Shibian Hanshu

实变函数（第2版）

张建平　丘京辉◎编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

实 变 函 数

（第 2 版）

张建平　丘京辉　编

东南大学出版社
·南京·

内容提要

本书在 n 维欧氏空间中建立 Lebesgue 测度和积分的理论，突出体现实变函数的基本思想。全书包括：集合、点集、Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分与不定积分、L^p 空间共七章。每一小节讲述概念、定理与例题后，均附有精心挑选的配套基本习题，每一章后均附有整整一节的例题选讲，介绍实变函数解题的各种典型方法与重要技巧，每一章后还列出大量的习题供读者去研究与探索。

本书可作为高等院校数学专业的教材，也可供相关专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实变函数/张建平，丘京辉编. —2 版. —南京：东南大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5641-4986-4

Ⅰ. 实… Ⅱ. ① 张…② 丘… Ⅲ. 实变函数—高等学校—教材 Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 107030 号

实变函数(第 2 版)

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	兴化印刷有限责任公司
开　　本	700 mm×1000 mm 1/16
印　　张	10.25
字　　数	201 千字
版　　次	2014 年 7 月第 2 版
印　　次	2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-4986-4
定　　价	24.00 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025-83791830)

第 2 版前言

《实变函数》第 1 版于 2009 年 5 月出版，由于书中内容深入浅出、结构体系合理，得到众多读者的好评。趁本书再版的机会，我们对原书作了一些修订。主要是纠正了第 1 版中的错漏不当之处，补充了若干例题，个别地方的讲解也有所改变。目的是为了更广地开拓解题视野，并更好地理解抽象理论。

本书正式出版以来，编者收到许多读者的宝贵意见和热情鼓励。苏州大学数学科学学院的侯绳照教授和常熟理工学院数学与统计学院的王见勇教授给予本书高度评价，并结合教学对全书提出了宝贵的修订意见。东南大学出版社的张烨编辑对第 2 版作了认真细致的校勘。编者在此一并表示衷心的感谢！

编者

2014 年 5 月于苏州

前　言

大学数学系的学生常常感到“实变函数”难学。的确，“实变函数”概念抽象，内容艰深，习题难解，其独创的思想方法常隐藏在严谨而难懂的论证过程之后，易使初学者感到困惑。但是，“实变函数”又是一门重要的数学基础课程，是进一步学习“实分析”和“泛函分析”的基础，它的概念、理论、论证技巧和思想方法已渗透到数学乃至其他科学的各个分支，成为我们步入现代数学殿堂不可或缺的阶梯。我们长期在苏州大学从事“实变函数”和“实分析”的教学工作，深感需要根据实际情况编写一本内容深入浅出，通俗易懂，而且具有较多解题示范的实变函数教材，以适应一般师范院校、地方性高校的数学系的需要。由于水平有限，编写过程中难免会有缺点、错误和不当之处，诚恳希望专家同行和使用本书的师生提出宝贵意见。同时我们也指出：由于这是一本教材，我们在编写过程中曾参阅了国内外大量的有关教材和文献，这里不再一一列出。

本书的编写和出版得到了苏州大学数学科学学院、苏州大学教务处和教材科的领导与有关同志的大力支持和热情帮助；还得到了“江苏省高等学校精品教材建设项目”和“苏州大学精品教材建设项目”所提供的基金资助。东南大学出版社的张烨、史静编辑也为本书的出版付出了辛勤的劳动。又，研究生贺飞、杨心情、李博和范茜帮助校对了书稿。在此，我们一并表示衷心的感谢！

编者于 2008 年 8 月

目　　录

1　集　合 …………………………………………………………………… 1
　1.1　集合及其运算 ……………………………………………………… 1
　1.2　映　射 ……………………………………………………………… 3
　1.3　对等与基数 ………………………………………………………… 5
　1.4　可数集 ……………………………………………………………… 8
　1.5　连续基数…………………………………………………………… 10
　1.6　例题选讲…………………………………………………………… 12
　习题一 ………………………………………………………………… 18

2　点　集……………………………………………………………………… 20
　2.1　n 维欧氏空间 ……………………………………………………… 20
　2.2　开集与内点………………………………………………………… 21
　2.3　闭集与极限点……………………………………………………… 24
　2.4　闭集套定理与覆盖定理…………………………………………… 27
　2.5　函数连续性………………………………………………………… 29
　2.6　点集间的距离……………………………………………………… 31
　2.7　Cantor 集 …………………………………………………………… 34
　2.8　稠密性……………………………………………………………… 35
　2.9　例题选讲…………………………………………………………… 37
　习题二 ………………………………………………………………… 42

3　Lebesgue 测度 …………………………………………………………… 45
　3.1　广义实数集………………………………………………………… 45
　3.2　外测度……………………………………………………………… 45
　3.3　可测集……………………………………………………………… 47
　3.4　可测集类…………………………………………………………… 51
　3.5　不可测集…………………………………………………………… 54
　3.6　例题选讲…………………………………………………………… 55
　习题三 ………………………………………………………………… 60

4 **可测函数** …… 63
4.1 可测函数的定义及性质 …… 63
4.2 Egoroff(叶果洛夫)定理 …… 68
4.3 依测度收敛性 …… 69
4.4 Lusin(鲁津)定理 …… 72
4.5 例题选讲 …… 74
习题四 …… 79

5 Lebesgue **积分** …… 81
5.1 非负可测简单函数的积分 …… 81
5.2 非负可测函数的积分 …… 82
5.3 一般可测函数的积分 …… 87
5.4 控制收敛定理 …… 89
5.5 可积函数与连续函数 …… 92
5.6 Lebesgue 积分与 Riemann 积分 …… 92
5.7 重积分与累次积分 …… 96
5.8 例题选讲 …… 100
习题五 …… 110

6 **微分与不定积分** …… 114
6.1 单调函数的可微性 …… 115
6.2 有界变差函数 …… 120
6.3 不定积分的微分 …… 123
6.4 绝对连续函数 …… 126
6.5 例题选讲 …… 129
习题六 …… 136

7 L^p **空间** …… 138
7.1 L^p 空间的定义与有关不等式 …… 138
7.2 L^p 空间($1\leqslant p\leqslant\infty$)的完备性 …… 142
7.3 L^p 空间($1\leqslant p<\infty$)的可分性 …… 147
7.4 例题选讲 …… 149
习题七 …… 154

1 集 合

集合、映射与基数的理论是学习实变函数不可缺少的准备知识，也是以后学习近现代数学的基本概念之一. 本章我们介绍集合、映射与基数的基本知识.

1.1 集合及其运算

集合是指具有某种特定性质的对象的全体. 构成集合的对象称为集合的元素. 不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

若x为集合A的元素，则记为$x\in A$，称为x**属于**A；若x非集合A的元素，则记为$x\notin A$，称为x**不属于**A.

通常用大写字母$A,B,X,Y,\cdots$表示集合，用小写字母$a,b,x,y,\cdots$表示集合中的元素. 表示集合的方法有列举法和描述法. 列举法是列出该集合的所有元素，而描述法是给出该集合元素所特有的性质的刻画.

设集合A是方程$x^2-5x+6=0$的根的全体，则可以用列举法表示为$A=\{2,3\}$，也可以用描述法表示为$A=\{x:x^2-5x+6=0\}$.

本书中记自然数集(不含0)为$\mathbf{N}$，整数集为$\mathbf{Z}$，有理数集为$\mathbf{Q}$，实数集为$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^1$).

定义 1.1.1 设有集合A与B，如果集合A的每一个元素都属于集合B，则称集合A为集合B的**子集**，记为$A\subset B$或$B\supset A$，分别读为A**包含于**B或B**包含**A.

若$A\subset B$，而B中有元素$x\notin A$，则称集合A为集合B的**真子集**.

空集$\varnothing$为任何集合的子集.

定义 1.1.2 如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与集合B**相等**，记为$A=B$.

例 1.1.1 $\{x\in\mathbf{R}:-1<x<1\}=\{x\in\mathbf{R}:x^2<1\}$.

若有集合A,B,C，可以构造集合族$X=\{A,B,C\}$，这里集合A,B,C分别是集合族X的元素. 若有一族集合，也可以构造集合族$X=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，这里$\Lambda$是指标集，对每个$\lambda\in\Lambda$，集合$A_\lambda$是集合族$X$的元素.

若在某个问题中，所考虑的集合皆为X的子集，则称X为**全集**(或**基本集**).

定义 1.1.3 设有集合 A 与 B，称集合 $\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$；称集合 $\{x: x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$.

对集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，可分别定义**并集与交集**为

$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x: \exists\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda\}$ 与 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x: \forall\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda\}$.

例 1.1.2 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实函数，则有 $\{x\in\mathbf{R}: f(x)>0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f(x)>\frac{1}{k}\right\}$.

定义 1.1.4 设有集合 A 与 B，称集合 $\{x: x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为 A 与 B 的**差集**，记作 $A\backslash B$. 当 B 是 A 的子集时，称 $A\backslash B$ 为集合 B 相对于集合 A 的**补集**或**余集**. 集合 B 相对于全集 X 的补集简称为集合 B 的补集，记为 $B^c=X\backslash B$.

定理 1.1.1 集合运算有如下性质：

(1) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$；

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(4) 分配律 $A\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda), A\cup(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda)$.

命题 1.1.2 设 X 是全集，则有

(1) $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing, X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$；

(2) $(A^c)^c=A, A\backslash B=A\cap B^c$；

(3) $A\subset B\Leftrightarrow A^c\supset B^c, A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^c$.

例 1.1.3 (1) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\subset B\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, A_\lambda\subset B$；

(2) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\supset B\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, A_\lambda\supset B$.

定理 1.1.3(De Morgan 法则) 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是全集 X 上的一个集族，则有

(1) $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$； (1.1)

(2) $(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$. (1.2)

证 (1) $x\in(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c\Leftrightarrow x\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, x\notin A_\lambda$

$$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda^c\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

(2) 把(1.1)式中的 A_λ 换成 A_λ^c，有 $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c)^c=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$，再两边取余集即得.

定义 1.1.5 设 $\{A_k\}$ 是一集列，称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的**上限集**，记作 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$；

称$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$为集列$\{A_k\}$的**下限集**，记作$\varliminf_{k\to\infty}A_k$. 若上限集与下限集相等，则称集列$\{A_k\}$的**极限集**存在并等于上限集或下限集，记为$\lim_{k\to\infty}A_k$.

若集列$\{A_k\}$满足$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，称为**递增集列**，这时有$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$.

若集列$\{A_k\}$满足$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，称为**递减集列**，这时有$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$.

例 1.1.4 设有集列$\{A_k\}$，证明：

(1) $\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\{x:$有无限多个$A_k$含$x\}$；

(2) $\varliminf_{k\to\infty}A_k=\{x:$至多有限多个$A_k$不含$x\}$.

从而有$\varliminf_{k\to\infty}A_k\subset\varlimsup_{k\to\infty}A_k$.

证 (1) $x\in\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Leftrightarrow\forall n$，有$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\forall n,\exists k\geqslant n$，有$x\in A_k\Leftrightarrow x\in\{x:$有无限多个$A_k$含$x\}$.

(2) $x\in\varliminf_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\Leftrightarrow\exists n$，使$x\in\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\exists n$，对$\forall k\geqslant n$，有$x\in A_k\Leftrightarrow x\in\{x:$至多有限多个$A_k$不含$x\}$.

定义 1.1.6 设X,Y是两个集合，则称$\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$为集合X与Y的**直积集**(或**笛卡儿积**)，记为$X\times Y$. 类似地，可定义n个集合$X_1,X_2,\cdots,X_n$的直积集如下：

$$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

若$x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in X$，称$x_i$为$x$的第$i$个**坐标**. 称集合$X_i$为直积集$X$的第$i$个**坐标集**. 通常把$n$个相同的集合$X$的直积集记为$X^n$.

例 1.1.5 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(n,m):n,m\in\mathbf{N}\}$.

例 1.1.6 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

1.2 映 射

定义 1.2.1 设X,Y是两个非空集合，若有某个法则f，使每个$x\in X$有唯一确定的$y\in Y$与之对应，则称f为从X到Y的**映射**，记为$f:X\to Y$.

对每个$x\in X$，记Y中与x对应的点y为$f(x)$，并称y为点x在映射f下的**象**. 对每个$y\in Y$，如果存在$x\in X$使得$y=f(x)$，则称x为点y在映射f下的

原象.

定义 1.2.2 若 $A\subset X$,记 $f(A)=\{y\in Y:\exists x\in A, y=f(x)\}$,并称 $f(A)$ 为集 A 在映射 f 下的**象集**. 若 $B\subset Y$,记 $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$,并称 $f^{-1}(B)$ 为集 B 关于映射 f 的**原象集**.

定义 1.2.3 设 $f:X\to Y$ 为映射. 若任意的 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$,有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 是从 X 到 Y 的一个**单射**. 若 $f(X)=Y$,则称 f 是从 X 到 Y 的一个**满射**. 若映射 f 既为单射又为满射,则称 f 是从 X 到 Y 的一个**双射**(或**一一映射**).

定义 1.2.4 设 $f:X\to Y$ 是双射,则对任意 $y\in Y$,存在唯一 $x\in X$,使 $y=f(x)$,称这个从 Y 到 X 的对应法则为 f 的**逆映射**,记作 $f^{-1}:Y\to X$.

命题 1.2.1 设映射 $f:X\to Y$,则

(1) 对于任意 $A\subset X$,有 $A\subset f^{-1}(f(A))$;

(2) 对于任意 $B\subset Y$,有 $B\supset f(f^{-1}(B))$.

证 (1) 设 $x\in A$,则 $f(x)\in f(A)$,故 $x\in f^{-1}(f(A))$,所以有 $A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 设 $y\in f(f^{-1}(B))$,则存在 $x\in f^{-1}(B)$,使 $y=f(x)$,故 $y\in B$,所以有 $B\supset f(f^{-1}(B))$.

命题 1.2.2 设映射 $f:X\to Y$,则

(1) $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$, $B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$;

(2) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$, $f(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$;

(3) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$, $f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$;

(4) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

证 我们仅给出(4)的证明.

(4) $x\in f^{-1}(B^c)\Leftrightarrow f(x)\in B^c\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in(f^{-1}(B))^c$.

其余的关系式请读者自证,并请举出使上述(2)式中真包含关系成立的例子.

定义 1.2.5 设有映射 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$,则称 $h(x)=g[f(x)]$ 所定义的映射 $h:X\to Z$ 为 g 与 f 的**复合映射**,记作 $h=g\circ f$.

定义 1.2.6 设 $A\subset X$,映射 $f:X\to Y$, $g:A\to Y$. 若 $f(x)=g(x)(x\in A)$,则称映射 g 为 f 在集合 A 上的**限制**,并记为 $g=f|A$. 此时,也称映射 f 为 g 在 X 上的一个**扩张**(或**延拓**).

定义 1.2.7 设 X 为全集,子集 $A\subset X$,则称函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\in X\backslash A.\end{cases}$$

为定义在 X 上的 A 的**特征函数**.

例 1.2.1 设 X 为全集,A,B 均为 X 的子集,则特征函数有如下性质:

(1) $A\subset B\Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)(x\in X)$;

(2) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$;

(3) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A\backslash B}(x)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)]$.

1.3 对等与基数

对于有限集来说,我们可以通过计数的方法来判定它含有几个元素,从而确定两个不同的有限集所含元素的多少.但由于每个无限集都含有无限多个元素,故无法通过计数的方法来判定两个不同的无限集谁所含的元素更多些.因此我们要借助双射,来引入两个集合所含有的元素一样多的概念,即所谓“对等”的概念.

定义 1.3.1 设有集合 A,B,若存在一个从 A 到 B 的双射,则称集合 A 与 B **对等**,记作 $A\sim B$.

若存在 $n\in\mathbf{N}$,使 $E\sim\{1,2,\cdots,n\}$,则称 E 为**有限集**,空集 $\varnothing$ 也称为有限集.若集合 E 不是有限集,则称 E 为**无限集**.

例 1.3.1 $\mathbf{N}\sim\{2n:n\in\mathbf{N}\}$.

证 令 $f(n)=2n$,则 $f:\mathbf{N}\to\{2n:n\in\mathbf{N}\}$是双射.

例 1.3.2 $[0,1]\sim[0,4]$.

证 令 $f(t)=4t$,则 $f:[0,1]\to[0,4]$是双射.

例 1.3.3 $(-1,1)\sim\mathbf{R}^1$.

证 令 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$,则 $f:(-1,1)\to\mathbf{R}^1$ 是双射.

命题 1.3.1 设有集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,满足

(1) 对 $\forall\lambda\in\Lambda$,有 $A_\lambda\sim B_\lambda$;

(2) 对 $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$ 且 $\alpha\neq\beta$,有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$,$B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing$.

则$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.

证　对每个$\lambda\in\Lambda$,有$A_\lambda\sim B_\lambda$,故存在双射$f_\lambda:A_\lambda\to B_\lambda$.对$\forall x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,存在唯一的$\lambda\in\Lambda$,使$x\in A_\lambda$.令$f(x)=f_\lambda(x)$,则可证$f:\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\to\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$是双射.

命题 1.3.2　对等关系有如下性质:

(1) 自反性　$A\sim A$;

(2) 对称性　若$A\sim B$,则$B\sim A$;

(3) 传递性　若$A\sim B$,$B\sim C$,则$A\sim C$.

定理 1.3.3(Cantor-Bernstein 定理)　若集合X对等于Y的一个子集,集合Y对等于X的一个子集,那么集合X与Y对等.

证　存在两个单映射$f:X\to Y$和$g:Y\to X$,记$Y_0=Y$,令

$$\begin{aligned}&X_1=X\backslash g(Y_0),\quad Y_1=Y\backslash f(X_1),\\&X_2=X\backslash g(Y_1),\quad Y_2=Y\backslash f(X_2),\\&\cdots\qquad\qquad\qquad\cdots\\&X_k=X\backslash g(Y_{k-1}),Y_k=Y\backslash f(X_k),\\&\cdots\qquad\qquad\qquad\cdots\end{aligned}$$

再令$A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k$,$B=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}Y_k=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}Y_k$,则有

$$X=A\cup(X\backslash A),Y=B\cup(Y\backslash B)\tag{1.3}$$

因为f与g为单射,所以有$A\sim f(A)$以及$B\sim g(B)$,且有$g(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}Y_k)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}g(Y_k)$.

再由$f(A)=f(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f(X_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(Y\backslash Y_k)=Y\backslash(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}Y_k)=Y\backslash B$,知$A\sim Y\backslash B$.以及由$g(B)=g(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}Y_k)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}g(Y_k)=\bigcap\limits_{k=0}^{\infty}(X\backslash X_{k+1})=X\backslash(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}X_{k+1})=X\backslash A$,知$B\sim X\backslash A$.

所以根据命题 1.3.1 及(1.3)式,知$X\sim Y$.

推论 1.3.4　设有集合A,B,C,且有$A\subset B\subset C$及$A\sim C$,则$A\sim B\sim C$.

命题 1.3.5　任一区间I(开区间、闭区间或半开区间)均与直线$\mathbf{R}^1$对等.

证　取开区间$(a,b)\subset I$,则有$(a,b)\subset I\subset\mathbf{R}^1$,且$(a,b)\sim\mathbf{R}^1$,所以$I\sim\mathbf{R}^1$.

基数的概念　集合之间的对等关系"～"是一种等价关系,按照等价关系"～"将集合进行分类,两个集合当且仅当它们对等时属于同一类.对每一类予以一个记号,称此记号是该类中任一集的**基数**(或**势**).集合E的基数记作$\overline{\overline{E}}$.

有限集的基数为其所含元的个数,空集的基数为 0.

定义 1.3.2 设有集合 A 与 B,记$\overline{\overline{A}}=\alpha,\overline{\overline{B}}=\beta$,若集合 A 与 B 的一个子集对等,则称 α **不大于** β,记作 $\alpha\leqslant\beta$(或 $\beta\geqslant\alpha$);若 $\alpha\leqslant\beta$(或 $\beta\geqslant\alpha$)且 $\alpha\neq\beta$,则称 α **小于** β,记作 $\alpha<\beta$(或 $\beta>\alpha$).

现在可以把定理 1.3.3 写作:设有基数 α,β,若 $\alpha\leqslant\beta,\beta\leqslant\alpha$,则 $\alpha=\beta$.

可以证明,对任意两个基数 α,β,则三个关系式"$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$"中至多成立一式(证明较易),且至少成立一式(证明较难,见那汤松所著《实变函数论》下册).

命题 1.3.6 设映射 $f:X\to Y$,则

(1) 若 f 为单映射,有$\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$;

(2) 若 f 为满映射,有$\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

证 (1) 若 $f:X\to Y$ 为单映射,则 $f:X\to f(X)$为双射,故$\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{f(X)}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$.

(2) 若 f 为满映射,对每个 $y\in Y$,从非空集 $f^{-1}(y)$中取定一点记作 $g(y)$,则 $g:Y\to X$ 是单映射,于是由(1)知$\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

例 1.3.4 若 $A\subset B$,且 $A\sim(A\cup C)$,试证明 $B\sim(B\cup C)$.

证 由 $A\sim(A\cup C)$,存在双射 $f:A\to A\cup C$. 令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A;\\ x, & x\in B\backslash A.\end{cases}$$

则 $g:B\to B\cup C$ 是满射(不一定是单射),故由命题 1.3.6 知$\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 另一方面,因为 $B\subset(B\cup C)$,知$\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 合之有 $B\sim(B\cup C)$.

定义 1.3.3 集合 E 的所有子集所成之集称为 E 的**幂集**,记作 $P(E)$,即

$$P(E)=\{A:A\subset E\}$$

若 E 的基数为 λ,则 $P(E)$的基数通常记为 2^{λ}.

定理 1.3.7(无最大基数定理) 设 E 是任一集合,则$\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{P(E)}}$.

证 (反证法)若存在双射 $f:E\to P(E)$,令 $A=\{x\in E\mid x\notin f(x)\}$. 由 $A\in P(E)$,以及 f 为满映射,存在 $y\in E$,使 $f(y)=A$.

(1) 若 $y\in A$,则由 A 的定义,有 $y\notin f(y)=A$,得矛盾.

(2) 若 $y\notin A$,则由 A 的定义,有 $y\in f(y)=A$,也得矛盾.

从而可得 E 与 $P(E)$不对等. 另外,易知$\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{P(E)}}$,所以$\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{P(E)}}$.

1.4 可数集

定义 1.4.1 自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”），若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 A 为**可数集**. 有限集与可数集统称为**至多可数集**，若无限集 E 不是可数集，则称 E 为**不可数集**.

集合 A 为可数集当且仅当 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$，即 A 中的元可以用自然数来编号.

例 1.4.1 集合 $\{2n:n\in\mathbf{N}\}$ 与 $\{n^3:n\in\mathbf{N}\}$ 都是可数集.

例 1.4.2 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可数集，因为 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$.

定理 1.4.1 任一无限集 E 必含一个可数子集.

证 取 $x_1\in E$，因为 $E\setminus\{x_1\}\neq\varnothing$，可以取 $x_2\in E\setminus\{x_1\}$；若已取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，因为 $E\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\neq\varnothing$，可以取 $x_{n+1}\in E\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，于是得到集合

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}.$$

它即为无限集 E 的一个可数子集.

上述定理说明：在无限集的基数中，最小的基数是 $\aleph_0$.

例 1.4.3 设 A 是有限集，B 是可数集，则 $A\cup B$ 是可数集.

证 设 $A\setminus B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m,\cdots\}$，则

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m,\cdots\}$$

所以 $A\cup B$ 是可数集.

定理 1.4.2 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集.

证 对 $x=(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，令 $f(x)=2^n3^m$，则 $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是一个单射，所以有 $\overline{\overline{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{N}}}$. 又显然有 $\overline{\overline{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}}\geqslant\overline{\overline{\mathbf{N}}}$，所以 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$.

不难知道：若 A,B 是可数集，则直积集 $A\times B$ 也是可数集. 一般地，用归纳法可以证明：若每个 $E_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 是可数集，则直积集 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 也是可数集.

定理 1.4.3 若每个 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是可数集，则并集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可数集.

证 不妨设 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，对每个 n，设 $A_n=\{a_{nm}:m\in\mathbf{N}\}$，则有

$$A=\{a_{nm}:n,m\in\mathbf{N}\}.$$

令 $f(a_{nm})=(n,m)$，则 $f:A\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是双射，由定理 1.4.2 知 A 是可数集.

上述定理也常称为：可数个可数集之并是可数集. 另外不难证明：若有至多可数个集作并集，且每个集合都是至多可数集，则其并集也是至多可数集.

推论 1.4.4 $\mathbf{R}^1$ 中的有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集，$\mathbf{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

证 对每个 n，令 $A_n=\left\{\dfrac{m}{n}:m\in\mathbf{Z}\right\}$，显然有 $A_n\sim\mathbf{Z}$，所以 $\mathbf{Q}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集，从而知 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

例 1.4.4 设 Γ 是可数集 E 的所有有限子集的全体，则 Γ 是可数集.

证 设可数集 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 对每个 n，令 $E_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 E_n 的幂集 $P(E_n)$ 是有限集. 因为 E 的所有有限子集的全体 Γ 即为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}P(E_n)$，所以 Γ 是至多可数集. 又 Γ 显然不是有限集，所以 Γ 是可数集.

例 1.4.5 设 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间，若每个开区间的端点为有理数，则 Γ 是至多可数集.

证 对 Γ 中的开区间 (a,b)，令 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 中的点 (a,b) 与之对应，得到从 Γ 到 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 的一个单射，所以 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}=\aleph_0$，从而可得 Γ 是至多可数集.

例 1.4.6 设 Γ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间，若其中任意两个开区间互不相交，则 Γ 是至多可数集.

证 对 Γ 中的每个开区间 I，取定 I 中的一个有理数作为 $f(I)$，则 $f:\Gamma\to\mathbf{Q}$ 是一个单射，所以 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$，从而可得 Γ 是至多可数集.

例 1.4.7 设 Γ 是平面上以有理点为中心，以有理数为半径的圆的全体，则 Γ 为可数集.

证 记有理点集为 $\mathbf{Q}^2$，正有理数集为 $\mathbf{Q}^+$. 对 $A\in\Gamma$，设 A 的圆心为 (a,b)，半径为 r，令 $f(A)=(a,b,r)$，则 $f:\Gamma\to\mathbf{Q}^2\times\mathbf{Q}^+$ 是双射，所以 $\Gamma\sim\mathbf{Q}^2\times\mathbf{Q}^+\sim\mathbf{N}$.

定理 1.4.5 若 E 为无限集，A 为至多可数集，则 $E\sim E\cup A$.

证 不妨设 $E\cap A=\varnothing$，由定理 1.4.1，知无限集 E 有可数子集 D. 因为 A 为至多可数集，于是有 $D\sim A\cup D$. 再由命题 1.3.1 知

$$E=(E\setminus D)\cup D\sim(E\setminus D)\cup(D\cup A)=E\cup A.$$

推论 1.4.6 设 E 为不可数集，A 是 E 的可数子集，则 $E\sim E\setminus A$.

证 首先易知 $E\setminus A$ 不是有限集，因为否则 $E=(E\setminus A)\cup A$ 要为可数集，得矛盾. 所以 $E\setminus A$ 必为无限集，而 A 是可数集，所以由定理 1.4.5 知 $E\setminus A\sim(E\setminus A)\cup A$

$=E$.

例 1.4.8 E 是无限集当且仅当:E 与某个真子集对等.

证 充分性.若 E 是有限集,则 E 与每个真子集不对等,矛盾.

必要性.因 E 是无限集,取 $x\in E$,由定理 1.4.5,有 $E\setminus\{x\}\sim(E\setminus\{x\})\cup\{x\}=E$,这里 $E\setminus\{x\}$ 即为与 E 对等的真子集.

1.5 连续基数

为了建立集合之间的对应关系,有时要借助于 p 进位小数.

设 p 是大于 1 的自然数,而非负整数列 $\{n_k\}$ 满足 $0\leqslant n_k\leqslant p-1(k=1,2,3,\cdots)$,则

$$a=\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{p^2}+\frac{n_3}{p^3}+\cdots\frac{n_k}{p^k}+\cdots$$

为收敛级数,其和简记为 $a=0.n_1n_2n_3\cdots n_k\cdots$,并称为 p **进位小数**.

一个 p 进位小数 a,若从某一项以后 n_k 全为 0,则称 a 为 p **进位有限小数**,否则称 a 为 p **进位无限小数**.

对于给定的 $p>1$,在 $(0,1]$ 中的每个实数 a 可以唯一地表示为一个 p 进位无限小数.但要注意,某些有理数既可表示为 p 进位无限小数,又可表示为 p 进位有限小数.例如

当 $p=10$ 时,有 $0.2000\cdots=0.1999\cdots$;

当 $p=3$ 时,有 $0.2000\cdots=0.1222\cdots$.

定义 1.5.1 实数集 $\mathbf{R}$ 的基数记作 c,称为**连续基数**(或**连续统**).

在 $\mathbf{R}^1$ 中,因为任一区间均与 $\mathbf{R}^1$ 对等,所以任一区间均具连续基数 c.另外不难证明:无理数集具连续基数 c,超越数集具连续基数 c(不是代数数的实数称为超越数).

命题 1.5.1 设 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{0,1\},k=1,2,3,\cdots\}$,则 E 具连续基数 c.

证 (1) 对 $a\in(0,1]$,把 a 表示为二进位无穷小数 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$,令 $f(a)=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$,则 $f:(0,1]\to E$ 是单射,故有:$\overline{\overline{(0,1]}}\leqslant\overline{\overline{E}}$.

(2) 对 $b\in E$,设 $b=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$,令 $f(b)=0.b_1b_2b_3\cdots$(注意,这里是十进位