感受新的光明。然而,星空浩瀚,地球深邃,时光无尽,人类自以为长大、深厚、耐久的隧道,其实是渺小、浅薄、短暂的。隧道有迹,天道无形;循道寻道,论道求道,实虽难至,心向往之。

项彦勇

2014年6月19日

于北京交通大学

目 录

前言

1 固体力学基础	1
1.1 应力分析	1
1.1.1 应力张量	1
1.1.2 剪应力互等定理与平衡方程	3
1.1.3 主应力和应力不变量	4
1.2 应变分析	5
1.2.1 应变张量	5
1.2.2 主应变和应变不变量	8
1.2.3 变形协调方程	9
1.3 本构模型	10
1.3.1 本构模型的类型	10
1.3.2 弹性本构方程	12
1.3.3 弹塑性本构方程	14
1.3.4 黏-弹塑性本构方程	28
1.4 固体力学控制微分方程与求解过程	35
1.4.1 弹性力学控制方程组与求解过程	35
1.4.2 弹性力学平面模型与应力函数解法	37
1.4.3 弹黏塑性力学控制方程组与弹塑性增量本构方程的数值积分	39
1.4.4 黏-弹性力学控制方程组与求解方法	42
2 隧道与围岩	44
2.1 隧道的受力特点与力学模型	44
2.1.1 隧道的分类和受力特点	44
2.1.2 自然拱与隧道埋深划分	45
2.1.3 隧道的地层-结构模型	47
2.1.4 围岩特征线与支护特征线	49
2.1.5 隧道的荷载-结构模型与荷载计算方法	50
2.2 隧道施工基本内容与围岩行为分类	58
2.2.1 隧道施工基本内容	58
2.2.2 隧道围岩行为分类	61
2.3 围岩的结构特征与物理力学特征	62
2.3.1 围岩的结构特征	62
2.3.2 围岩的基本物理力学性质	63

2.3.3	围岩的初始应力	64
2.3.4	围岩的霍克-布朗屈服准则	65
2.4	围岩分级(类)	66
2.4.1	围岩分级的目的与指标	66
2.4.2	中国铁路隧道围岩分级及围岩压力经验公式	66
2.4.3	太沙基分级(简介)	71
2.4.4	RMR 分级	71
2.4.5	Q 分级与应用	75
2.4.6	RMR 分级与 Q 分级之间的相关性	80
2.4.7	土的分类	82
3	深埋隧道弹黏塑性力学解析理论	84
3.1	深埋隧道围岩应力-位移场与基本假设	84
3.1.1	深埋隧道围岩应力-位移场	84
3.1.2	深埋隧道解析模型的基本假设	86
3.2	均匀初始应力场内任意方位深埋圆截面隧道围岩弹性解	87
3.2.1	控制方程组	87
3.2.2	边界条件	88
3.2.3	解析解	89
3.3	均匀初始应力场内深埋圆截面隧道弹性解	90
3.3.1	控制方程组	90
3.3.2	边界条件	91
3.3.3	解析解	91
3.4	均匀各向同性初始应力场内深埋圆截面隧道弹塑性解	93
3.4.1	基本解析模型	93
3.4.2	针对莫尔-库仑屈服准则和理想弹塑性零塑性体积应变模型的解析解	94
3.4.3	针对莫尔-库仑屈服准则和弹-脆塑性非关联流动模型的解析解	98
3.4.4	针对霍克-布朗屈服准则和弹-脆塑性非关联流动模型的解析解	101
3.4.5	针对无量纲霍克-布朗屈服准则和理想弹塑性非关联流动模型的解析解	103
3.5	均匀各向同性初始应力场内深埋圆截面隧道黏弹性解	105
3.5.1	针对麦克斯韦黏弹性模型的径向相对位移	106
3.5.2	针对开尔文黏弹性模型的径向相对位移	106
3.5.3	针对伯格斯黏弹性模型的径向相对位移	107
3.6	均匀各向同性初始应力场内深埋圆截面隧道弹-脆黏塑性解	107
3.6.1	围岩初始弹性区的应力和相对位移	108
3.6.2	围岩初始塑性区的应力和相对位移	108
3.6.3	围岩瞬态塑性区的应力和相对位移	110
3.6.4	围岩终态塑性区的应力和相对位移	111
3.6.5	围岩瞬态弹性区的应力和相对位移	111

3.6.6	函数 $f(t)$ 的确定	112
3.6.7	塑性剪胀系数 ν_p 的确定	113
3.7	均匀初始应力场内深埋圆截面隧道线性应变硬化/软化弹塑性解	113
3.7.1	线性应变硬化/软化弹塑性模型与德鲁克-普拉格屈服准则	113
3.7.2	简化德鲁克-普拉格线性应变硬化/软化模型与解析解及推导过程	116
3.8	均匀初始应力场内深埋椭圆截面隧道弹性解	120
3.9	均匀初始应力场内深埋边界分段光滑截面隧道复势函数弹性解	121
3.9.1	围岩应力和位移的复势函数弹性解	121
3.9.2	应用举例	128
4	浅埋隧道经验公式与解析理论	132
4.1	浅埋隧道地层位移的经验公式	132
4.2	无初应力地层浅埋圆截面隧道虚像法弹性解	136
4.2.1	萨格塞塔解的推导过程(Sagaseta,1987)	137
4.2.2	沃卢杰-布克解的推导过程(Verruijt and Booker,1996)	141
4.2.3	盾构法隧道开挖的等效地层损失参数(Loganathan and Poulos,1998)	143
4.3	无初应力地层浅埋圆截面隧道的复势函数弹性解	144
4.3.1	保角变换与复势函数的朗朗(Laurent)级数	144
4.3.2	地表边界条件与应用	145
4.3.3	隧道面力边界条件与应用(Verruijt, 1998)	146
4.3.4	隧道位移边界条件与应用(Verruijt, 1997)	149
4.4	有重地层浅埋圆截面隧道应力函数法弹性解	151
4.4.1	边界条件	151
4.4.2	应力函数法求解(Matsumoto and Nishioka, 1991)	152
4.5	有重地层浅埋圆截面隧道-衬砌应力函数法弹性解	159
4.6	无初应力地层浅埋隧道随机介质理论解	162
5	浅埋隧道环境力学解析理论	165
5.1	隧道开挖影响分区	165
5.1.1	筒仓模型与地层竖向应力分布	165
5.1.2	自由地层隧道开挖影响分区与地层荷载的作用	166
5.2	承载地层浅埋隧道开挖塑性区的解析法预测	168
5.2.1	自由地层浅埋隧道开挖以后的地层应力	169
5.2.2	既有地层荷载产生的地层应力	169
5.2.3	承载地层浅埋隧道开挖以后的地层应力与塑性区	173
5.3	桩基荷载地层浅埋隧道开挖塑性区的解析法预测	174
5.3.1	自由地层浅埋隧道开挖以后的应力	175
5.3.2	既有桩基荷载产生的地层应力	175
5.3.3	桩基荷载地层浅埋隧道开挖以后的应力和塑性区	176
5.4	导洞-隔离桩对浅埋隧道开挖影响限制的解析法预测	176

5.4.1	工程概况	176
5.4.2	导洞-隔离桩变位及附近地层变位的解析法预测	177
5.5	浅埋隧道开挖对地下管道影响的解析法预测	182
5.5.1	地下管道的邻近等级	182
5.5.2	地层沉降对地下管道影响的弹性地基梁算法	183
5.6	浅埋隧道开挖对地表房屋影响的等效梁极限拉应变法预测	189
5.6.1	基本思路	189
5.6.2	计算预测步骤	190
5.7	浅埋隧道施工降水引起地层沉降和单桩沉降的简化估算	194
5.7.1	浅埋隧道施工降水引起地层沉降的简化估算	194
5.7.2	浅埋隧道施工降水引起单桩沉降的简化估算	194
5.8	水下浅埋隧道排水量及水压力的解析模型	196
5.8.1	浅埋隧道等水头排水解析模型	197
5.8.2	浅埋隧道等水压排水解析模型	198
5.8.3	隧道衬砌结构地下水压强解析模型	198
6	数值模拟	203
6.1	数值模拟方法的要点和分类	203
6.2	有限元法	206
6.2.1	区域离散与单元模型	206
6.2.2	有限元刚度方程与求解方法	216
6.3	边界元法	223
6.3.1	边界元法的理论基础	223
6.3.2	直接边界元法与边界元法的优缺点	225
6.3.3	间接边界元法的基本公式	226
6.4	有限差分法	230
6.4.1	直接差分与平均差分	230
6.4.2	平均差分模型与拉格朗日算法	232
6.5	离散元法	239
6.5.1	时刻 t , 计算单元的(质心)位移加速度 $\ddot{u}$ 和(刚体)转动加速度 $\ddot{\theta}$	240
6.5.2	时刻 $t + \Delta t/2$, 计算单元的位移速度 $\dot{u}$ 和转动速度 $\dot{\theta}$	243
6.5.3	时刻 $t + \Delta t$, 计算单元的位移 u 和转动角度 θ	243
6.5.4	令 $t \leftarrow t + \Delta t$, 转入上面的第一步, 进入单元的下一个计算循环	243
6.6	隧道开挖与支护的数值模拟方法	244
6.6.1	开挖的数值模拟方法	244
6.6.2	支护的数值模拟方法	245
6.7	算例 1——某地铁车站暗挖施工对附近既有公路隧道结构影响的有限元 计算分析	248
6.8	算例 2——某明挖地铁车站结构侧墙混凝土早期温度和温度应力的有限	

元计算分析	255
6.8.1 新混凝土侧墙早期温度场的计算分析	256
6.8.2 新混凝土侧墙早期温度应力场的计算分析	259
7 物理模拟	264
7.1 物理模拟试验及分类	264
7.2 物理模拟试验的比例常数与相似关系	265
7.3 物理模拟试验的相似条件及其确定方法	266
7.3.1 方程分析法	267
7.3.2 量纲分析法	268
7.4 离心模型试验	271
7.4.1 离心模型试验原理及离心机类型	271
7.4.2 离心模型试验的局限性	276
7.5 隧道模型试验方法	279
7.5.1 隧道模型试验系统	279
7.5.2 隧道开挖的物理模拟方法	280
8 参数估计与不确定性分析	285
8.1 参量模型	285
8.2 参数的平均值	288
8.2.1 参数平均值的类型与特点	288
8.2.2 复合地层的平均弹性模量	290
8.3 参数估计方法的分类	291
8.3.1 逆分析法	291
8.3.2 普通统计法	292
8.3.3 地质统计法	292
8.4 参数估计的逆分析法	292
8.4.1 逆问题解法的分类	292
8.4.2 逆问题求解的间接法	293
8.4.3 后验协方差及后验概率分布	295
8.4.4 逆问题的参数选择与敏感度分析	296
8.5 参数不确定性分析方法	296
8.5.1 参数的不确定性与概率力学模型	296
8.5.2 可靠度模型与破坏概率	297
8.6 随机抽样法	302
8.6.1 参数模型与随机参数生成方法	302
8.6.2 蒙特卡罗法	303
8.7 一阶二次矩法	306
8.8 一阶可靠度法	307
8.8.1 一阶可靠度法的基本思想	307

8.8.2 一阶可靠度法的几何意义	309
8.8.3 一阶可靠度法的计算方法	309
8.8.4 改进一阶可靠度法	311
8.9 算例——某浅埋隧道施工引起附近既有桥梁桩基差异沉降的概率分析 ...	312
附录 A 弹性平面模型的复变函数解法	317
A.1 解析函数	317
A.2 应力函数的复变函数表达式	318
A.3 弹性平面模型的复变函数解	319
A.4 保角映射下弹性平面模型的复变函数解	322
A.5 多连通无限弹性平面模型的复势函数	325
附录 B 无限平面均匀应力场的弹性解	328
B.1 无限弹性平面均匀应力场	328
B.2 无限弹性平面均匀应力场的复势函数	328
B.3 无限弹性平面均匀应力场的位移和应变	328
附录 C 均匀初始应力场深埋圆截面隧道弹性解的复变函数法推导	331
C.1 初始主应力 σ_{xx}^0 单独作用时围岩的应力和位移	331
C.2 初始主应力 σ_{yy}^0 单独作用时围岩的应力和位移	333
C.3 均布径向支护抗力集度 p 单独作用时围岩的应力和位移	333
C.4 σ_{xx}^0 、 σ_{yy}^0 、 p 共同作用时的应力和隧道开挖-支护产生的位移	334
附录 D 深埋椭圆截面隧道的复势函数	335
D.1 深埋有支护椭圆截面隧道基于规则映射函数的复势函数	335
D.2 深埋有支护椭圆截面隧道基于非规则映射函数的复势函数	336
D.3 深埋有支护椭圆截面隧道弹性解的唯一性	338
附录 E 无限长弹性地基梁的解析解	339
E.1 弹性地基梁的基本方程	339
E.2 集中荷载作用下无限长弹性地基梁的变位和内力	340
E.3 三角形分布荷载作用下无限长弹性地基梁的变位和内力	341
参考文献	343

1 固体力学基础

本章首先阐述固体的应力分析和应变分析,然后阐述固体材料本构关系的弹性模型、弹塑性模型和弹-黏塑性模型,最后阐述固体力学的控制微分方程和求解方法,包括:弹性力学控制方程与求解过程,弹性力学平面模型与应力函数解法,弹-黏塑性力学控制方程组与增量本构方程数值积分,黏-弹性力学控制方程组与求解方法。

1.1 应力分析

1.1.1 应力张量

基于固体力学的连续假设,固体的不同质点之间不存在任何空隙,所有物理力学参量都是空间位置(和时间)的连续函数。考虑符合连续假设和小变形假设(参见 1.2.1 节)的固体。固体的内力(internal force)是外因(如外力,温度变化等)作用下固体不同部分之间的相互作用力。对于固体的任意一点和包含该点的某个方位的任意微小面积,面力(traction)向量是单位面积上的内力(或外力),可以表示为

$$\boldsymbol{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{F}}{\Delta A} \quad (1.1)$$

式中, $\boldsymbol{t}$ 为面力向量; ΔA 为包含该点的某个方位的任意微小面积; $\boldsymbol{F}$ 为 ΔA 上连续分布的沿任意确定方向作用的内力(或外力)的合力(拉力,压力,剪力)。

在 xyz 直角坐标系下,可以用面力向量沿 x 、 y 、 z 坐标轴的分量 t_x 、 t_y 、 t_z 把面力向量表示为

$$\boldsymbol{t} = t_x \boldsymbol{i} + t_y \boldsymbol{j} + t_z \boldsymbol{k} \quad (1.2)$$

也可以用面力向量沿任意微小面积 ΔA 的法线方向、切线方向的分量 t_n 、 t_s 把面力向量表示为

$$\boldsymbol{t} = t_n \boldsymbol{n} + t_s \boldsymbol{s} \quad (1.3)$$

式中, $\boldsymbol{i}$ 、 $\boldsymbol{j}$ 、 $\boldsymbol{k}$ 分别代表 x 、 y 、 z 坐标轴的单位向量; $\boldsymbol{n}$ 、 $\boldsymbol{s}$ 分别代表任意微小面积 ΔA 的法线方向、切线方向的单位向量。

对于固体的任意点,包含该点的不同方位的任意微小面积上的面力向量一般是不相同的,但又相互关联,它们的集合称为该点的应力状态(stress state);如图 1.1 所示,在 xyz 直角坐标系下,对于固体的任意点 p ,可以用包含 p 点的三个相互垂直的任意微小面积上的面力向量的集合来表达 p 点的应力状态,写成张量形式为 σ_{ij} ($i, j = x, y, z$),写成矩阵形式为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

式中, $i=j$ 时的 σ_{ij} 为正应力(normal stress), $i \neq j$ 时的 σ_{ij} 为剪应力(shear stress)。

应力张量的下标符号约定:如图 1.1 所示,对于任意应力分量 σ_{ij} ,第一个下标 i 代表该应力分量的作用面的法线方向,第二个下标 j 代表该应力分量的作用方向;例如, σ_{xy} 代表在垂直于 x 方向的面上沿 y 方向作用的应力分量。

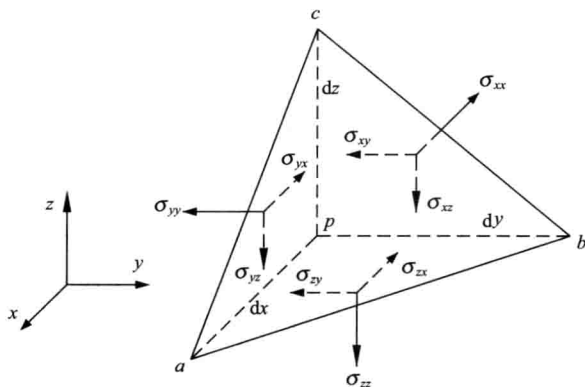


图 1.1 固体任意点 p 的应力状态-应力张量

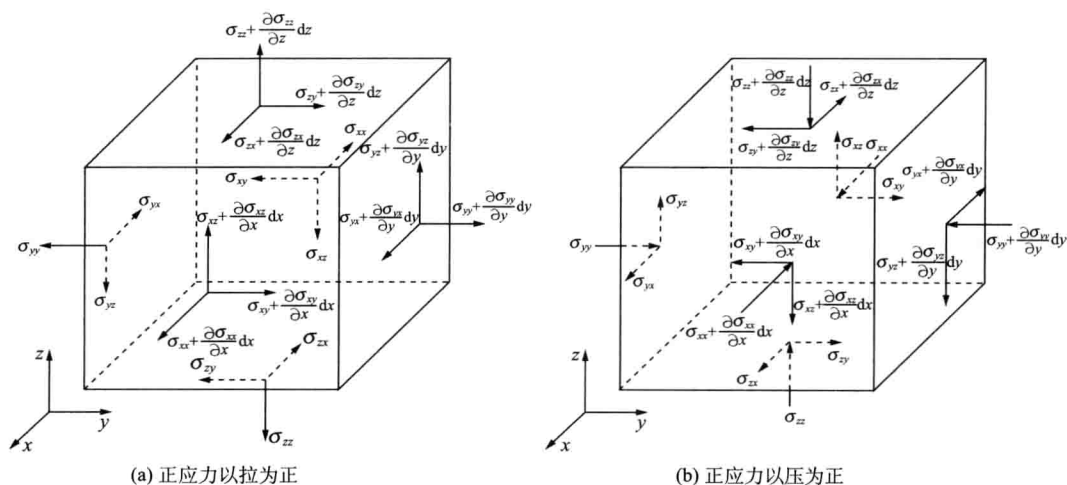
应力的正负号约定:在固体力学中,一般采用的正负号约定是,正应力(法向应力)以拉为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相同为正,简称为“正应力以拉为正”。如图 1.2(a)所示,对于任意应力分量 σ_{ij} ,如果作用在以坐标轴 i 正向为法线的面上,则以沿坐标轴 j 正向作用为正方向;如果作用在以坐标轴 i 负向为法线的面上,则以沿坐标轴 j 负向作用为正方向。

在岩土力学中,因为压应力常见而拉应力不常见,所以为了表述方便,也可以采用与一般固体力学相反的应力正负号约定:正应力以压为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相反为正,简称为“正应力以压为正”;显然,如果采用这样的约定,各个应力分量 σ_{ij} 的正方向如图 1.2(b)所示,而与 1.2(a)中所示正方向恰好相反。

固体的任意点的应力张量表征了该点的应力状态,包含该点的任意微小平面上的应力向量都可以用该点的应力张量和该平面的单位法线向量表示。采用固体力学常用的正负号约定,如图 1.1 所示,在 p 点任意微小距离内的任意微小平面 abc 上,根据任意微小四面体 $pabc$ 沿 x 、 y 、 z 方向的受力平衡条件(由于各个边界平面的面积都是任意微小的,故可以把每个边界平面上的应力都视为均匀分布的应力),可得面力为

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.5a)$$

或用矩阵形式表示为

图 1.2 固体任意点 $dx dy dz$ 微小平行六面体的应力平衡与正方向应力约定

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (1.5b)$$

称为柯西(Cauchy)公式;其中, n_x, n_y, n_z 分别为平面 abc 的外法线相对于 x, y, z 坐标轴的方向余弦^①。

1.1.2 剪应力互等定理与平衡方程

如图 1.2(a)或图 1.2(b)所示,对于固体任意点处的 $dx dy dz$ 微小平行六面体,分别考虑沿 x, y, z 方向通过微小平行六面体形心的三条形心线,根据关于各个形心线的力矩平衡条件,可得剪应力互等定理为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i \neq j \quad (1.6)$$

即剪应力是成对的,应力张量 σ_{ij} 为二阶对称张量,共有 9 个分量,但其中只有 6 个分量是独立的。

如图 1.2(a)所示,设正应力以拉为正,对于固体任意点处的 $dx dy dz$ 微小平行六面体,根据 x, y, z 方向力的平衡条件,可得平衡方程(equilibrium equations),又称纳维叶(Navier)方程^②

① 如果设正应力以压为正,如图 1.2(b)所示,而面力以沿坐标轴正向为正,则在面力-应力关系式(1.5a)或式(1.5b)中,“ σ_{ij} ”必须替换为“ $-\sigma_{ij}$ ”。

② 对于动力问题,沿方向 $i = x, y, z$,体力 f_i 可以表示为真体力 f_{is} 与惯性力 f_{id} 之和, $f_i = f_{is} + f_{id}$;根据达朗贝尔(d'Alembert's)原理, $f_{id} = -\rho d^2 u_i / dt^2$, 其中, ρ 为固体材料的质量密度, u_i 为位移;平衡方程又称为运动方程,即针对微小平行六面体的牛顿第二定律。

如果设正应力以压为正,如图 1.2(b)所示,而体力以沿坐标轴正向为正,则在平衡方程式(1.7a)或式(1.7b)中,“ $\sigma_{ij,j}$ ”必须替换为“ $-\sigma_{ij,j}$ ”。

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad (1.7a)$$

或用张量形式表示为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1.7b)$$

式中, $f_i (i=x, y, z)$ 为 i 方向的体力 (body force, 单位体积内沿 i 方向作用的力)。

1.1.3 主应力和应力不变量

对于固体的任意点, 可以选择包含该点并且单位法线向量为 $n_j (j=x, y, z)$ 的任意微小平面, 使该任意微小平面上没有剪应力, 只有正应力 σ , 而面力可以表示为

$$t_j = \sigma n_j \quad (1.8)$$

这样方位的任意微小平面称为该点的应力主平面, n_j 和 σ 分别称为该点的应力主方向和主应力。

把式(1.8)代入式(1.5a), 可得应力主方向 n_j 和主应力 σ 应该满足的应力张量本征方程, 即

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (1.9)$$

式中, δ_{ij} 为克罗内克 (Kronecker) δ 张量 ($\delta_{ij} |_{i=j} = 1, \delta_{ij} |_{i \neq j} = 0$); 设 σ 为待定常数, 为使关于 n_j 的齐次线性代数方程式(1.9)有非平凡解 (non-trivial solution), 其系数行列式必须等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.10a)$$

或展开为

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (1.10b)$$

这个一元三次代数方程的 3 个独立实根 (本征值) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别称为第一主应力、第二主应力、第三主应力, 3 个系数分别称为第一应力不变量、第二应力不变量、第三应力不变量。

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) \\ &= \sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \sigma_{zz} - \sigma_{yy} \sigma_{zz} \\ &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \end{aligned} \quad (1.11b)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} \sigma_{kk} \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \sigma_{kk} = \det[\sigma_{ij}]$$

$$= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (1.11c)$$

把应力张量本征方程式(1.9)的三个本征值 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别代入,求解可得对应的三个本征向量 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$,即为相互垂直的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 主应力方向的单位向量。

对于给定的应力状态,当坐标系旋转时,应力分量一般都会随之改变,但3个主应力的大小和方向却是不变的,应力分量的3个组合即式(1.11a)至式(1.11c)也是不变的。

1.2 应变分析

1.2.1 应变张量

在荷载的作用下,固体的质点会发生位移。如果所有质点的位移(大小和方向)都相同,即固体仅有刚体位移,则固体没有形状的变化(变形);如果不同质点的位移不同,则固体会发生变形,可以用固体的任意微小单元体的变形来表征固体的变形。对于固体的任意微小平行六面体单元,变形的形式可以分为三种:①任意一个棱边长度的相对(伸长或缩短)改变量,称为线应变(linear strain)或正应变(normal strain);②任意两个正交棱边之间夹角的改变量,称为剪应变(shear strain);③任意微小平行六面体单元(整体)方位的改变量,称为(刚体)旋转变位(rotation)。

如果固体的变形与其变形以前的(初始)形状和尺寸相比很小,则可以采用小变形假设,即假设固体的应变是微小的(infinitesimal strains;线应变一般远小于1%),基于固体的初始形状和初始尺寸,建立线性的位移-应变关系。

应变的正负号约定应该与应力的正负号约定保持一致,可以区分为两种不同的应变正负号约定:①如果采用一般固体力学的应力正负号约定,正应力以拉为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相同为正,则正应变以伸长为正、缩短为负,剪应变以夹角减小为正、增大为负;②如果设正应力以压为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相反为正,正应变的正负号约定与一般固体力学相反,正应变以缩短为正、伸长为负,剪应变以夹角增大为正、减小为负。

设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}^*$ 分别为固体的任意质点在位移前和位移后的位置向量, $\mathbf{u}$ 为该质点的位移向量,如果要求位移和力(集中力、体力、面力)的正负号约定与应力-应变的正负号约定一致,则可以区分两种不同的位移和力的正负号约定:①如果采用一般固体力学的应力-应变正负号约定,正应力以拉为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相同为正,正应变以伸长为正、缩短为负,剪应变以夹角减小为正、增大为负,则位移以自位移前位置至位移后位置的方向为正,即位移和力以沿坐标轴方向为正,反之则为负, $\mathbf{u} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}$;②如果设正应力以压为正,剪应力以其作用面的外法线方向与坐标轴方向相同、而剪应力的方向与(另一)坐标轴方向相反为正,正应变以缩短为正、伸长为负,剪应变以夹角增大为正、减小为负,则位移以自位移后位置至位移

前位置的方向为正,即位移和力以沿坐标轴负方向为正,反之为负, $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{x}^*$ 。

为了建立固体质点位移与固体应变之间的关系,以固体在 xy 平面内的情况为例,如图 1.3 和图 1.4 所示,对于任意质点 $p(x, y)$,考虑包含该质点的规则矩形微元 $pacb$,设 δx 和 δy 分别为微分线段 pa 和 pb 的边长, u_x 和 u_y 分别为该质点沿 x 坐标轴方向和 y 坐标轴方向的位移分量,用泰勒(Taylor)级数展开式表达质点 a 、 b 、 c 的位移,并采用小应变假设(展开式中有关 δx 或 δy 的二次幂及以上次幂的项都是高阶无穷小,可以忽略不计),截取展开式的线性部分,可得质点 a 、 b 、 c 的位移分量分别为

$$\begin{cases} u_x(x + \delta x, y) = u_x(x, y) + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \delta x \\ u_y(x + \delta x, y) = u_y(x, y) + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \delta x \end{cases} \quad (1.12a)$$

$$\begin{cases} u_x(x, y + \delta y) = u_x(x, y) + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} \delta y \\ u_y(x, y + \delta y) = u_y(x, y) + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} \delta y \end{cases} \quad (1.12b)$$

$$\begin{cases} u_x(x + \delta x, y + \delta y) = u_x(x, y) + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} \delta y \\ u_y(x + \delta x, y + \delta y) = u_y(x, y) + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \delta x \end{cases} \quad (1.12c)$$

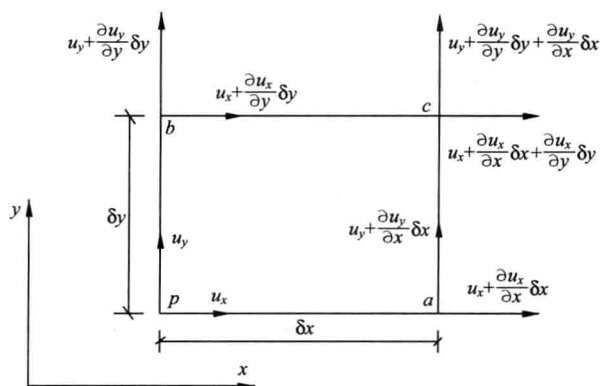


图 1.3 固体质点 p 的位移与邻域质点 a 、 b 、 c 的位移的线性近似(二维示意)

由此,对于规则矩形微元 $pacb$,可以定义 x 轴正应变(线段 pa 的长度的相对伸长量)为

$$\epsilon_{xx} = \frac{u_x(x + \delta x, y) - u_x(x, y)}{\delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.13a)$$

y 轴正应变(线段 pb 的长度的相对伸长量)为

$$\epsilon_{yy} = \frac{u_y(x, y + \delta y) - u_y(x, y)}{\delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (1.13b)$$

xy 平面剪应变(线段 pa 与线段 pb 之间夹角的改变量)为

$$\gamma_{xy} = \frac{u_x(x, y + \delta y) - u_x(x, y)}{\delta y} + \frac{u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y)}{\delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (1.13c)$$

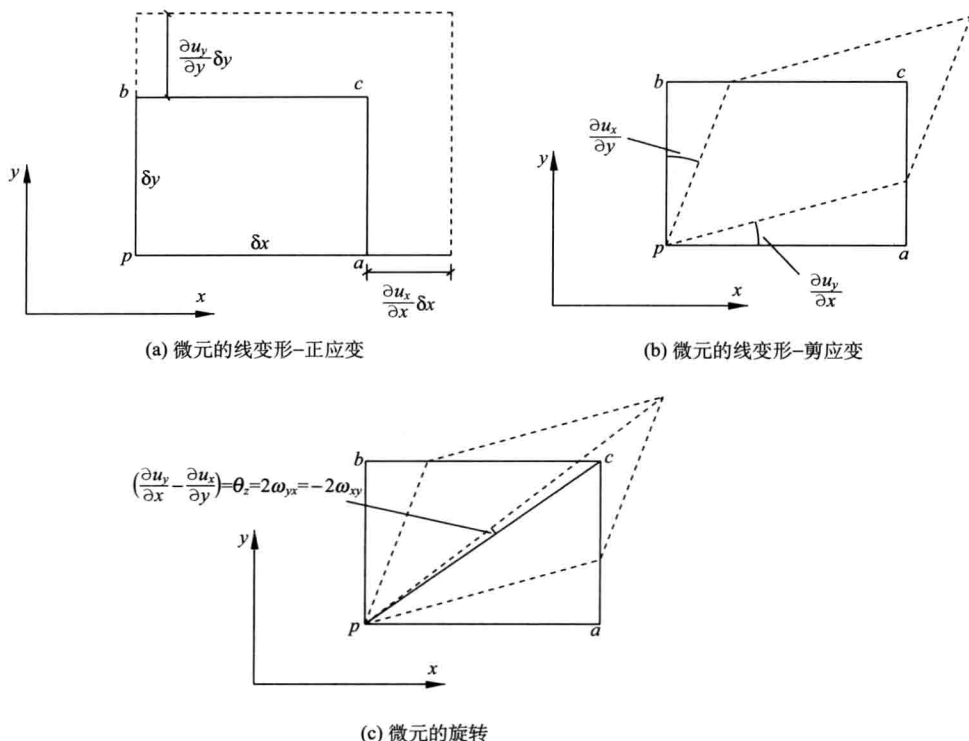


图 1.4 固体微元变形的分解(二维示意)

另外,规则矩形微元 $pacb$ 的旋转角度(线段 pc 关于垂直于 xy 平面的 z 轴的旋转角度,逆时针为正)为

$$\theta_z = \frac{u_y(x + \delta x, y) - u_y(x, y)}{\delta x} - \frac{u_x(x, y + \delta y) - u_x(x, y)}{\delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (1.13d)$$

显然,只有当角变形 $\partial u_y / \partial x$ 与角变形 $\partial u_x / \partial y$ 不相等时,旋转角度 θ_z 才不为零。

把上面关于固体在 xy 平面内的应变分析推广到三维情况,对于固体的任意点,在 xyz 直角坐标系下,考虑包含该质点的规则平行六面体微元,可以定义应变张量为^①

① 由几何方程式(1.14a)或式(1.14b)定义的应变张量是以变形微小为前提的。小变形问题是大变形问题在形变的(二次及以上的)高次幂可以忽略不计时的特例。如果考虑有限变形而非小变形,采用拉格朗日(Lagrange)法或欧拉(Euler)法描述变形,通过分析固体的任意微分线段长度平方的改变量,可以定义拉格朗日应变张量为(吴家龙, 1987)

$$\epsilon_{ij}^L = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2$$

或欧拉应变张量为

$$\epsilon_{ij}^E = (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j})/2$$

如果设正应变以压为正,而位移以沿坐标轴正向为正,则在几何方程式(1.14a)或式(1.14b)中,“ ϵ_{ij} ”必须替换为“ $-\epsilon_{ij}$ ”。