中考思想与方法丛书

GENG GAO GENG MIAO DE ZHONGKAO

更高更妙的中考

蔡小雄 潘云芳 曹建军 编著

数学

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

中考思想与方法丛书

更高更妙的中考数学

蔡小雄　潘云芳　曹建军　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

更高更妙的中考. 数学/蔡小雄，潘云芳，曹建军编著. 一杭州：浙江大学出版社，2014. 5(2014.7 重印)
ISBN 978-7-308-12953-4

Ⅰ. ①更… Ⅱ. ①蔡… ②潘… ③曹… Ⅲ. ①中学数学课一初中一升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 035978 号

更高更妙的中考数学

蔡小雄　潘云芳　曹建军　编著

责任编辑　夏晓冬
封面设计　杭州林智广告有限公司
出版发行　浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州金旭广告有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　387 千
版 印 次　2014 年 5 月第 1 版　2014 年 7 月第 2 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-12953-4
定　　价　46.00 元

浙江大学出版社发行部联系方式　(0571)88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

序

2011版《数学课程标准》在总目标中提出了“四基”、“四能”的要求，期望学生通过初中阶段的数学学习，能进一步获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验；体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。近阶段笔者正在思考“四基”、“四能”视野下的数学课堂教学应该关注什么？在这个时候，蔡小雄老师给了我他与潘云芳、曹建军两位老师合作编著的《更高更妙的中考》一书的要目及第一章的全部书稿，读后眼前一亮，开篇第一章“1.1 夯实基础知识，争取‘拾级而上’”中，作者明确反对“在学生对数学概念和思想方法没有基本了解的情况下就盲目进行大运动量解题操练”，提出“即使是中考中的能力题，只要熟练掌握教材内容，熟悉常用方法，解答时就可以‘拾级而上’”。这无疑是在倡导关注学生对基础知识的理解和基本思想方法的掌握，笔者非常赞同这种观点。在“1.2 灵活运用数学思想方法进行解题思路的探寻”中归纳了“归纳猜想，类比迁移，进退互化，整体处理，正难则反，转化化归”等六个方面的解决能力题的策略，“第二章　善于用数学思想武装自己”，从函数与方程、分类讨论、数形结合、化归与转化思想着手，介绍中学数学中常用而重要的思想方法在问题解决中的运用，作者把基本的数学思想方法融入到解题思路的探求和问题解决的思考过程中，“归纳猜想、类比迁移”等合情推理是创新的重要方法，“函数与方程”“化归与转化”是问题解决中建立数学模型的重要途径。这些策略和数学思想方法有助于学生掌握数学的思维方式和推理方式，能有效促进数学智慧的生成。“第四章　用竞赛策略优化中考解题”“第五章　更高更妙的初中高中衔接”，这两章为学有余力的学生进一步发展提供学习资源和思考方向。为此，笔者感觉这不仅仅是一本瞄准“中考”的书，也是引导、帮助学生怎么关注基础，怎样进行数学思考，怎样在解题的过程中感悟数学思想和积累问题解决的经验，从而提高能力的书，这说明作者已经在基本数学思想、基本活动经验和数学能力的培养方面积累了很多的实践经验，并且已将经验经过归纳、提炼、整理成书。

学习数学不仅仅是学几个概念、几个公式，而要在数学概念、法则、公式、公理、定理等知识的学习与应用过程中，感受知识背后的数学思想，掌握数学研究和运用的基本方法和思维方式，从而提高能力素养，这是终身受用的。希望这本书能给学生的数学学习有所启迪，也希望同学们在数学学习过程中，通过独立思考、与同伴合作交流，逐步感悟数学思想，积累数学问题解决的经验和数学思维的经验。同时希望有更多的老师通过教学实践，归纳总结数学教学中有助于学生理解概念、掌握方法、感悟思想、积累经验的教学资源和教学方法。

许芬英

2013年10月27日于杭州

目 录

第一章　更高更妙的数学解题策略

深化能力立意，突出能力与素质的考查始终是中考数学命题的导向与主题．纵观近几年各地中考的数学试卷，我们可以发现这样一个共同的特征，就是每份试卷在保证一定量的基础题的同时，也加大了能力题的考查．如此设计的优势在于既可以让大部分学生获得基础分数，保证平均分达到一定的标准，又可以满足部分优秀学生"英雄有用武之地"，冲击高分，脱颖而出．因此，要想进入优秀的高中，必须要学会解决能力题．

能力题往往具有知识容量大、综合性强、能力要求高等特点．它能综合考查数学知识、数学思想与方法，对学生灵活运用所学知识，解决实际问题的能力的要求较高．因此，解能力题没有一种"放之四海而皆准"的统一方法．但即使这样，我们还是可以从把握热点、突破难点、夯实基础、消除思维定式与适当延伸拓展等方面对其进行研究，从而掌握解决策略，增强应试信心．

1.1　夯实基础知识，争取"拾级而上"

夯实基础知识，掌握基本方法是解决能力题的前提．但夯实基础并不意味着搞题海战术．有人认为数学教学最简单的方法是把大量的题目抛给学生，让学生在解题中自我领悟，教师只需评判结果，对对答案．笔者认为这是一种不负责任的教法，实践也证明了这是一种收效甚微的低水平的教学，是应该摒弃的．

学生经常在没有对数学概念和思想方法有基本了解的情况下就盲目进行大运动量解题操练，导致学习缺乏必要的根基，不得要领，在一些无关大局的细枝末节上耗费了许多宝贵的时间，数学课堂中效益、质量"双低下"．学生在花费大量时间学数学，完成了无数次解题训练后，他们的数学基础仍非常脆弱．

事实上，即使是中考中的能力题也不是空中楼阁，命题者往往会"心太软"，特意设计一些"梯子"，只要熟练掌握教材内容，熟悉常用方法，解答时就可以"拾级而上"，甚至渐入佳境，直捣黄龙．

杭州中考试卷素以难度较大而著称，但近年来杭州试卷中每一道解答题的入口都较浅，基础得分较多，学生容易发挥出自己的水平，平时认真学习的学生在考试中都能得到应有的回报．

【例 1】（杭州 2012 中考第 22 题）

在平面直角坐标系中，反比例函数与二次函数 $y=k(x^2+x-1)$ 的图象交于点 $A(1,k)$ 和点 $B(-1,-k)$．

(1)当 $k=-2$ 时，求反比例函数的解析式；

(2)要使反比例函数与二次函数都是 y 随着 x 的增大而增大，求 k 应满足的条件以及 x 的取值范围；

(3)设二次函数的图象的顶点为 Q，当$\triangle ABQ$ 是以 AB 为斜边的直角三角形时，求 k 的值．

评注 本题的基础得分有：(1)会用待定系数法求反比例函数解析式可得 3 分；(2)$k<0$ 得 1 分，写出对称轴 $x=-\frac{1}{2}$ 得 1 分；(3)顶点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{5}{4}k\right)$ 得 1 分，根据勾股定理列出 $AQ^2+BQ^2=AB^2$ 得 1 分. 合计 7 分，与本题的平均分 7.08 分基本持平.

而且许多试题都源于教材，引导我们在新课学习与复习中都要重视教材、研究教材. 如：

【例 2】 (杭州 2012 中考第 10 题)

已知关于 x,y 的方程组 $\begin{cases}x+3y=4-a\\x-y=3a\end{cases}$，其中 $-3\leqslant a\leqslant 1$. 给出下列结论：

① $\begin{cases}x=5\\y=-1\end{cases}$ 是方程组的解；

②当 $a=-2$ 时，x,y 的值互为相反数；

③当 $a=1$ 时，方程组的解也是方程 $x+y=4-a$ 的解；

④若 $x\leqslant 1$，则 $1\leqslant y\leqslant 4$.

其中正确的是 (　　)

A. ①②　　B. ②③　　C. ②③④　　D. ①③④

评注 本题改编自浙教版《义务教育课程标准实验教科书·数学》七年级下册课本第 100 页目标与检测第 9、10 题，在原题的基础上增加了 $-3\leqslant a\leqslant 1$ 的条件，从而在核心知识方程与不等式之间架起桥梁，提高了解决问题的能力要求. 其实，此题已是 2012 年杭州中考数学试卷中难度系数最低的一题了.

9. 若方程组 $\begin{cases}3x+5y=6\\6x+15y=16\end{cases}$ 的解也是方程 $3x+ky=10$ 的解，则 $k=$________.

10. 当 a 为何值时，方程组 $\begin{cases}3x-5y=2a\\2x+7y=a-18\end{cases}$ 的解 x,y 的值互为相反数？

【例 3】 (杭州 2012 中考第 21 题)

如图 1-1-1，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=CD$，分别以 AB，CD 为边向外侧作等边三角形 ABE 和等边三角形 DCF，连结 AF，DE.

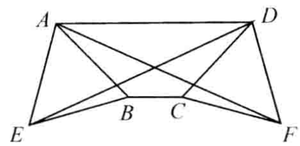


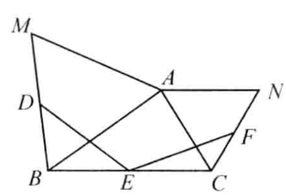
图 1-1-1

(1)求证：$AF=DE$；

(2)若 $\angle BAD=45^\circ$，$AB=a$，$\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 的面积之和等于梯形 $ABCD$ 的面积，求 BC 的长.

评注 本题改编自浙教版《义务教育课程标准实验教科书·数学》八年级下册课本第 119 页作业题第 6 题，将原题的锐角三角形拉成等腰梯形，增加了特殊角情况下的面积问题，将推理与计算结合，有效地考查了图形与证明的内容.

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，分别以 AB，AC 为边向外侧作等边三角形 ABM 和等边三角形 ACN. D，E，F 分别是 MB，BC，CN 的中点，连结 DE，FE. 求证：$DE=FE$.



(第 6 题)

1.2　灵活运用数学思想方法进行解题思路的探寻

古人有“运筹帷幄，决胜千里”的说法. 的确，在战场上，有妙计良策才有可能打胜仗. 在解题中，“妙计良策”也能使我们如鱼得水. 因此，当我们对数学知识、数学思想方法的学习和运用达到了一定水平时，应该把一般的思维升华到策略的境界. 只有掌握了一定的解题策略，才会在遇到问题时，找到问题的思考点和突破口，迅速、正确地解决问题. 在中学阶段比较常用的解决能力题的策略有：归纳猜想、类比迁移、进退互化、整体处理、正难则反、转化化归等.

1.2.1　归纳猜想

数学解题与数学发现一样，通常都是在运用观察、分析、归纳等探索性方法进行探索的基础上，获得对有关问题的结论或解决方法的猜想，然后再设法证明或否定猜想，进而达到解决问题的目的.

【例 4】　如图 1-2-1 是一个 $n\times n$ 的正方形，其中有多少个大小不全相同的正方形？

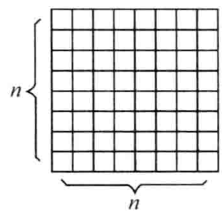


图 1-2-1

思考　归纳必须从观察特殊情况入手，比方先观察 $n=1,2,3,4$ 等特殊情况，各有多少个正方形. 为了不致漏数，要对正方形按大小分类.

讲解　不妨认为最小的正方形边长为 1，并设 $n\times n$ 的正方形中有 a_n 个正方形.

我们先观察 $n=1,2,3,4$ 等特殊情况，如图 1-2-2.

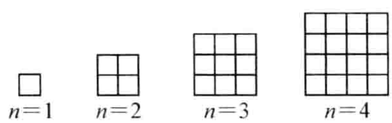


图 1-2-2

当 $n=1$ 时，只有 1 个正方形，$a_1=1$；

当 $n=2$ 时，边长为 1 的正方形有 4 个、边长为 2 的正方形有 1 个，$a_2=1+4$；

当 $n=3$ 时，边长为 1 的正方形有 9 个、边长为 2 的正方形有 4 个、边长为 3 的正方形有 1 个，$a_3=1+4+9$；

当 $n=4$ 时，边长为 1 的正方形有 16 个、边长为 2 的正方形有 9 个、边长为 3 的正方形有 4 个、边长为 4 的正方形有 1 个，$a_4=1+4+9+16$.

观察发现，以上各和式的加数都是自然数的平方数，即

$a_1=1^2, a_2=1^2+2^2, a_3=1^2+2^2+3^2, a_4=1^2+2^2+3^2+4^2, \cdots\cdots$

由此猜想：$a_n=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$.

到高中学习了数学归纳法以后，我们可以证明这个结论成立.

中考中的很多能力题，都要求通过观察、归纳从而猜想得出一般性结论，再进行证明.

【例 5】　给出下列命题：

命题 1. 点 $(1,1)$ 是直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一个交点；

命题 2. 点 $(2,4)$ 是直线 $y=2x$ 与双曲线 $y=\dfrac{8}{x}$ 的一个交点；

命题 3. 点(3,9)是直线 $y=3x$ 与双曲线 $y=\frac{27}{x}$ 的一个交点;

……

(1)请观察上面命题,猜想出命题 n(n 是正整数);

(2)证明你猜想的命题 n 是正确的.

讲解 (1)命题 n:点(n,n^2)是直线 $y=nx$ 与双曲线 $y=\frac{n^3}{x}$ 的一个交点(n 是正整数).

(2)把 $\begin{cases}x=n\\y=n^2\end{cases}$ 代入 $y=nx$,左边$=n^2$,右边$=n\cdot n=n^2$,

∵左边=右边,∴点(n,n^2)在直线上.

同理可证:点(n,n^2)在双曲线上,

∴点(n,n^2)是直线 $y=nx$ 与双曲线 $y=\frac{n^3}{x}$ 的一个交点,命题正确.

【例 6】 某校数学课外小组在坐标纸上为学校的一块空地设计植树方案如下:第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k,y_k)$处,其中 $x_1=1,y_1=1$,当 $k\geqslant 2$ 时,$\begin{cases}x_k=x_{k-1}+1-5\left(\left[\frac{k-1}{5}\right]-\left[\frac{k-2}{5}\right]\right)\\y_k=y_{k-1}+\left(\left[\frac{k-1}{5}\right]-\left[\frac{k-2}{5}\right]\right)\end{cases}$,$[a]$表示非负实数的整数部分,例如$[2.6]=2$,$[0.2]=0$.按此方案,第 2009 棵树的种植点的坐标为 ( )

A.(5,2009) B.(6,2010) C.(3,401) D.(4,402)

思考 此题由于引入了[]这一新符号,许多考生望而生畏,难度系数较高.其实,如果熟练掌握了归纳猜想的策略后,解决这道题目还是较为容易的.

我们只要分别求出 $P_1(1,1)$,$P_2(2,1)$,$P_3(3,1)$,$P_4(4,1)$,$P_5(5,1)$,$P_6(1,2)$,$P_7(2,2)$,$P_8(3,2)$,$P_9(4,2)$,$P_{10}(5,2)$,…,就可以发现这些点的横坐标以 5 为周期循环,纵坐标是这一周期序号的规律.

于是由 $2009=401\times5+4$,即第 402 个周期的第 4 个数,从而可知第 2009 棵树的种植点的横坐标应该表示这一周期的第 4 个,而纵坐标表示第 402 个周期.即 $P_{2009}(4,402)$.

1.2.2 类比迁移

所谓类比,就是由两个对象的某些相同或相似的性质,推断它们在其他性质上也有可能相同或相似的一种推理形式.运用类比法的关键是寻找一个合适的类比对象.但很多待解决的问题没有现成的类比物,这时我们可以通过观察、提炼等方法,凭借结构上的相似性寻找类比问题,然后通过适当的代换,将原问题转化为类比问题来解决.中考命题遵循的一大原则就是“源于课本,高于课本”,因此,解答能力所运用的“核心技术”往往直接来源于课本,关键看你是否能从题意中寻找出“似曾相识”的因素,类比迁移,借石攻玉.

【例 7】 图形 1-2-3 既关于点 O 中心对称,又关于直线 AC,BD 对称,$AC=10$,$BD=6$,已知点 E,M 是线段 AB 上的动点(不与端点重合),点 O 到 EF,MN 的距离分别为 h_1,h_2.$\triangle OEF$ 与$\triangle OGH$ 组成的图形称为蝶形.

(1)求蝶形面积 S 的最大值；

(2)当以 EH 为直径的圆与以 MQ 为直径的圆重合时，求 h_1 与 h_2 满足的关系式，并求 h_1 的取值范围.

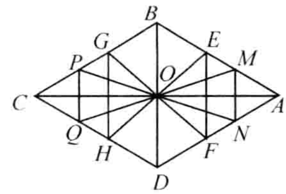


图 1-2-3

讲解　此题第 2 题难度较大，但第 1 题也有许多学生不会做，究其原因，主要是题目背景较为新颖，不太容易找到解决新问题的方法. 如图 1-2-4，如果我们连接 G，E 和 H，F，则蝶形面积等于矩形 $GHFE$ 面积的一半.

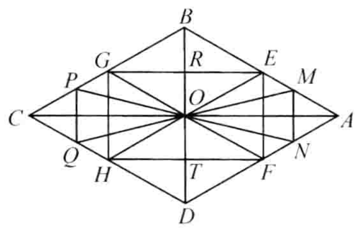


图 1-2-4

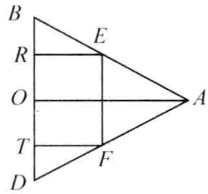


图 1-2-5

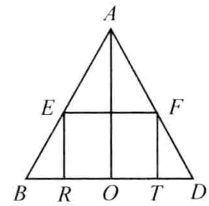


图 1-2-6

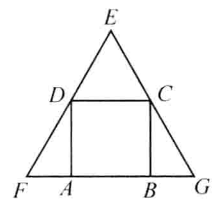
再分离出图 1-2-4 的一半，则图 1-2-5 中的矩形 $RTFE$ 面积即所求蝶形面积. 如我们把图形旋转成为图 1-2-6，则此图我们会更加熟悉. 如浙教版九上课本 53 页目标与评定 4：

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的四个顶点在正三角形 EFG 的三边上. 已知 $\triangle EFG$ 的边长为 2，记矩形 $ABCD$ 的面积为 S，边长 AB 为 x. 求：

(1)S 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围；

(2)当 $x=1.5$ 时，S 的值；

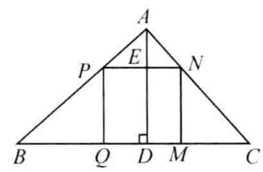
(3)当 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，x 的值.



(第 4 题)

再如九上课本 118 页作业题 5：

5. 有一块三角形余料 $\triangle ABC$，它的边 $BC=120\text{mm}$，高 AD 是 80mm. 要把它加工成正方形零件，使正方形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB，AC 上. 问：加工成的正方形零件的边长为多少？



(第 5 题)

通过以上转换，我们就把复杂图形简单化，将新问题转化为旧问题，从而解决新问题.

【例 8】　已知等边 $\triangle ABC$ 和点 P，设点 P 到 $\triangle ABC$ 三边 AB，AC，BC 的距离分别是 h_1，h_2，h_3，$\triangle ABC$ 的高为 h，若点 P 在一边 BC 上(见图 1-2-7)，此时 $h_3=0$，可得结论 $h_1+h_2+h_3=h$，请你探索以下问题：当点 P 在 $\triangle ABC$ 内(见图 1-2-8)和点 P 在 $\triangle ABC$ 外(见图 1-2-9)这两种情况时，h_1，h_2，h_3 与 h 之间有怎样的关系，请写出你的猜想，并简要说明理由.

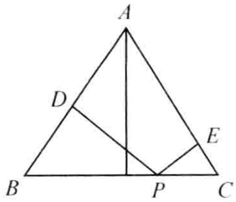


图 1-2-7

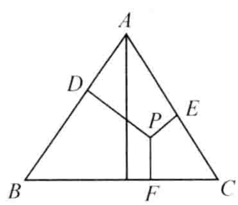


图 1-2-8

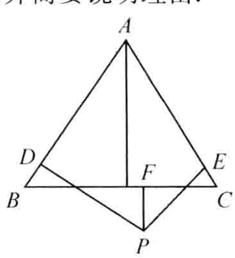


图 1-2-9

讲解 若点 P 在边 BC 上，由图 1-2-7，若连结 AP，则由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}$，得 $\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}AC\cdot h_2$，由于 $AB=AC=BC$，$h_3=0$，所以 $h_1+h_2+h_3=h$ 成立.

当点 P 在 $\triangle ABC$ 内时，由图 1-2-8，我们可以类比图 1-2-7 问题的解决，仍由面积法可证 $h_1+h_2+h_3=h$；当点 P 在 $\triangle ABC$ 外时，由图 1-2-9，我们仍可类比图 1-2-7、图 1-2-8 问题的解决，由面积法可证 $h_1+h_2-h_3=h$.

【例 9】 数学课上，张老师提出了问题：如图 1-2-10，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 E 是边 BC 的中点. $\angle AEF=90°$，且 EF 交正方形外角 $\angle DCG$ 的平分线 CF 于点 F，求证：$AE=EF$.

经过思考，小明展示了一种正确的解题思路：取 AB 的中点 M，连接 ME，则 $AM=EC$，易证 $\triangle AME\cong\triangle ECF$，所以 $AE=EF$.

在此基础上，同学们作了进一步的研究：

(1)小颖提出：如图 1-2-11，如果把"点 E 是边 BC 的中点"改为"点 E 是边 BC 上(除 B，C 外)的任意一点"，其他条件不变，那么结论"$AE=EF$"仍然成立，你认为小颖的观点正确吗？如果正确，写出证明过程；如果不正确，请说明理由；

(2)小华提出：如图 1-2-12，点 E 是 BC 延长线上(除 C 点外)的任意一点，其他条件不变，结论"$AE=EF$"仍然成立. 你认为小华的观点正确吗？如果正确，写出证明过程；如果不正确，请说明理由.

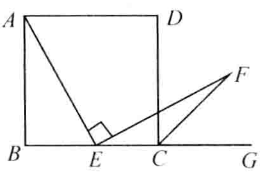


图 1-2-10

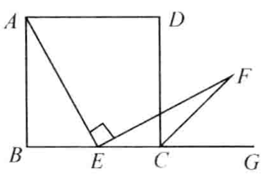


图 1-2-11

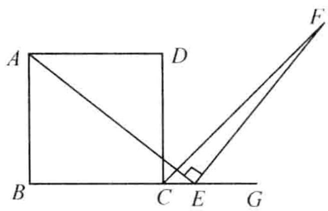


图 1-2-12

讲解 (1)正确. 证明：如图 1-2-13，在 AB 上取一点 M，使 $AM=EC$，连结 ME.

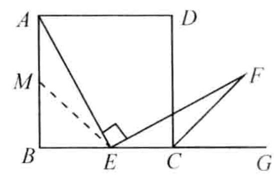


图 1-2-13

$\because AB=BC$，$\therefore BM=BE$. $\therefore\angle BME=45°$，$\therefore\angle AME=135°$.

$\because CF$ 是外角 $\angle DCG$ 平分线，$\therefore\angle DCF=45°$，

$\therefore\angle ECF=135°$. $\therefore\angle AME=\angle ECF$.

$\because\angle AEB+\angle BAE=90°$，$\angle AEB+\angle CEF=90°$，

$\therefore\angle BAE=\angle CEF$. $\therefore\triangle AME\cong\triangle BCF$(ASA).

$\therefore AE=EF$.

(2)正确. 证明：如图 1-2-14，在 BA 的延长线上取一点 N，使 $AN=CE$，连结 NE.

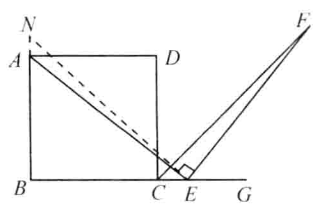


图 1-2-14

$\because AB=BC$，$\therefore BN=BE$，$\therefore\angle N=\angle FCE=45°$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD/\!/BE$.

$\therefore\angle DAE=\angle BEA$. $\therefore\angle NAE=\angle CEF$.

$\therefore\triangle ANE\cong\triangle ECF$(ASA). $\therefore AE=EF$.

1.2.3 进退互化

当直接解决一个问题比较困难时，可以先考虑这个问题的某一特殊情况，以降低思考难度，通过特殊问题的解决，也许你会找到问题的答案，或受到启发，理清思路，这就是由特殊到一般，即以退为进，我们也叫做特殊化.

用特殊化的方法来解填空题、选择题，我们称之为特殊值法，常常会有出乎意料的收获.

【例 10】 已知 a,b 为实数，且 $ab=1$，设 $M=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$，$N=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$，则 M,N 的大小关系为________.

讲解 (解法一)根据题意，M,N 的大小关系显然对任意符合条件的 a,b 都成立，则对特殊情况当然成立. 于是我们可以令 $a=2,b=\frac{1}{2}$，代入可得 $M=N=1$.

(解法二)当然我们也可以直接用作差法比较，即

$$\because M-N=\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)=\frac{a-1}{a+1}+\frac{b-1}{b+1}$$

$$=\frac{(a-1)(b+1)+(a+1)(b-1)}{(a+1)(b+1)}=\frac{ab+a-b-1+ab-a+b-1}{(a+1)(b+1)}$$

$$=\frac{2(ab-1)}{(a+1)(b+1)}=0,\therefore M=N.$$

显然，对于一道填空题来说，用解法一的效率是远高于解法二的.

【例 11】 (杭州 2011 中考第 9 题)若 $a+b=-2$，且 $a\geqslant 2b$，则 ( )

A. $\frac{b}{a}$ 有最小值 $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{b}{a}$ 有最大值 1

C. $\frac{a}{b}$ 有最大值 2　　D. $\frac{a}{b}$ 有最小值 $-\frac{8}{9}$

讲解 我们可以用符合题设 $a+b=-2$ 的特殊值进行验证：如取 $a=1,b=-3$，这时 $\frac{b}{a}=-3<\frac{1}{2}$，A 项可以排除；取 $a=-0.1,b=-1.9$，这时 $\frac{b}{a}=19>1$，B 项也可以排除；取 $a=88,b=-90$，这时 $\frac{a}{b}=\frac{88}{-90}=-\frac{8.8}{9}<-\frac{8}{9}$，D 项也可以排除. 因此只有 C 项成立.

有些证明题可以用特殊值法直接获得结论.

【例 12】 已知 $\triangle ABC$，$\angle B=2\angle A$，$AB=2BC$，请判断这个三角形的形状.

思考 考虑符合条件的一种特殊情况：$\angle C=\mathrm{Rt}\angle$，$\angle A=30^\circ$，$\angle B=60^\circ$. 现在判断的方向已经明确：在题设条件下，$\triangle ABC$ 可能是直角三角形. 那么原问题就转为如何证明这个三角形是直角三角形.

讲解 如图 1-2-15，作 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D.

$\because \angle B=2\angle A$，$\therefore \angle DBA=\angle A$，$\therefore BD=AD$.

作 $DE\perp AB$ 于 E，则 $AE=BE$，

$\because AB=2BC$，$\therefore BE=BC$，

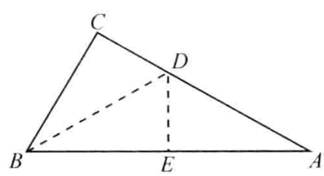


图 1-2-15

又$\angle EBD=\angle CBD$，$BD=BD$，

$\therefore \triangle EBD\cong\triangle CBD(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle C=\angle DEB=\mathrm{Rt}\angle$，$\therefore \triangle ABC$是直角三角形．

评注 用“退”的策略猜到问题的答案，将一般与特殊进行比较，使添加辅助线的方向更加明确．

有些问题还可以由特殊情况受到启发，找到解题思路．

【例13】 问题1：把扇形纸板绕正n边形中心旋转时，如果扇形的圆心角等于正多边形的中心角．证明：正n边形被纸板覆盖部分的面积等于正n边形面积的$\frac{1}{n}$．

问题2：把一块半径足够长、圆心角为直角的扇形纸板绕边长为a的正方形中心旋转，它们重叠部分的面积是多少？

讲解 对于问题1，我们可能难以把握，但对于问题2我们却游刃有余．于是当我们不能解决问题1时，可以先思考正n边形的特殊情况，如正三角形、正方形等，解决了特殊情况后，再利用特殊情况的解决策略类比解决一般问题．

有时我们宁可把一个特殊问题放在一般情况下去考虑，把所讨论的问题看成特例，解决起来反而可以减少一些非本质现象的干扰，也就是由一般到特殊，即以进为退，我们也叫做一般化，它与特殊化恰好相反．我们所学的运算法则、运算律、乘法公式、定理等都是一般化的生动表现．

【例14】 计算：$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$．

思考 本题如果直接计算则计算量太大，观察发现原式每个因式都含有$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，我们把它一般化，设$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则

原式$=(a+\sqrt{5})(1+a)-a(1+a+\sqrt{5})=a^2+a+\sqrt{5}a+\sqrt{5}-a-a^2-\sqrt{5}a=\sqrt{5}$．

1.2.4 整体处理

解数学问题时，人们常习惯于把它分成若干个简单的问题，然后再分而治之，各个击破．但有时若能有意识地放大观察问题的视角，将需要解决的问题看作一个整体，通过研究问题的整体形式、整体结构，并注意已知条件及待求结论在这个“整体”中的地位和作用，则能通过对整体结构的调节和转化使问题获解，这种从整体观点出发研究问题的过程称为整体思想．

【例15】 计算：$\sqrt{20+2\sqrt{19}}-\sqrt{20-2\sqrt{19}}$．

思考 两个根式都难以化简，但根号内的两个无理数的关系可以利用．

讲解 设$a=\sqrt{20+2\sqrt{19}}$，$b=\sqrt{20-2\sqrt{19}}$，

则$a^2+b^2=40$，$ab=\sqrt{400-4\times 19}=2\sqrt{100-19}=18$，

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=40-36=4$．

$\because a>b$，$\therefore a-b>0$，原式$=a-b=2$．即$\sqrt{20+2\sqrt{19}}-\sqrt{20-2\sqrt{19}}=2$．

请尝试解决以下变式，计算：$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$．

换元是一种代数变换．在比较复杂的代数式、方程等变形中，如果发现其中某一个或两

个代数式多次出现，我们常把这种代数式看成整体，用另外的字母表示，使原来的代数式或方程得到简化，或使运算、变形能分步进行，从而简化操作. 我们称代数式中的字母、方程中的未知数为"元"，用新的字母代替原式中的部分代数式，就是选择了新的"元"，这种代数变换称为换元. 因此，换元是整体思想的一种表现形式.

【例 16】 三个同学对问题"若方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，求方程组 $\begin{cases}3a_1x+2b_1y=5c_1\\3a_2x+2b_2y=5c_2\end{cases}$ 的解."提出各自的想法. 甲说："这个题目好像条件不够，不能求解."乙说："它们的系数有一定的规律，可以试试."丙说："能不能把第二个方程组的两个方程的两边都除以 5，通过换元替换的方法来解决."参考他们的讨论，你认为这个题目的解应该是________.

讲解 把第二个方程组的两个方程的两边都除以 5，则可得 $\begin{cases}\dfrac{3}{5}a_1x+\dfrac{2}{5}b_1y=c_1\\ \dfrac{3}{5}a_2x+\dfrac{2}{5}b_2y=c_2\end{cases}$，我们可以令 $\begin{cases}\dfrac{3}{5}x=X\\ \dfrac{2}{5}y=Y\end{cases}$，则方程组可变形为 $\begin{cases}a_1X+b_1Y=c_1\\a_2X+b_2Y=c_2\end{cases}$. 由方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解是 $\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，可知 $\begin{cases}X=3\\Y=4\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{3}{5}x=3\\ \dfrac{2}{5}y=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=5\\y=10\end{cases}$.

解以上两例的基本思路是把一些代数式看成整体进行处理，解题时既要重视局部，又要关注整体，善于发现局部与整体的关系，才能开阔思路，灵活应对.

1.2.5 正难则反

每一个命题从结构上讲都由条件和结论两部分组成. 如果从条件出发，经过推理，结论得到证明，这就是所谓直接证法. 但有些问题直接入手解决相当不易，运用反证法却更简洁.

【例 17】 在 $\triangle ABC$ 中，记 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c. 求证：如果 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{a}$，那么 $\angle A$ 是锐角.

证明 假设 $\angle A$ 是直角或钝角，那么 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最大内角，所以 $a>b$，$a>c$. 由于 a，b，c 都是正数，所以 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{a}$. 这与题设 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{a}$ 矛盾. $\therefore \angle A$ 是锐角.

评注 反证法是一种间接证法，本题条件实在太少，从题设出发很难推理，因此想到从结论的反面出发进行推理. 反证法的假设"$\angle A$ 是直角或钝角"成为一个新的推理依据，使推理得以顺畅进行，结果与题设发生矛盾. 可见，反证法常用来证明条件较少，较难直接入手的命题.

【例 18】 在$\triangle ABC$中,$AB=\sqrt{3}$,$AC=\sqrt{2}$,$BC=1$.

(1)求证:$\angle A\neq 30°$;

(2)将$\triangle ABC$绕BC所在直线旋转一周,求所得几何体的表面积.

讲解 (1)在$\triangle ABC$中,因为$AC^2+BC^2=2+1=3=AB^2$,

所以$\angle ACB=90°$.所以$\triangle ABC$是直角三角形.

假设$\angle A=30°$,则$\sin\angle A=\frac{1}{2}$.①

又在$Rt\triangle ABC$中,$\sin\angle A=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,②

因为①与②矛盾,所以假设不成立,即得$\angle A\neq 30°$.

(2)$Rt\triangle ABC$绕直角边BC所在直线旋转一周所得的几何体是以AC为底面半径,BC为高,AB为母线的圆锥.圆锥的表面积$=\pi AC\cdot AB+\pi AC^2=(\sqrt{6}+2)\pi$.

评注 这道题难度不大,但是听说当年有许多学生考完之后"骂"老师:平时做的题目都是证明相等,从来没做过证明不等.其实不等问题也是可以用反证法转化成相等问题来解决的.可见反证法还可常用来证明否定型命题.

【例 19】 如图 1-2-16,点O是等边$\triangle ABC$内一点,$\angle AOB=105°$,$\angle BOC=\alpha$.将$\triangle BOC$绕点C按顺时针方向旋转$60°$得$\triangle ADC$,连结OD.

(1)试判断$\triangle COD$的形状,并说明理由.

(2)$\triangle AOD$能否成为等边三角形?如能,请求出α的值;如不能,请说明理由.

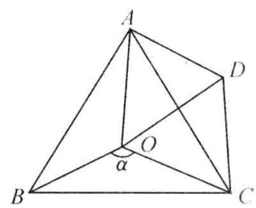


图 1-2-16

讲解 (1)$\triangle OCD$是等边三角形.$\because\triangle BCO\cong\triangle ACD$,$\therefore OC=CD$.

又$\because\angle OCD=60°$,$\therefore\triangle OCD$是等边三角形.

(2)$\triangle AOD$不可能是等边三角形.

假设$\triangle AOD$是等边三角形,则$\angle AOD=60°$.$\because\triangle OCD$是等边三角形,

$\therefore\angle DOC=\angle CDO=60°$.即$\angle ADC=120°$.

又$\because\angle AOB+\angle\alpha+\angle COD+\angle AOD=360°$且$\angle AOB=105°$.

$\therefore\angle\alpha=360°-105°-60°-60°=135°=\angle BOC$,这与已知$\angle BOC=\angle ADC$矛盾.

1.2.6 转化化归

转化化归是解决数学问题的一种最基本的数学思想,在研究数学问题时,我们通常是将未知的问题转化为已知的问题,将复杂的问题转化为简单的问题,将抽象的问题转化为具体的问题,将实际问题转化为数学问题.我们也常常在不同的数学问题之间互相转化,可以说在解决数学问题时转化思想几乎是无处不在的.

【例 20】 如图 1-2-17,在锐角$\triangle ABC$中,$AB=4\sqrt{2}$,$\angle BAC=45°$,$\angle BAC$的平分线交BC于点D,M,N分别是AD和AB上的动点,则$BM+MN$的最小值是________.

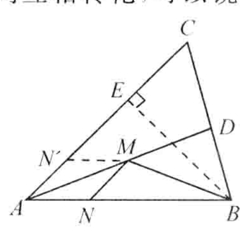


图 1-2-17

讲解 如图 1-2-17,作点N关于直线AD的对称点N',根据对称性可知,点N'在边AC上.连结MN',则$MN'=MN$,这时$BM+MN=$