华章教育

高等院校计算机教材系列

DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

离散数学及其应用

陈琼 主编
马千里 周育人 副主编
胡劲松 罗荣华 参编

机械工业出版社
China Machine Press

高等院校计算机教材系列

DISCRETE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

离散数学及其应用

陈琼 主编
马千里 周育人 副主编
胡劲松 罗荣华 参编

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用 / 陈琼主编．—北京：机械工业出版社，2014.8
（高等院校计算机教材系列）

ISBN 978-7-111-47488-3

I. 离…　II. 陈…　III. 离散数学 – 高等学校 – 教材　IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 169946 号

本书根据计算机专业对离散数学的教学要求编写而成。全书共分数理逻辑，集合、关系和函数，组合数学，图论，代数结构五个部分。书中对离散数学的基本概念、理论和方法进行了严谨、系统的阐述，配备了大量的典型例题和不同难度的习题，注重理论联系实际，给出了丰富的应用实例，可为计算机专业学生和科研人员提供必要的数学基础知识。

本书可用于普通高等院校计算机科学、计算机工程各专业本科生的离散数学教材，也可作为工程技术人员和其他专业学生的参考书。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码：100037）
责任编辑：曲　熠　　责任校对：董纪丽
印　　刷：北京诚信伟业印刷有限公司　　版　　次：2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：185mm×260mm　1/16　　印　　张：16.5
书　　号：ISBN 978-7-111-47488-3　　定　　价：35.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

前　言

离散数学研究离散结构及其相互关系，是计算机科学与工程各专业的核心基础课。离散数学充分描述了计算机科学离散性的特点，是数据结构、编译系统、数据库原理、计算机组成原理、算法分析、人工智能、信息安全、计算机网络等计算机专业课程的数学基础。学习离散数学不仅能够帮助学生更好地理解与掌握专业课程的教学内容，同时也可以为学生在将来的计算机科学技术的研究和工程应用中打下坚实的理论基础。

作为计算机专业的重要课程，我们在教学过程中参考了国内外许多优秀的离散数学教材，精心组织教学内容，在强化学生的理论基础的同时，注重理论和实践的结合，培养学生运用基本理论解决问题的能力。本教材按照计算机科学与技术专业对离散数学的教学要求、结合教学组老师多年来的教学实践编写而成。

本书对离散数学的核心知识单元进行系统的理论阐述，对离散数学的分析证明方法进行严谨的介绍，并通过丰富的实际应用实例介绍实际离散系统的建模，帮助读者在掌握坚实的基础理论的同时，理解离散数学理论在科学研究和后续课程中的应用，了解理论是如何解决实际应用问题的，从而提高学生应用理论知识分析问题和解决问题的能力，提高计算思维能力。本书分数理逻辑，集合、关系和函数，组合数学，图论，代数结构五部分，每部分均配有大量典型例题和难易程度不同的习题，并紧密结合实际应用，介绍离散数学在科学领域的应用，使学生对离散数学课程的认识由抽象、枯燥转变为易学、有趣。本书内容翔实，理论与实践相结合、深入浅出，是一本学术性和可读性都很强的教学参考书。

本教材适用于计算机科学、计算机工程、软件工程等不同专业方向和不同学校的离散数学教学。与本教材配套的电子教案和习题解答将陆续推出，以便为使用本教材的学生和教师提供参考。

本书的编写和出版得到机械工业出版社的大力支持，得到许多教师及业界同仁的帮助，收到了许多宝贵的意见，在此我们表示衷心的感谢。编写过程中，我们参考了很多离散数学方面的教材和参考资料，在此也向文献作者表示感谢。由于编著者水平有限，书中难免存在疏漏和不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

2014 年 5 月

教学建议

教学章节		教学要求	课时
第一部分 数理逻辑	第 1 章 命题逻辑	掌握命题的基本概念 掌握联结词的定义、能准确应用它们表示命题 掌握命题公式的分类和公式类型的判定 熟悉命题演算的等价关系式 了解其他联结词和最小全功能联结词集 掌握求主析取范式和主合取范式的方法 掌握推理的概念和命题演算的推理	10～12
	第 2 章 谓词逻辑	掌握谓词逻辑的基本概念 了解谓词公式的解释和分类 熟悉谓词演算的关系式 了解前束范式的概念 掌握谓词演算推理理论和推理问题的证明 了解谓词演算推理的应用	6～8
第二部分 集合、关系和函数	第 3 章 集　合	掌握集合的概念及表示 掌握集合间的关系判断 熟悉集合的运算	2～4
	第 4 章 关系和函数	掌握关系的定义和表示 掌握关系的复合运算和逆运算 掌握关系性质的定义和判断、关系闭包的求法 掌握等价关系、偏序关系的概念及证明 掌握函数的定义 掌握单射、双射和满射函数的判断和证明 了解集合的基数的概念，掌握无限集合的比较方法	14～18
第三部分 组合数学	第 5 章 计　数	掌握基本计数法则及其应用 掌握排列和组合计数方法、多重集的排列和组合计数方法 掌握容斥原理及应用 了解鸽巢原理	4～6
	第 6 章 高级计数技术	掌握递推方程、常系数线性齐次递推方程和常系数线性非齐次递推方程的求解方法 掌握生成函数的定义 了解生成函数的应用	8～10
第四部分 图　论	第 7 章 图　论	掌握图的基本概念和图的分类 理解通路、回路和连通的概念 掌握用邻接表、邻接矩阵、关联矩阵、可达矩阵表示图的方法 了解图的应用	6～8
	第 8 章 特 殊 图	掌握欧拉图和哈密顿图的判定 了解带权图，掌握求最短路径算法，了解旅行商问题和中国邮路问题的求解方法 理解匹配的概念，掌握二分图的定义及判定 掌握平面图的定义和判定 了解图的着色的概念及其应用	6～8

（续）

教学章节		教学要求	课时
第四部分 图　论	第 9 章 树	掌握无向树、有向树的概念 掌握最小生成树的概念、求最小生成树的方法，了解最小生成树的应用 掌握根树的概念，理解根树的遍历算法 了解根树的应用，掌握求前缀码、最优二元树的方法及其应用，了解决策树的概念	4～6
第五部分 代数结构	第 10 章 代数系统	掌握代数系统的定义、性质和分类，代数系统的同态和同构的概念 掌握群、半群、子群的定义、性质及证明方法 掌握循环群和置换群的概念和相关结论的证明 了解环和域的概念及证明	8
	第 11 章 格与布尔代数	掌握格、分配格、有界格、有补格、有补分配格的概念，能够证明格中的等式或不等式 掌握判定一个偏序集或代数系统是否构成格的方法 掌握布尔代数的概念，了解布尔代数在数字电路中的应用	8
总课时			80～92

说明：

1)完成全部教学内容，建议教学课时为 80～92，不同学校可以根据各自的教学要求和计划课时数对教学内容进行取舍。

2)如果计划课时数较少，可以只讲第一、二、四部分，即数理逻辑，集合、关系和函数，图论。计划课时为 48。第一、二、四部分中，1.3.2 节、1.3.3 节、3.4 节、3.5 节、4.8.5 节、5.4 节、8.2.3 节、8.4.3 节、9.4.3 节可以略去不讲。

目　录

第三部分　组合数学

第四部分　图　　论

第五部分　代数结构

第一部分

数 理 逻 辑

第1章 命题逻辑

逻辑学是研究思维规律及推理的形式结构的科学。数理逻辑是用数学方法研究推理过程的科学，是计算机科学的理论基础之一。数理逻辑不仅对理解数学推理十分重要，而且在计算机电路设计、计算机程序设计、程序设计正确性的证明、程序设计语言、人工智能等计算机科学的其他领域都有广泛的应用。命题逻辑是数理逻辑的基本组成部分，是以命题为推理的基本单位的逻辑系统。本章介绍命题逻辑的基本知识、基本思想和方法。

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题的概念

定义 1.1.1 **命题**是用陈述句表示的一个或者为真或者为假，但不能同时既为真又为假的判断语句。

命题代表人们进行思维时的一种判断，或者是肯定，或者是否定，因此命题只能为真或假，把这种真假的结果称为命题的**真值**。如果命题的真值为真，称该命题为**真命题**，其真值可用“T”或“1”表示；如果命题的真值为假，称该命题为**假命题**，其真值可用“F”或“0”表示。

例 1.1.1 判断下列句子哪些是命题？若是命题，判断其真值。

1)2＋3＝5。

2)2＋3＝6。

3)北京是中国的首都。

4)2013 年 5 月 1 日是星期日。

5)$3-x=5$。

6)请关上门。

7)几点了？

8)除地球外的星球有生物。

9)多漂亮的花啊！

10)对每一对实数 x、y，都有 $x+y=y+x$。

解 1)、2)、3)、4)、8)、10)是命题，5)、6)、7)、9)不是命题。1)、3)、10)的真值为 1，2)、4)的真值为 0。8)是命题，能判断真假，其真值是唯一确定的，只是目前人们不知道。5)不是命题，因为 x 是变元，它的真值不确定。6)是祈使句，7)是疑问句，9)是感叹句。祈使句、疑问句、感叹句表示的语义没有真假，所以都不是命题。 ◀

注意：表示命题的陈述句可判断真假，具有唯一真值。悖论是陈述句，但不能判断其

真假，不是命题。例如，“我只给所有不给自己理发的人理发”不是命题。

引入英文字母表示任意的命题，就像用字母表示数学变元那样。表示命题的符号称为命题变元，通常用 p、q、r…或 P、Q、R…表示命题变元。命题变元没有真值，只有表示一个确定的命题后，才有真值。如用 p 表示命题“$2+3=6$”，这时 p 的真值为0，也可以用 p 表示命题“$2+3=5$”，这时 p 的真值为1。

定义 1.1.2 表示命题的陈述语句如果不能分解为更简单的陈述语句，称这样的命题为**简单命题**或**原子命题**；表示命题的陈述句是由一个或几个简单句和连词组合而成的，称为**复合命题**。

本书中用小写英文字母表示简单命题。如用 p 表示简单命题“北京是中国的首都”。数理逻辑中定义了相应于自然语言中的连词的联结词，通常用英文字母和联结词的组合表示复合命题。

定义 1.1.3 用英文字母或英文字母和联结词的组合表示命题，称为**命题的符号化**。

1.1.2 联结词

定义 1.1.4 设 p 是一个命题，$\neg p$ 表示一个新命题“非 p”。“$\neg$”是**否定**联结词，命题 $\neg p$ 称为 p 的否定。当且仅当 p 为假时，$\neg p$ 为真。

真值表给出命题真值之间的关系。表1.1.1给出命题变元 p 及其否定的所有可能的真值，称为否定联结词“$\neg$”的真值表。

例如，p：今天是晴天，则 $\neg p$：今天不是晴天。注意，$\neg p$ 不能理解为“今天是雨天”，因为“今天是晴天”的否定并不是“今天是雨天”，还可能是“今天是阴天”、“今天是下雪天”等。

表 1.1.1 $\neg p$ 的真值表

p	$\neg p$
1	0
0	1

自然语言中表示否定的连词“非”、“不”、“没有”、“无”、“并非”等都可用 $\neg$ 来表示。

定义 1.1.5 设 p、q 表示任意两个命题，$p\wedge q$ 可表示复合命题“p 并且 q”。“$\wedge$”称为**合取**联结词。命题 $p\wedge q$ 称为 p 和 q 的合取。当且仅当 p 和 q 同时为真时，$p\wedge q$ 为真，真值表见表1.1.2。

表 1.1.2 $p\wedge q$ 的真值表

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例如，p：今天是晴天；q：今天去公园。则 $p\wedge q$ 表示今天是晴天并且今天去公园。

自然语言中的“和”、“与”、“也”、“并且”、“既……又……”、“不仅……而且……”、“虽然……但是……”等表示同时的连词都可用 $\wedge$ 来表示。假设 p：小李聪明；q：小李用功。则“小李既聪明又用功”和“小李不仅聪明而且用功”均可符号化为 $p\wedge q$。

定义 1.1.6 设 p、q 是任意两个命题，$p\vee q$ 可表示复合命题“p 或 q”，“$\vee$”称为**析取**联结词。命题 $p\vee q$ 称为 p 和 q 的析取。当且仅当 p 和 q 都为假时，$p\vee q$ 为假。真值表见表1.1.3。

表 1.1.3 $p\vee q$ 的真值表

p	q	$p\vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

例如，p：电灯不亮是灯泡有问题所致；q：电灯不亮是线路有问题所致。则 $p \vee q$ 表示电灯不亮是灯泡或线路有问题所致。

析取联结词可表示自然语言中的“或”、“可能……可能……”、“或者……或者……”等。自然语言中的“或”具有二义性，有时表示兼容性或，有时表示不兼容性或。由定义可以看出，$p \vee q$ 表示的是兼容性或，即容许 p 和 q 的真值中一个为真，或 p 与 q 的真值都为真。而对于命题“派小王或小李中的一人去开会”，其中的“或”表达的是不兼容性或（又称排斥或）。假设 p 表示命题“派小王去开会”，q 表示命题“派小李去开会”，该句不能符号化为 $p \vee q$ 的形式，而应符号化为 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$。在命题逻辑中，将不兼容性或称为“异或”。

定义 1.1.7 设 p、q 为任意两个命题，$p \to q$ 可表示复合命题“如果 p，则 q”，“$\to$”称为**蕴涵**联结词。命题 $p \to q$ 称为 p 与 q 的蕴涵式。当且仅当 p 为真、q 为假时，$p \to q$ 为假。真值表见表 1.1.4。

表 1.1.4 $p \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

例如，p：今天天气晴朗；q：我们去海滩。则 $p \to q$ 表示“如果今天天气晴朗，我们就去海滩”。

蕴涵式 $p \to q$ 表示的逻辑关系是：p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。因此形如“如果 p，则 q”、“如果 p，那么 q”、“当 p 则 q”、“p 仅当 q”等复合命题都可以符号化为 $p \to q$ 的形式。形如 $p \to q$ 的蕴涵式中，称 p 为蕴涵前件，q 为蕴涵后件。

例 1.1.2 将下列命题符号化。

1）如果天气晴朗，我们去海滩。

2）仅当天气晴朗，我们去海滩。

解 假设，p：天气晴朗；q：我们去海滩。

1）可符号化为 $p \to q$，因为“天气晴朗”是“我们去海滩”的充分条件。

2）可符号化为 $q \to p$，这句的“天气晴朗”是“我们去海滩”的必要条件。 ◀

注意，只有 p 的真值为真而 q 的真值为假时，$p \to q$ 的真值为假；当 p 和 q 的真值都为真，或 p 的真值为假（无论 q 的真值为真还是假）时，$p \to q$ 的真值都为真。蕴涵式的前件的真值为假，后件的真值为任何值时，蕴涵式的真值都为真，对此，可以理解为当规定的前提条件不成立时，得出任何结论都是有效的。例如，命题“如果 $2+3=6$，则太阳从东方升起”和“如果 $2+3=6$，则太阳从西方升起”的真值都为真。

这两个命题的假设和结论之间没有什么联系，在自然语言中，我们不会使用这样的条件句。在数学推理中，条件语句作为一个数学概念不依赖于假设和结论之间的语义关系。

定义 1.1.8 设 p、q 为任意两个命题，$p \leftrightarrow q$ 可表示命题“p 当且仅当 q”。“$\leftrightarrow$”称为**等价**联结词。命题 $p \leftrightarrow q$ 称为等值式。当且仅当 p 和 q 同时为真或同时为假时，$p \leftrightarrow q$ 为真。真值表见表 1.1.5。

表 1.1.5 $p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

等值式 $p \leftrightarrow q$ 表示 p 与 q 互为充分必要条件的逻辑关系，也就是表示形如“p 当且仅当 q”、“如果 p，那么 q，反之亦然”等的命题。

例如，p：两个三角形是全等的；q：两个三角形的三条对应边相等。则 $p \leftrightarrow q$ 表示“两个三角形是全等的当且仅当它们的三条对应边相等”。

也可以用一个英文字母来表示复合命题，但在推理问题的研究中有时是不适合的。对于一个复合命题，通常先分析出其中包含的简单命题及它们之间的关系，分别用英文字母表示每一个简单命题，选用合适的联结词表示命题间的关系，然后用联结词联结表示简单命题的字母，组成复合命题的表示式。

例 1.1.3　将下列命题符号化。

1)虽然天气很冷，老王还是来了。

2)小王和小李是好朋友。

3)小王和小李是好学生。

4)小王或小李中的一人是游泳冠军。

5)只有学过微积分或数学系的学生，才可以选修这门课。

6)如果明天早晨 6 点不下雨，我就去跑步。

7)今天下雨与 $3+3=6$。

8)登录服务器必须输入一个有效的口令。

9)$2+3=5$ 的充要条件是加拿大位于亚洲。

解　1)设 p：天气很冷；q：老王来了。则 1)可符号化为 $p \wedge q$。

2)这句虽然有连词“和”，但是个简单句，可用 p 表示“小王和小李是好朋友”。

3)这句中的连词“和”连接两个简单句“小王是好学生”和“小李是好学生”，分别用 p 和 q 表示这两个简单命题，则可符号化为 $p \wedge q$。

4)这句中的“或”是不兼容性或，因此应符号化为$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$，其中 p 表示“小王是游泳冠军”，q 表示“小李是游泳冠军”。

5)这句含有 3 个简单命题，可分别用 p、q、r 来表示，设 p：学过微积分的学生；q：数学系的学生；r：你可以选修这门课。这句中含有的“或”是兼容性或，“只有……才……”的表达方式表示“你学过微积分或是数学系的学生”是“你可以选修这门课”的必要条件，所以，这个命题可以符号化为 $r \rightarrow (p \vee q)$。

6)设 p：明天早晨 6 点下雨；q：我去跑步。则 6)可符号化为$\neg p \rightarrow q$，或者也可以符号化为$\neg q \rightarrow p$。

7)设 p：今天下雨；q：$3+3=6$。则 7)可符号化为 $p \wedge q$。

8)设 p：登录服务器；q：输入一个有效的口令，则 8)可符号化为 $p \rightarrow q$。

9)设 p：$2+3=5$；q：加拿大位于亚洲，则 9)可符号化为 $p \leftrightarrow q$。　◀

有些命题在自然语言中可能是没有意义的，如上例中的命题 7)，其中包含的两个简单句语义上没有联系，逻辑上是合取关系。在数理逻辑中，$p \wedge q$、$p \vee q$、$p \rightarrow q$、$p \leftrightarrow q$ 中的 p 和 q 可以没有语义上的联系。

这里定义了 5 个主要联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。其中“$\neg$”是一元联结词，“$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$”是二元联结词。与普通运算符一样，可以规定运算的优先级，优先顺序为$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$。例如，$p \vee q \rightarrow r$ 等同于$(p \vee q) \rightarrow r$。若有括号，先进行括号中的内容的

运算。括号有时被省略，如$\neg p\wedge q$是$\neg p$和q的合取，这里是省略了$\neg p$的括号，即$(\neg p)\wedge q$，而不是p和q的合取的否定，即$\neg(p\wedge q)$。合取运算符的优先级高于析取运算符，但这个规则不好记，所以使用括号来区别合取运算符和析取运算符的顺序。对于条件运算符和双条件运算符，也使用括号区分它们的运算顺序。

例 1.1.4 将下列命题符号化，并指出它们的真值：

1)1＋1＝2 和 2＋3＝6。

2)1＋1＝2 或猴子是飞禽。

3)若 2＋3＝6，则猴子是飞禽。

4)若猴子不是飞禽，则 1＋1＝2 和 2＋3＝6。

5)若 2＋3＝6 或猴子是飞禽，则 1＋1＝2。

6)2＋3＝6 当且仅当猴子不是飞禽。

解 设p：1＋1＝2，q：2＋3＝6，r：猴子是飞禽，则p表示的命题真值为 1，q表示的命题真值为 0，r表示的命题真值也为 0。因而命题符号化为：

1)$p\wedge q$，真值为 0，因为p和q中有一个为 0。

2)$p\vee q$，真值为 1，因为p和q中有一个为 1。

3)$q\rightarrow r$，真值为 1，因为这个条件蕴涵式的前件为 0，当条件蕴涵式的前件为 0 时，无论它的后件的真值为 1 还是 0，这个条件蕴涵式的真值都为 1。

4)$\neg r\rightarrow p\wedge q$，真值为 0，因为这个条件蕴涵式的前件为 1，后件为 0。

5)$q\vee r\rightarrow p$，真值为 1，原因同 3)。

6)$q\leftrightarrow\neg r$，真值为 0，因为q为 0，$\neg r$为 1。 ◀

除了这五个联结词外，还定义了一些表示其他逻辑关系的联结词。常用的有与非联结词、或非联结词和异或联结词等。下面给出它们的定义。

定义 1.1.9 设p和q是任意两个命题，$p\uparrow q$可表示复合命题“p和q的与非”，“$\uparrow$”称为**与非**联结词。命题$p\uparrow q$称为p和q的与非式。当且仅当p和q同时为真时，$p\uparrow q$为假。真值表见表 1.1.6。可以看出，与非式$p\uparrow q$和$\neg(p\wedge q)$等值。

表 1.1.6 $p\uparrow q$ 的真值表

p	q	$p\uparrow q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

定义 1.1.10 设p、q是任意两个命题，$p\downarrow q$可表示复合命题“p和q的或非”，“$\downarrow$”称为**或非**联结词。命题$p\downarrow q$称为p和q的**或非式**。当且仅当p和q同时为假时，$p\downarrow q$为真。真值表见表 1.1.7。可以看出，或非式$p\downarrow q$和$\neg(p\vee q)$等值。

表 1.1.7 $p\downarrow q$ 的真值表

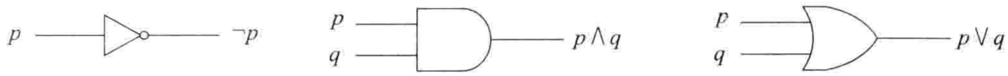
p	q	$p\downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

定义 1.1.11 设p和q是任意两个命题，$p\oplus q$可表示复合命题“p、q之中恰有一个成立”，“$\oplus$”称为**异或**(不兼容性或)联结词。命题$p\oplus q$称为p和q的异或式。当且仅当p和q恰有一个为真时，$p\oplus q$为真。真值表见表 1.1.8。可以看出，异或式$p\oplus q$和$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$等值。

表 1.1.8 $p\oplus q$ 的真值表

p	q	$p\oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

在计算机中，这些联结词表示的逻辑关系可以用数字电路中的门电路实现，例如，表示“非”逻辑关系的否定联结词¬用数字电路中的“非门”实现，∧联结词用“与门”实现，∨联结词用“或门”实现，→和↔实际上可以用¬、∧和∨三个联结词来表示，所以可以用非门、与门和或门组合的电路来实现。图 1.1.1 是非门、与门和或门的电路符号。



非门　　与门　　或门

图 1.1.1 逻辑门电路符号

非门有一个输入端和一个输出端，与门和或门有两个或两个以上的输入端和一个输出端。与非、或非和异或逻辑关系可用与非门、或非门和异或门实现。在计算机电路中经常用到这些门电路。

例 1.1.5 用逻辑电路实现命题公式$(p \vee q) \wedge \neg p$。

解 可以用图 1.1.2 所示的逻辑电路实现命题公式$(p \vee q) \wedge \neg p$。 ◀

逻辑联结词广泛应用于信息检索中，例如，大部分网络搜索引擎支持布尔检索技术。在布尔检索中，联结词 AND 用于匹配同时包含两个检索项的记录，联结词 OR 用于匹配至少包含一个检索项的记录，而联结词 NOT 用于排除某个特定的检索项。采用布尔检索时，细心安排逻辑联结词的使用有助于有效找到特定主题的网页和信息。

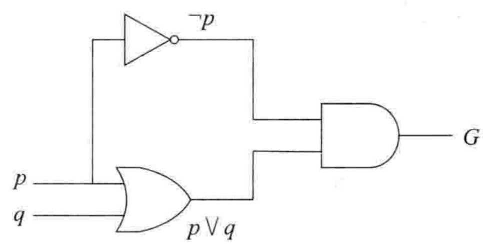


图 1.1.2 逻辑电路图

使用逻辑运算符可以把自然语言表示的命题翻译成由命题变元和逻辑联结词组成的表达式，具有重要的应用，例如，在说明计算机硬件系统和软件系统时，将自然语言翻译成逻辑表达式是很重要的部分。对于一些逻辑难题，可以用逻辑表达式表示，然后推理求解。

例 1.1.6 将下面的系统规范说明翻译成逻辑表达式，并确定这些系统规范说明是否一致。

“当且仅当系统正常操作时，系统处于多用户状态。”

“如果系统正常操作，则它的核心程序正在运行。”

“核心程序没有正常运行，或者系统处于中断模式。”

“系统不处于中断模式。”

解 令 p 表示“系统正常操作”，q 表示“系统处于多用户状态”，r 表示“核心程序正在运行”，s 表示“系统处于中断模式”，则上述规范说明可以表示为

$$p \leftrightarrow q, \quad p \rightarrow r, \quad \neg r \vee s, \quad \neg s$$ ◀

系统和软件工程师从自然语言中提取需求，生成精确的、无歧义性的规范说明，这些规范说明可作为软件开发的基础。系统规范说明应该是一致的，不应该包含有冲突的需求。当规范说明不一致时，无法开发出满足所有规范说明的系统。

若$\neg s$为真，则 s 需为假。当 s 为假时，$\neg r \vee s$ 为真则必须 r 为假，这时 p 必须为假，才能使 $p \rightarrow r$ 为真。当 p 为假时，必须 q 为假，才有 $p \leftrightarrow q$ 为真。因此，当 s、r、p、q 都

为假时，上述规范说明的逻辑表达式的真值都为真，这四个规范说明是一致的。

如果在上述规范说明中增加一个“如果系统不处于多用户状态，它就处于中断状态”，表示为逻辑表达式$\neg q \rightarrow s$。当 q 和 s 都为假时，$\neg q \rightarrow s$ 为假。因此，这五个规范说明就是不一致的。

例 1.1.7 三个客人坐在餐馆，服务生问：“每个人都要咖啡吗?”第一位客人回答：“我不知道。”接着第二位客人也回答：“我不知道。”最后，第三位客人回答：“不是每个人都要咖啡。”一会儿，服务生回来，将咖啡递给需要的客人。请问服务生是如何判断哪位客人需要咖啡的?

解 根据三位客人的回答，服务生给第一位客人和第二为客人送来咖啡。

设 p、q、r 分别表示第一、二、三位客人要咖啡。如果每个人都要咖啡，则 $p \wedge q \wedge r$ 为真。如果第一位客人不要咖啡，则 p 为假，这时 $p \wedge q \wedge r$ 为假，可以说“不是每个人都要咖啡”。第一个客人的回答是“我不知道”，服务生可以判断 p 不为假。根据第二个人的回答可以判断 q 为真，因为 q 为假时，第二个客人就知道“不是每个人都要咖啡”。第三位客人的回答说明 r 为假，因为这时已知 p 和 q 都为真，只有 r 为假，$p \wedge q \wedge r$ 才为假，也就是“不是每个人都要咖啡”。因此，服务员可以断定第一位和第二位客人要咖啡，第三位客人不要咖啡。 ◀

1.2 命题公式及其分类

上一节介绍了几个常用的联结词及其组成的基本复合命题表达式$\neg p$、$p \wedge q$、$p \vee q$、$p \rightarrow q$、$p \leftrightarrow q$ 等，其中 p、q 可以代表特定的命题，也可以代表任意的命题。当 p、q 代表特定的命题时，真值是确定的，称为命题常量(常项)。当 p、q 代表任意的命题时，称为命题变元(变项)。由代表命题常量或命题变元的字母、联结词、括号等组成的符号串称为命题公式，但不是由这些符号任意组成的符号串都是命题公式。下面给出命题公式的定义。

定义 1.2.1

1)每一个命题常量或命题变元都是命题公式。

2)如果 A 是命题公式，则$(\neg A)$是命题公式。

3)如果 A 和 B 都是命题公式，则$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$都是命题公式。

4)一个由命题常量或命题变元、联结词和括号所组成的符号串是命题公式，当且仅当这个符号串是有限次应用上面的步骤得到的。

命题公式可以简称为公式。根据定义，$\neg(p \vee q)$、$p \rightarrow (q \rightarrow r)$、$(p \wedge q) \leftrightarrow r$ 等都是命题公式。为了书写方便，一般$(\neg A)$的括号及整个公式最外层的括号可以省略，例如，$(((p \vee (\neg q)) \rightarrow r)$可写成$(p \vee \neg q) \rightarrow r$。

一个含有命题变元的命题公式的真值是不确定的。只有当公式中的所有命题变元代表特定的命题时，命题公式才成为命题，其真值才唯一确定。例如，命题公式 $p \wedge q$ 中，若指定 p 为“2 是素数”，q 为“3 是奇数”，也就是 p 的真值为真，q 的真值为真，则 $p \wedge q$ 为真命题；若指定 p 为“2 是素数”，q 为“3 是偶数”，则 $p \wedge q$ 为假命题，因为 p 的真值为真，而 q 的真值为假。对命题公式的各个命题变元指定一个特定的命题，实际上就是对这