21世纪大学公共数学系列教材

大学文科数学简明教程学习指导

（附习题解答）

● 严守权　姚孟臣　编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

大学文科数学简明教程学习指导

（附习题解答）

● 严守权　姚孟臣　编著

Math

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

大学文科数学简明教程学习指导：附习题解答/严守权，姚孟臣编著. 一北京：中国人民大学出版社，2014.2

21 世纪大学公共数学系列教材

ISBN 978-7-300-18728-0

Ⅰ.①大… Ⅱ.①严…②姚… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 005287 号

21 世纪大学公共数学系列教材

大学文科数学简明教程学习指导（附习题解答）

严守权　姚孟臣　编著

Daxue Wenke Shuxue Jianming Jiaocheng Xuexi Zhidao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2014 年 3 月第 1 版
印　　张	14.75 插页 1	**印　　次**	2014 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	353 000	**定　　价**	26.00 元

总 序

进入21世纪以来，现代科学技术大潮汹涌澎湃，深刻地影响到人类社会的进步和发展. 新的时代呼唤新的高素质的人才，呼唤教育有更多的创新和更大的发展.

在诸多教育中，数学教育具有特殊地位和作用. 数学作为科学的"皇后"、一门具有丰富内容的知识体系，在其发展过程中，与其他学科交叉渗透，广泛应用，已成为科学发展的强有力的工具和原动力. 数学以其特有的哲学属性，又是人们的思维训练的体操. 正如美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中指出的，"数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号，等等. 它们是普遍适用并且强有力的思考方式. 运用这些思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法. 数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.""数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用."同样的，数学是一种文化，一门艺术，同样可以为人们提供美的熏陶. 多年来，我国高校的数学教育为了适应新形势，已经由以自然学科为主的部分专业扩展到包括人文社科专业在内的所有学科，课程建设和教学改革广泛而深入，硕果累累.

教材建设是教学改革的核心，为了进一步推动我国高等教育数学课程的建设和发展，我们组织国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干编写并推出了"21世纪大学公共数学系列教材". 系列教材的宗旨是，面向世界，面向未来，面向现代化，总结和巩固我国高等教育长期以来数学课程改革和教材建设的成果，更好地发挥数学教育的工具功能、数学素质教育功能、文化修养功能.

系列教材将涵盖理、工、医、农、经济学、管理科学、人文社科等多学科，在总体把握数学教育的功能定位的基础上，充分考虑不同学科的特点和需求，区分出不同层次和侧重点，并参照相关专业通行的教学大纲编写. 例如，理、工学科的公共数学课同时是专业基础课，更要注重课程的工具功能，更强调与后续课程的有机衔接，而人文社科则更侧重于发挥其文化素质教育的功能.

系列教材力求将传统和创新相结合.相对而言,公共数学课程所涉及的内容一般属于较为成熟的数学知识体系,具有简洁、严谨和逻辑性强的特点.历史上也不乏具有这种风格特色、广受欢迎的教材.我们在借鉴和坚持传统优秀教材特色的同时,注意加入新的因素,主要目的是:使内容更能适应各个学科发展和创新的需要;使结构更加优化便于施教;使形式更为多样化、立体化,教学手段更为丰富.

我们深知,一部好的数学教材不仅需要对数学学科的深刻理解,而且要基于长期的教学实践的积累和锤炼,尤其是需要作者的专业水准和敬业精神.我们能有幸邀请到一批国内权威领域学科带头人以及具有发展潜力的中青年骨干参与编写工作,是难能可贵的,这也是我们能够推出高质量的系列教材的根本保证.

编者的话

本书是《大学文科数学简明教程》(中国人民大学出版社2013年版)配套编写的学习辅导书.考虑到《大学文科数学简明教程》的读者课时数较少，因此,《学习指导》在系统条理化教程所涉及的知识点的基础上，将重点放在对最基本的数学概念及其算法的理解和解读方面，并强化对求解数学问题能力的训练.

本书每章由四部分内容组成.

一、内容提要.列出本章的基本概念、基本计算方法和公式,加强读者对这些内容的熟悉、理解和记忆,避免一些概念性错误.

二、例题解析.根据各章的知识点和问题类型的顺序安排典型例题分析的次序,通过各种典型例题的详尽分析,巩固和加深对基本概念的理解,增强各知识点之间的相互联系,规范解题过程和步骤,提高综合分析问题和应用所学知识解决问题的能力.

三、综合练习.为了使读者获得更多的解题能力的训练,也为了弥补教材中习题数量的不足,本书每章都选编了一定数量的与"例题解析"搭配的习题,供读者练习.

四、综合练习简答.提供了所有综合习题的简单答案.

大学文科数学是在大学文科学生中开展的文化素质教育课程,这对于广大文科学生领会数学精神,增强思维能力,适应现代科学技术飞速发展的社会环境,都是十分必要的.而数学思维能力的训练通常需要在求解一定数量的数学问题的过程中实现.说到解题,不妨引用著名数学家、教育家乔治·波利亚(G. Polya)的一段名言,"解题可以认为是最富有特征的活动.……解题是一种本领,就像游泳、滑雪、弹钢琴一样,你只能在模仿与实践中才能学会.……你想在解题中得到最大的收获,就应该在新做的题目中找到它的特征,那些特征在求解其他问题时,能起到指导作用.一种解题方法,若是经过你自己努力得到的,或是从别人那里学来的或听来的,只要经过自己的体验,那么对你来讲,它就是一种楷模,碰上类似问题时,就成为你仿照的模型."希望这段话能引领读者到数学的海洋中去模仿,去实践,去体验,并能从中得到乐趣.

由于编者水平所限,本书错误和不妥之处在所难免,欢迎广大读者批评指正.中国人民大学出版社为本书的出版付出了很多心血,对此,我们表示衷心的感谢.

目录

第一章

函数

§1.1 函数概念

内容提要

1. 集合与实数集

(1)集合的概念.

所谓“集合”是由一些确定的具有一定属性并且彼此可以区分的对象或事物构成的全体,其中组成集合的每一个对象或事物称为该集合的元素.

集合一般有列举法和描述法两种具体表示方法:

①**列举法:** 在花括号{ }内以任意次序列出全体元素,每个元素用逗号隔开.

②**描述法:** 在花括号{ }内先写出元素的一般形式,后写出该集合中元素的特征,中间用竖线隔开.在集合元素不便一一列举或不需一一列举时,集合常常用描述法表示.

(2)集合的运算.

集合之间定义了以下关系和运算:

①设 A,B 为两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $\alpha\in A$,必有 $\alpha\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

设 A,B 为两个集合,如果 $A\subset B$,且 $B\subset A$,则称 A 和 B 相等,记作 $A=B$.

②设 A,B,C 为三个集合,如果集合 C 的元素由集合 A 与 B 的所有元素组成,即

$$C=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

则称 C 是 A 和 B 的并集,记作 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$.

③设 A,B,C 为三个集合,如果集合 C 的元素由集合 A 与 B 的相同元素组成,即

$$C=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

则称 C 是 A 和 B 的交集，记作 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$.

④设 A,B,C 为三个集合，如果集合 C 的元素由集合 A 中不属于集合 B 的元素组成，即

$$C=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\},$$

则称 C 是 A 与 B 的差集，记作 $C=A-B$，且 $C=A\overline{B}$.

⑤设 A,B 为两个集合，如果

$$B=\{x\,|\,x\in \Omega \text{ 且 } x\notin A\},$$

则称 B 是 A 的补集，记作 $B=\overline{A}$.

集合运算具有交换律、结合律、分配律、对偶律，其中对偶律又称德·摩根律，对于集合 A,B，对偶律可表示为

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

(3)实数集.

由全体有理数和无理数组成的集合称为实数集，或称为实数系. 实数集具有有序性、稠密性、连续性.

①实数集的区间表示法.

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，则

$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为开区间 (a,b)；

$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间 $[a,b]$；

$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间 $[a,b)$，$(a,b]$.

以上 (a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$ 统称为有限区间，$b-a$ 为区间长度.

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\},$$
$$R=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}.$$

类似地可定义区间 $[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，并称上述区间为无穷区间.

②邻域的概念.

设 $\delta>0$，$x_0\in R$，则称集合

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\left\{x\,\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\}$$

为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的邻域，记作 $N_\delta(x_0)$；集合

$$\{x_0-\delta,x_0\}\cup\{x_0,x_0+\delta\}=\left\{x\,\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\}$$

称为以 x_0 为中心，以 δ 为半径的空心邻域，记作 $N_\delta(\bar{x}_0)$. 其中 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左邻域，$(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右邻域.

2. 函数的概念

定义 1.1 设两个变量 x,y 且 x 属于非空实数集合 D. 如果存在一个法则 f，使得对于每个 $x\in D$，必存在唯一的 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在集合 D 上的一个函

数，记作 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为 f 的定义域，记作 D_f，函数全体取值的集合称为 f 的值域，记作 Z_f，即 $Z_f=\{y \mid y=f(x), x\in D_f\}$.

函数表示法：解析法(即公式法)；列表法；图形法；文字表述法.

典型例题分析

例 1　设 $A=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x \mid 0\leqslant x<+\infty\}$，计算

(1)$A\overline{B}$；　(2)$\overline{A}\cup\overline{B}$；　(3)$\overline{A}-B$

解　(1)如图 1—1 所示，

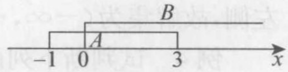

图1—1

$$A\overline{B}=[-1,0)；$$

(2)如图 1—1 所示，$AB=[0,3]$，因此

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)；$$

(3)如图 1—1 所示，$A\cup B=[-1,+\infty)$，因此

$$\overline{A}-B=\overline{A}-\overline{A}B=\overline{A}\cap(\Omega-B)=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=(-\infty,-1).$$

说明　由例 1 看到，集合运算应注意两点：一是要借助几何直观背景；二是注意化简，在符号运算的基础上化简后再定值.

例 2　某单位共有 120 人，会英语的人数为 60 人，会德语的人数为 45 人，不会英语和德语的人数为 30 人，若记 $A=\{$会英语的人$\}$，$B=\{$会德语的人$\}$，试用集合运算表示下列人群，并计算各集合的人数.

(1)既会英语又会德语的人；

(2)不会英语的人；

(3)只会德语和只会英语的人.

解　依题设，全集 Ω 人数为 120 人，集合 A 人数为 60 人，集合 B 人数为 45 人，集合 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 人数为 30 人，从而知集合 $A+B=\Omega-\overline{A+B}=\Omega-\overline{A}\cap\overline{B}$ 人数为 90 人，于是

(1)既会英语又会德语的人的集合为 AB，所含人数为 $60+45-90=15$.

(2)不会英语的人的集合为 $\overline{A}=\Omega-A$，所含人数为 $120-60=60$ 人.

(3)只会德语和只会英语的人的集合为 $A\overline{B}+\overline{A}B=(A-AB)+(B-AB)$，所含人数为 $(60-15)+(45-15)=75$ 人.

例 3　解下列不等式，并用区间表示下列解集.

(1)$|x+4|<0.4$；　　(2)$x^2-3x-18\leqslant 0$；

(3)$0<(x-3)^2\leqslant 9$；　　(4)$|x+5|<|x+1|$.

解　(1)由 $-0.4<x+4<0.4$，即 $-4.4<x<-3.6$，解得 $(-4.4,-3.6)$.

(2)方法一. 由 $(x-6)(x+3)\leqslant 0$，从而有

$$\begin{cases}x\geqslant 6\\ x\leqslant -3\end{cases} \text{或} \begin{cases}x\leqslant 6\\ x\geqslant -3\end{cases},$$

解得 $[-3,6]$.

方法二. 借助图形，如图 1—2 所示，当$-3\leqslant x\leqslant 6$时，函数曲线在轴下方，从而知，解为$[-3,6]$.

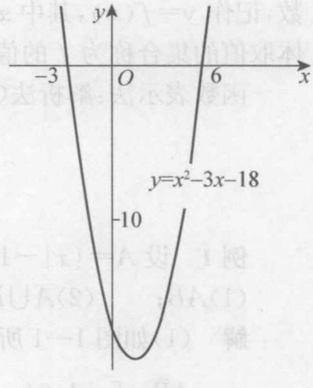

图 1—2

(3) 由$|x-3|\leqslant 3$且$x\neq 3$，即$0\leqslant x\leqslant 6$且$x\neq 3$，得解$[0,3)\cup(3,6]$.

(4) 方法一. 由$(x+5)^2<(x+1)^2$，$10x+25<2x+1$，即$x<-3$，得解$(-\infty,-3)$.

方法二. 借助图形，如图 1—3 所示，满足条件的点x与点$x_1=-5$的距离小于点x与点$x_2=-1$的距离，即在两点中点的左侧，故解集为$(-\infty,-3)$.

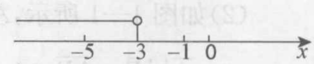

图 1—3

例 4 试判断下列函数对是否相同，并说明理由.

(1) $y=\arcsin(\sin x)$与$y=x$；

(2) $y=\ln(2-x^2-x)$与$y=\ln(x+2)+\ln(1-x)$；

(3) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$与$y=x-3$；

(4) $y=x^3-2x$与$x=y^3-2y$；

(5) $y=\sqrt{x^2+2x-3}$与$y=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}$；

(6) $y=3^{\log_3 x}$与$y=\log_3 3^x$.

分析 函数概念描述的是两个非空数集由D到Z_f之间的一种对应关系，或映射关系，其中最重要的两个基本要素是：一是对应法则f，即确定两个数集之间$D\to Z_f$的对应（或映射）规则；二是定义域，即确保对应关系成立的数集D. 一旦法则和定义域确定，函数的值域也随之确定. 因此，两个函数相等的充分必要条件是两函数的对应法则和定义域相同.

解 (1) 函数$y=\arcsin(\sin x)$与$y=x$虽然定义域相同，但对应法则不同，前者法则规定的取值范围是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，而后者无限制，故两函数不相同.

(2) 函数$y=\ln(2-x^2-x)$与$y=\ln(x+2)+\ln(1-x)$的定义域均为$(-2,1)$，且对应法则相同（即可通过恒等式连接），故两函数相同.

(3) 函数$y=\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$与$y=x-3$的定义域不同，前者是$x\neq -1$，而后者无限制，故两函数不相同.

(4) 函数$y=x^3-2x$与$x=y^3-2y$对应法则相同且定义域相同，即均表示对于实数集合中任意一点，经相同的运算法则，唯一确定对应值，故两函数相同.

(5) 函数$y=\sqrt{x^2+2x-3}$与$y=\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}$的定义域不同，前者是$(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$，而后者为$[1,+\infty)$，故两函数不相同.

(6) 函数$y=3^{\log_3 x}$与$y=\log_3 3^x$的定义域不同，前者是$(0,+\infty)$，而后者为$(-\infty,+\infty)$，故两函数不相同.

例 5 设函数$f(x)=\dfrac{x^2+2kx}{kx^2+2kx+3}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，求常数$k$的取值范围.

解 函数$f(x)$的定义域为保证函数解析式有意义的自变量x取值的全体. 依题设，即要求对任意x的取值，总有$kx^2+2kx+3\neq 0$，即

$\Delta=4k^2-4\times3\times k<0$，或 $k=0$，

解得 $0\leqslant k<3$.

例 6 已知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有定义，求函数 $f(x^2)+f(1-x)$ 的定义域.

解 函数 $f(x^2)+f(1-x)$ 的定义域即函数 $f(x^2)$ 与 $f(1-x)$ 的定义域的交集.

由 $x^2\in(-1,1)$，得函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $(-1,1)$，又由 $1-x\in(-1,1)$，即 $-1<1-x<1$，得函数 $f(1-x)$ 的定义域为 $(0,2)$，因此，函数 $f(x^2)+f(1-x)$ 的定义域为 $(-1,1)\cup(0,2)=(0,1)$.

例 7 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\lg(x+2)$； (2) $y=\dfrac{1}{|x|+x}$；

(3) $y=x\sqrt{\cos x}$； (4) $y=1-e^{\frac{1}{x-1}}$；

(5) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$； (6) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

解 (1)由 $\begin{cases}1-x^2>0\\x+2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-1<x<1\\-2<x\end{cases}$， 因此，$D_f=(-1,1)$.

(2)由 $|x|+x\neq0$，即 $x>0$，因此，$D_f=(0,+\infty)$.

(3)由 $\cos x\geqslant0$，即 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，因此，$D_f=\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$，$k\in Z$.

(4)由 $x-1\neq0$，即 $x\neq1$，因此，$D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(5)由 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant0$，即 $\begin{cases}1+x\geqslant0\\1-x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1+x\leqslant0\\1-x<0\end{cases}$，解得 $-1\leqslant x<1$，因此，$D_f=[-1,1)$.

(6)由 $\begin{cases}|x|\leqslant1\\\sqrt{3+2x-x^2}>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant1\\-1<x<3\end{cases}$，解得 $-1<x\leqslant1$，因此，$D_f=(-1,1]$.

例 8 将下列函数用分段函数表示，并画出它们的图形.

(1) $y=2-|3x+1|$； (2) $y=\dfrac{1}{2}(|x|+|x-2|)$；

(3) $y=\max\{x^3,-x\}$.

解 (1)当 $3x+1\geqslant0$，$x\geqslant-\dfrac{1}{3}$ 时，$y=2-|3x+1|=2-(3x+1)=1-3x$.

当 $3x+1<0$，$x<-\dfrac{1}{3}$ 时，

$$y=2-|3x+1|=2+(3x+1)=3x+3,$$

因此，

$$y=\begin{cases}1-3x, & x\geqslant-\dfrac{1}{3}\\3x+3, & x<-\dfrac{1}{3}\end{cases},$$

函数图形如图 1—4 所示.

(2)当 $x\geqslant2$ 时，$y=\dfrac{1}{2}(|x|+|x-2|)=x-1$.

当 $x\leqslant 0$ 时，$y=\frac{1}{2}(|x|+|x-2|)=-x+1$.

当 $0<x<2$ 时，$y=\frac{1}{2}(|x|+|x-2|)=\frac{1}{2}(x+2-x)=1$，

因此，

$$y=\begin{cases}-x+1, & x\leqslant 0\\ 1, & 0<x<2,\\ x-1, & x\geqslant 2\end{cases}$$

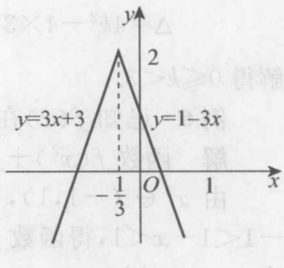

图 1—4

函数图形如图 1—5 所示.

(3) 如图 1—6 所示，当 $x\leqslant 0$ 时，曲线 $y=-x$ 在曲线 $y=x^3$ 上方，因此，$y=\max\{x^3,-x\}=-x$.

当 $x>0$ 时，曲线 $y=-x$ 在曲线 $y=x^3$ 下方，因此，$y=\max\{x^3,-x\}=x^3$，因此，

$$y=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^3, & x\geqslant 0\end{cases},$$

函数图形如图 1—6 所示的实线部分.

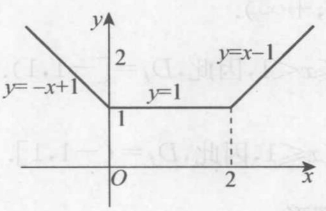

图 1—5

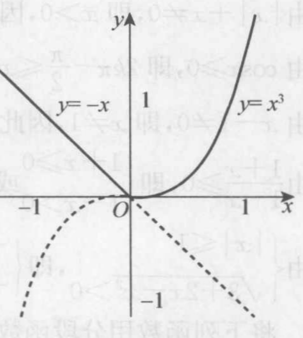

图 1—6

习题 1.1

1. 设 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x|1\leqslant x<+\infty\}$，计算

(1)$A\bar{B}$；　(2)$\bar{A}\cup\bar{B}$；　(3)$(A-B)+B$.

2. 指出下列集合哪个是空集.

(1)$A=\{x|(x+1)^2+x^2=0,x\in R\}$；　　(2)$B=\{\{x\}|e^x+1=0\}$；

(3)$C=\{x|x^2-3x+3<0\}$；　　(4)$D=\left\{x\,\middle|\,|x-1|>|x+1|\right\}$.

3. 用区间表示下列解集.

(1)$0<|x-3|<5$；　　(2)$x^2+4x-5\leqslant 0$；

(3)$1<(x-3)^2\leqslant 4$；　　(4)$|x+5|<|x+2|$.

4. 试判断下列函数对是否相同，说明理由.

(1)$y=\arcsin x$ 与 $y=\frac{\pi}{2}-\arccos x$；

(2) $y=\ln(12-x^2+x)$ 与 $y=\ln(x+3)+\ln(4-x)$；

(3) $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2+2x}$ 与 $y=\dfrac{x-2}{x+2}$；

(4) $y=1-\sqrt{x}$ 与 $x=1-\sqrt{y}$；

(5) $y=\ln\sqrt{2\pi x}$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\ln(2\pi x)$；

(6) $y=\tan(\arctan x)$ 与 $y=x$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2kx+3k}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，求常数 k 的取值范围.

6. 已知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有定义，计算下列各题.

(1) 函数 $f(x^3)+f(2x-1)$ 的定义域为__________.

(2) 函数 $f(2x)\cdot f(\sin x)$ 的定义域为__________.

(3) 函数 $\dfrac{\sqrt{2x}}{1+f^2(x)}$ 的定义域为__________.

7. 用区间表示下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{|\sin x|+\sin x}$；

(3) $y=x\sqrt{1-\mathrm{e}^x}$；　　(4) $y=x^{\frac{1}{x-1}}$；

(5) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{3+x}}$；　　(6) $y=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+2x+x^2}}$.

8. 将下列函数用分段函数表示，并画出它们的图形.

(1) $y=|2x+1|-3$；

(2) $y=\dfrac{1}{2}(|x-1|+|2x|)$；

(3) $y=\max\{x^3,x^2\}$.

§1.2　函数性质

内容提要

1. 单调性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，对于 D 中任意两数 x_1,x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\ (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）.

递增函数和递减函数统称单调函数.

2. 有界性

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，如果存在常数 $M>0$，对任意的 $x\in D$

总有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的，否则称 $f(x)$ 是无界的.

在 R 上常见的有界函数是 $y=\sin x, y=\cos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

3. 奇偶性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的实数集 D 上有定义，如果对任意一个 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(-x)\text{（或 } f(x)=-f(-x)\text{）},$$

则称函数 $f(x)$ 为 D 上的偶函数（或奇函数）.

直观上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，如果存在非零常数 T，使得对任意一个 $x\in D$，总有

$$f(x)=f(x+T),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 满足等式的最小正数 T_0 称为函数的周期.

由定义 1.5，对任意正整数 k，kT 都是 $f(x)$ 的周期，若其中存在最小的正数 T_0，则 T_0 称为 $f(x)$ 的最小周期或基本周期，简称周期.

常见的周期函数有 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$.

典型例题分析

例 1 讨论下列函数的单调性.

(1) $y=x^3+3x$；　　(2) $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$；

(3) $y=e^{x^2}$；　　(4) $y=1-\sqrt{x-1}$.

解 (1) 借助于函数图形知，函数 $y=x^3, y=3x$ 均为单调增加函数，两单调增加函数的和仍然是单调增加函数，因此 $y=x^3+3x$ 为单调增加函数.

(2) 函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 在其定义域内，由函数 $y=\log_a x$ 的图形知，当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 单调减少.

(3) 函数 $y=e^{x^2}$ 由函数 $y=e^u$ 与 $u=x^2$ 复合而成，借助于函数图形知，$y=e^u$ 为单调增加函数，$u=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 于是，根据复合函数的单调性，在 $(-\infty,0)$ 内，$y=e^{x^2}$ 为单调增加函数与单调减少函数的复合，因此是单调减少函数；在 $(0,+\infty)$ 内，$y=e^{x^2}$ 为单调增加函数与单调增加函数的复合，因此是单调增加函数.

(4) 函数的定义域为 $[1,+\infty)$，且 $y=1-\sqrt{x-1}$ 可看作由函数 $y=1-u$ 与 $u=\sqrt{x-1}$ 复合而成，借助于函数图形知，$y=1-u$ 为单调减少函数，$u=\sqrt{x-1}$ 为单调增加函数. 于

是，根据复合函数的单调性知，$y=1-\sqrt{x-1}$是单调减少函数.

说明 讨论函数的单调性，首先要借助函数图形熟悉常见的基本类型的函数在其定义区间的单调性，在此基础上可根据复合函数的单调性，进一步讨论较为复杂的函数的单调性. 相关的结论有：

(1)若干单调增加(或单调减少)函数的和仍为单调增加(或单调减少)函数.

(2)两个单调增加的正值函数的乘积仍为单调增加函数，两个单调增加的负值函数的乘积为单调减少函数.

(3)若干单调增加函数构造的复合函数仍为单调增加函数.

(4)偶数个单调减少函数的复合为单调增加函数，奇数个单调减少函数的复合仍为单调减少函数.

(5)若干单调增加函数与奇数个单调减少函数的复合为单调减少函数.

(6)讨论函数的单调性更为一般的方法将在导数应用部分通过函数导数的符号性质确定.

例 2 判别下列结论是否正确，若不正确，举出反例.

(1)若 $f(x)$为单调增加函数，则 $f(x^3)$也必为单调增加函数，$f(-x)$必为单调减少函数.

(2)若 $f(x)$为单调增加函数，且 $f(x)>0$，则 $f^2(x)$也必为单调增加函数.

(3)若 $f(x)$为单调增加函数，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$必为单调减少函数.

解 (1)正确. $f(x^3)$是两个单调增加函数 $y=f(u)$，$u=x^3$ 复合而成，因此，$f(x^3)$也必为单调增加函数；$f(-x)$由一个单调增加函数 $y=f(x)$与一个单调减少函数 $y=-x$ 复合而成，因此，$f(-x)$必为单调减少函数.

(2)正确. 若 $f(x)$为单调增加函数，且 $f(x)>0$，则 $f^2(x)$可看作是在$(0,+\infty)$内单调增加函数 $y=u^2$ 与单调增加函数 $u=f(x)$的复合函数，因此，$f^2(x)$也必为单调增加函数.

(3)不正确. 见反例：设 $f(x)=x$，显然，$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的单调增加函数，但$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$内的单调减少函数，在$(-\infty,+\infty)$内非单调.

例 3 讨论下列函数的有界性.

(1)$y=\sqrt{-4x-x^2}$；　　(2)$y=10\sin^3 x+5\cos 2x$；

(3)$y=\dfrac{x-3}{x^2-6x+10}$；　　(4)$y=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ e^{-x}, & x\geqslant 1 \end{cases}$

解 (1)由 $0\leqslant\sqrt{-4x-x^2}=\sqrt{4-(x+2)^2}\leqslant 2$ 知，$y=\sqrt{-4x-x^2}$为有界函数.

(2)由$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos 2x|\leqslant 1$，$|10\sin^3 x+5\cos 2x|\leqslant 10+5=15$ 知，$y=10\sin^3 x+5\cos 2x$ 为有界函数.

(3)方法一. 若要使 $y=\dfrac{x-3}{x^2-6x+10}$在实数范围内有意义，即要使二次方程

$$yx^2-(6y+1)x+10y+3=0$$

有实根，应有 $\Delta=(6y+1)^2-4y(10y+3)\geqslant 0$，即有 $1-4y^2\geqslant 0$，$|y|\leqslant\dfrac{1}{2}$，因此，