经济数学基础

Fundamental of Economic Mathematics

赵　韬　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

经济数学基础

经济数学基础

赵 韬 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础 / 赵韬编著. —杭州：浙江大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-308-10521-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 204727 号

经济数学基础
赵 韬 编著

责任编辑 吴昌雷
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 浙江云广印业有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 24
字 数 584 千
版 印 次 2012 年 9 月第 1 版 2012 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-10521-7
定 价 52.00 元(含章节达标练习)

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前　言

“经济数学基础”是高职高专经济与管理学科各专业的一门必修基础课，课程以培养应用型人才为目标，依据高职高专教育的办学指导思想及人才培养模式，以高职高专《经济数学基础课程教学基本要求》为指导，注重贯彻“掌握概念、以应用为目的，以必需、够用为度”的教学原则，考虑到高职学生基础差异大，学生分化严重的特点，加强分析基础，淡化了理论推导及其繁琐的证明，站在经济的角度分析问题，让经济专业学生真正领会开设这门课是为“用数学”服务这一目的。着力培养学生数学素养及理论思维能力以及学生应用数学方法解决实际经济问题的能力。教学上要引导学生亲身经历实际问题的数学化、模型化过程。

“经济数学基础”课程肩负提高学生综合素质的重任。数学的严谨性、逻辑性特点可以培养学生良好的思维素质，循序渐进的数学学习过程可以培养学生积极向上、脚踏实地、求真务实的科学精神和自主学习的能力。通过本课程的学习，使学生获得微积分的基本知识，培养学生的基本运算能力，增强学生用定性与定量相结合的方法处理经济问题的初步能力。总而言之，“经济数学基础”为培养具有扎实数学基础的高素质的经济管理人才而服务。

考虑到高职高专数学课时不足的问题，本书包含函数和极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用，参考学时60课时。

本书特点：

(1) 利用现实案例引出数学知识，激发学生学习兴趣，突出数学学习的价值；

(2) 突出数学概念与经济问题的联系，增强适用性；

(3) 较好地把高中和大学知识进行衔接，做到有据可查，逐渐拓广；

(4) 每章后配有各章知识的总结归纳，方便学生把握重点；

(5) 书后配有学习过程中需要的高中公式，便于学生复习、查询；

(6) 独立装订配套章节练习，便于学生巩固基础、提高技能，利于教师批改。

由于编者的能力有限，文中难免会有不妥和疏漏，敬请广大读者和专家批评指正，在此深表谢意！编者联系方式：a791467375@163.com(邮箱)，18685265776(手机)。

编者

2012年7月

目　录

第一章　函数(function)

知识目标

(1)熟练掌握:基本初等函数的概念、性质、图像、基本运算以及函数关系的建立方法,掌握经济学中常用函数;

(2)理解:函数的概念和性质;

(3)了解:复合函数的分解与合并.

能力目标

(1)能计算、化简较简单的基本初等函数;

(2)对应用问题,能准确建立函数关系式;

(3)会求经济学中常用函数,并能进行盈亏分析.

案例引入

某大楼有 50 间办公室出租,若每间每月租金 120 元,则可全部租出,租出的办公室每月需由房主负担维修费 10 元,若每月租金每提高一个 5 元,将空出一间办公室,试求房主所获得利润与闲置办公室的间数的函数关系,并确定每间月租金多少时才能获得最大利润?这时利润是多少?

要解决类似的经济问题,首先要了解函数及其性质,其次要学习函数关系的建立方法及最值的求法.

第一节　函数的概念和性质

函数思想的实质是运用运动变化、相互联系、相互制约的观点去认识和处理有关的问题,它既是认识问题时在观念上的指导,又是一种处理问题时策略上的选择,它可以利用一个事实的信息去研究推出另一个事实。现代数学的每个分支都要应用函数.

一、映射(mapping)的概念

【定义 1.1】 设 X 与 Y 是两个非空集合,若对 X 中的每一个元素 x,均可找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个映射,记为 $f:X\rightarrow Y$,将

x 的对应元素 y 记作 $y=f(x)$，并称 y 为映射 f 下 x 的**像**，而称 x 为映射 f 下 y 的**原像**.

【例 1.1】 设 $A=\{$商场中的所有商品$\}$，$B=\{$商场中商品九月份的销量$\}$，则

$f:A\to B$　　y 是商品 x 九月份的销量，是一个映射.

【例 1.2】 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6,7\}$，则 $f:A\to B$，$f(1)=4$，$f(2)=5$，$f(3)=6$ 是一个映射.

【例 1.3】 某化工公司统计去年农用化肥月生产量如表 1.1 所示：

表 1.1　农用化肥月生产量

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量 / 万吨	51	52	56	62	59	55	58	50	61	54	42	41

从表 1.1 可以看出过去一年该公司月产量 x(万吨)与月份 t 之间有着确定的对应关系. 当月份 t 在 1 至 12 之间每取一整数值时，从表中便得出月产量 x 的唯一确定的对应值.

二、函数的概念

【定义 1.2】 设 x 与 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一个数值时，变量 x 按照某种对应法则 f 总有一个确定的数值 y 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

称 D 为该函数的**定义域**. 记为 D_f. 称 x 为自变量，称 y 为因变量，当 x 取遍 D 内的各个数值时，对应的变量 y 取值的全体组成**数集**称作这个函数的**值域**，记为 M_f.

注意：

(1) 映射中的 X 和 Y 可以是由实数构成的数集，也可以是图形构成的集合，而函数中的定义域 D_f 和值域 M_f 只能是数集；

(2) 映射和函数都允许多个 x 对应一个 y，不允许一个 x 对应多个 y；

(3) 映射和函数中的 x 都要找到对应的 y(即 x 不能有剩余)，而 y 却允许有个别的没有对应的 x(即 y 可以有剩余)；

(4) 函数的定义域和对应法则是函数的两个主要要素，利用它们可以推出值域；

(5) 如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是同一函数(相同函数)；

(6) 在实际问题中，函数的定义域是由实际意义确定的；

(7) 函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集；

(8) 函数 $y=f(x)$ 中的自变量也可以用 t,u,θ 等表示；对应法则 f 也可以用 h,g,F 等表示.

【例 1.4】 若 $y=f(x)=3x^2-x+2$，求 $f(1)$，$f(2a+1)$，$f(t^2)$.

解　$f(1)=3\cdot 1^2-1+2=4$，

$f(2a+1)=3\cdot(2a+1)^2-(2a+1)+2=12a^2+10a+4$，

$f(t^2)=3\cdot(t^2)^2-t^2+2=3t^4-t^2+2$.

【例 1.5】 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & -1<x\leqslant 0 \\ x^2, & 0<x\leqslant 1 \\ 3-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(2)$.

解　$f(0)=0-1=-1$，

$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$,

$f(2)=3-2=1$.

1. 求解定义域通常考虑的方向

研究一个函数,首先要考虑它的定义域,可从以下几个方向入手:

(1)当函数是多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 时,定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2)分式函数的分母不能为零;

(3)偶次根式的被开方式必须大于或等于零,奇次根式的被开方式为一切实数;

(4)对数函数 $y=\log_a x$ 的底 a 必须大于零且不等于1,真数 x 必须大于零;

(5)正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$;

(6)余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$;

(7)反正弦函数 $y=\arcsin x$ 和反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都是 $[-1,1]$;

(8)若函数表达式中包含上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

【例 1.6】 求函数 $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,必须使 $\begin{cases}\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0\\ 1-x\neq 0\end{cases}$,

解得:$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ x\neq 1\end{cases}$,求交集,得 $-1\leqslant x<1$,

所以原函数的定义域为 $[-1,1)$.

【例 1.7】 求函数 $y=\sqrt{1-x}+\arcsin\frac{x+1}{2}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,必须使 $\begin{cases}1-x\geqslant 0\\ \left|\frac{x+1}{2}\right|\leqslant 1\end{cases}$,

解得:$\begin{cases}x\leqslant 1\\ -3\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$,求交集,得 $-3\leqslant x\leqslant 1$,

所以原函数的定义域为 $[-3,1]$.

【例 1.8】 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln x$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,必须使 $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$,

即 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x>0\end{cases}$,求交集,得 $0<x\leqslant 4$,

所以函数的定义域为 $(0,4]$.

【例 1.9】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x,x>1\end{cases}$,求函数的定义域.

解 因为分段函数的定义域等于各个段落定义域的并集,所以该函数的定义域是 $[0,+\infty)$.

【例 1.10】 若 $y=f(2x-1)$ 的定义域为 $[-1,2]$，求 $y=f(4+2x)$ 的定义域.

解 因为 $-1\leqslant x\leqslant 2$，所以 $-3\leqslant 2x-1\leqslant 3$，

函数 $y=f(t)$ 中自变量 t 的取值范围是相同的，

所以 $-3\leqslant 4+2x\leqslant 3$，$-7\leqslant 2x\leqslant -1$，$-\dfrac{7}{2}\leqslant x\leqslant -\dfrac{1}{2}$，

所以函数 $y=f(4+2x)$ 的定义域是 $[-\dfrac{7}{2},-\dfrac{1}{2}]$.

2. 同一函数的判定方法

必须两函数定义域(**不化简**)与对应法则(**化简后**)都相同，才是同一函数.

【例 1.11】 判断下列各组函数是否表示同一函数.

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$； (2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$.

解 (1)虽然 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，但它们的对应法则不同，所以它们不是同一函数；

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而 $y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，定义域不同，尽管化简后它们的对应法则相同，但它们仍然不是同一函数.

3. 函数的表示方法

函数的表示方法就是用来确定函数的对应法则的方法.

(1)表格法(列表法)——将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

【例 1.12】 某工厂全年 1~6 月原材料进货数量如表 1.2 所示，这里表达的是时间和原材料进货数量之间的关系.

表 1.2 表格法

T/月	1	2	3	4	5	6
Q/吨	11	10	12	11	12	12

(2)图像法——在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

【例 1.13】 需求函数 $Q=Q(P)$ 与供给函数 $S=S(P)$. 如图 1.1 所示，P 表示商品价格，Q 表示需求量(供给量)，E 点为需求和供给平衡点.

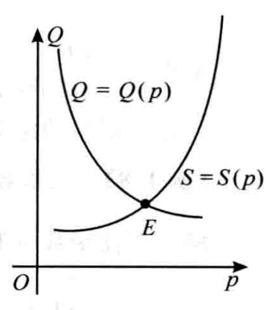

图 1.1

(3)解析法(公式法)——将自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

【例 1.14】 已知某商品的总成本函数为 $C(q)=100+\dfrac{q^2}{4}$，表示了产品数量 q 与总成本 C 之间的函数关系.

【例 1.15】 求下列函数的解析式.

(1)设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$； (2) 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 (1)换元法——令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，代入原式得

$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3$，所以 $f(x)=x^2+x+3$；

(2)配方法——由 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 可以配方出 $(x+\frac{1}{x})^2-2$.

故 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$,

令 $x+\frac{1}{x}=t$,得 $f(t)=t^2-2$,所以 $f(x)=x^2-2$.

根据函数解析式的形式不同,函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种:
①显函数:函数 y 由 x 的解析表达式直接表示.例如,$y=x^2-1$.
②隐函数:函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定.
例如,$\ln y=\sin(x+y)$.
③分段函数:函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析式.
分段函数的定义域是各段定义域的并集.

【例 1.16】 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,图形如图 1.2 所示.

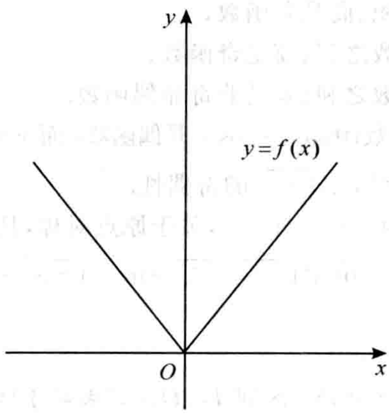

图 1.2

【例 1.17】 某销售商规定,某产品销量在 10 件以内(包括 10 件)时按每件 50 元销售,超过 10 件时,超过部分按每件优惠 10 元销售,试建立销售收入与销售量之间的函数关系.

解 设销售量为 x,销售收入为 y,则可建立以下函数表达式:

$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 50\times 10+40\times(x-10), & x>10\end{cases},$$

即
$$y=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 100+40x, & x>10\end{cases}.$$

分段函数是其定义域上的一个函数,而不是多个函数.
三种表示方法各有所长,相互补充,结合使用,将会对函数有更深入的了解.

三、函数的性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D_f 关于**原点对称**,若对于任意的 $x\in D_f$,
恒有 ①$f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;

②$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1.3)，奇函数的图形关于原点对称(见图 1.4).

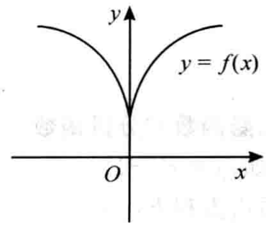

图 1.3

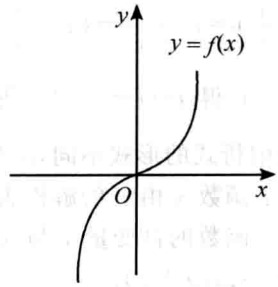

图 1.4

说明:(1)若 $y=f(x)$在 $x=0$ 有定义，则当 $y=f(x)$是奇函数时，必有 $f(0)=0$.

(2) 两个偶函数之和、差、积、商仍是偶函数;

两个奇函数之和、差仍是奇函数;

两个奇函数之积、商是偶函数;

奇函数与偶函数之积、商是奇函数;

奇函数与偶函数之和、差是非奇非偶函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数;函数 $y=\cos x$ 是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

【例 1.18】 讨论函数 $y=\ln\sqrt{1+x^2}$的奇偶性.

解 因为函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，且

$$f(-x)=\ln\sqrt{1+(-x)^2}=\ln\sqrt{1+x^2}=f(x),$$

所以 $f(x)$为偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，区间 $I\subseteq D_f$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2，当 $x_1<x_2$时，恒有

①$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加函数**(见图 1.5);

②$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少函数**(见图 1.6).

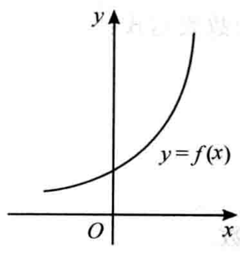

图 1.5

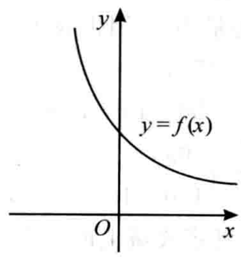

图 1.6

严格单调增加和严格单调减少的函数统称为**单调函数**.

3. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

则称函数 $f(x)$在 I 上**有界**，或称 $f(x)$是 I 上的**有界函数**. 如果这样的 M 不存在，则称

函数 $f(x)$在 I 上**无界**,或称 $f(x)$是 I 上的**无界函数**.

中学最常见的有界函数有:

①$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在$x\in(-\infty,+\infty)$上 $y\in[-1,1]$,是有界函数;

②$y=\arctan x$ 在$x\in(-\infty,+\infty)$上 $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,是有界函数;

③$y=\operatorname{arccot} x$ 在$x\in(-\infty,+\infty)$上 $y\in(0,\pi)$,是有界函数.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,如果存在常数 $T>0$,使得对一切 $x\in D_f$,

都有 $f(x+T)=f(x)$恒成立,

则称函数 $y=f(x)$为**周期函数**,T 为函数 $y=f(x)$的**周期**.

例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数;$y=|\sin x|$是以 π 为周期的周期函数.

若 T 为 $y=f(x)$的一个周期,则 $kT(k=\pm1,\pm2,\cdots)$也都是它的周期. 所以一个周期函数一定有无穷多个周期,周期函数的周期通常是指其最小正周期.

四、函数关系(数学模型)的建立

函数关系的建立,是将实际问题转化成数学问题的关键,只有建立正确的函数关系,才能运用数学方法解决常见的最值、利润、成本等问题。这一能力的培养尤其要引起教师们的注意.

建立函数关系步骤:

(1)**审题**:读懂题意、分析关系、领悟实质,确定自变量及其定义域;

(2)**建模**:根据题意建立因变量与自变量的函数关系式,注意变量范围的限制及其他约束条件;

(3)**求解**:选择合适的数学方法,设计合理的运算途径,求出问题的解;

(4)**作答**:将数学问题的答案还原为实际问题的答案。在这之前要检验结果是否符合实际问题的要求.

【例 1.19】 一种汽车出厂价为 45000 元,使用后它的价值按年降价率$\frac{1}{3}$的标准贬值,试求此车的价值 y(元)与使用时间 t(年)的函数关系.

解 使用一年的汽车的价值 $y=45000\left(1-\frac{1}{3}\right)$;

使用两年的汽车的价值 $y=45000\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=45000\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$;

故使用 t 年的汽车的价值 $y=45000\left(1-\frac{1}{3}\right)^t=45000\left(\frac{2}{3}\right)^t$.

【例 1.20】 有两家健身俱乐部,第一家每月会费 300 元,每次健身收费 1 元,第二家每月会费 200 元,每次健身收费 2 元,若只考虑经济因素,你会选择哪一家俱乐部(根据你每月健身次数决定)?

解 设每月健身次数为 x,则第一家每月总费用 $c_1=300+x$,第二家每月总费用 $c_2=$

$200+2x$.

令 $c_1=c_2$，则 $300+x=200+2x$，解得：$x=100$；

当 $0<x<100$ 时，$c_1>c_2$，这时选择第二家俱乐部；

当 $x>100$ 时，$c_1<c_2$，这时选择第一家俱乐部；

当 $x=100$ 时，$c_1=c_2$，这时选择任一家俱乐部都可以.

【例 1.21】 某工厂生产某种产品，年产量为 x，每台售价 250 元，当年产量为 600 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 600 台时，经广告宣传又可再多售出 200 台，每台平均广告费 20 元，生产再多，本年就售不出去了，建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

解 （ⅰ）当 $0\leqslant x\leqslant 600$ 时，$R=250x$；

（ⅱ）当 $600<x\leqslant 800$ 时，$R=250x-20(x-600)=230x+1.2\times10^4$；

（ⅲ）当 $x>800$ 时，$R=800\cdot 250-20\times 200=1.96\times10^5$；

故 $R(x)=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 230x+1.2\times10^4, & 600<x\leqslant 800\\ 1.96\times10^5, & x>800\end{cases}$.

【例 1.22】(案例解答) 某大楼有 50 间办公室出租，若每间每月租金 120 元，则可全部租出，租出的办公室每月需由房主负担维修费 10 元，若每月租金每提高一个 5 元，将空出一间办公室，试求房主所获得利润与闲置办公室的间数的函数关系，并确定每间月租金多少时才能获得最大利润？这时利润是多少？

解 设 x 为每间月租金，y 为闲置办公室的间数，L 为利润，

则 $L=(50-y)(x-10)$，

由已知当 $x\geqslant 120$ 时，y 是 x 的一次函数，故设 $y=ax+b$，

当 $x=120$ 时，$y=0$；当 $x=125$，$y=1$，

故有 $\begin{cases}0=120a+b\\1=125a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\b=-24\end{cases}$.

故 $y=\dfrac{1}{5}x-24$，则 $x=5y+120$，

故 $L=(50-y)(5y+120-10)=(50-y)(5y+110)$，

即 $L=-5(y-14)^2+6480$，　$y\in[0,50]$，

故当 $y=14$，函数 L 可获得最大值 6480，

此时　$x=5\cdot 14+120=190$，

当闲置办公室为 14 间时，获得最大利润 6480 元，此时每间月租金为 190 元.

五、反函数(inverse function)

函数 $y=f(x)$ 所要反映的是 y 怎样随着 x 而定的法则，当然，我们也可以考察 x 随 y 而定的法则.

例如，在商品销售中，已知某种商品的价格(即单价)为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数：