业内顶级专家帮您开启成功之门！

句句经典，点点扣题，题题奏效

注册电气工程师执业资格考试复习指导+典型题解

公共基础

（第2版）

张炳达　主审
李　楠　主编

顶级团队打造，汇集考试精华
精析核心要点，过关必备丛书

1 精细梳理大纲考点　快速吃透大纲

2 深度解析考试真题　领悟命题规律

3 临考实战模拟试题　提升应考能力

免费赠送
最新考试真题
及解析电子版
www.ifengspace.cn

江苏科学技术出版社

注册电气工程师执业资格考试

复习指导+典型题解

公共基础

张炳达　主　审
李　楠　主　编

江苏科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

注册电气工程师执业资格考试复习指导+典型题解.
公共基础/李楠主编. —南京:江苏科学技术出版社,
2014.1
ISBN 978-7-5537-0920-8

Ⅰ.①注… Ⅱ.①李… Ⅲ.①电气工程—工程师—资
格考试—自学参考资料 Ⅳ.①TM

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 041841 号

注册电气工程师执业资格考试复习指导+典型题解
公共基础

主　　编 李　楠
项目策划 凤凰空间/张雪松
责任编辑 刘屹立
特约编辑 封秀敏

出版发行 凤凰出版传媒股份有限公司
江苏科学技术出版社
出版社地址 南京市湖南路 1 号 A 楼,邮编:210009
出版社网址 http://www.pspress.cn
总　经　销 凤凰出版传媒股份有限公司
总经销网址 http://www.ifengspace.cn
经　　销 全国新华书店
印　　刷 天津紫阳印刷有限公司

开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张 62.5
字　　数 1 560 000
版　　次 2014 年 1 月第 2 版
印　　次 2014 年 1 月第 2 次印刷

标准书号 ISBN 978-7-5537-0920-8
定　　价 132.00 元

编写委员会

主　审：张炳达

主　编：李　楠

副主编：李继平　刘海生　华玲玲　于　臻　李永飞

参　编：潘天泉　王　清　杨文光　孙春峰　方秀珍

冉小英　李彦军　崔彩云　杨建平　韩　猛

郭文涛　刘　鑫　李　凯　刘　阳　来　茜

安　健　张东莱　王文坦　何　军　柳　锋

何　燕　卫赵斌　孟　韬　吴金顺　王志丽

赵海龙　王翠翠　王　璐　王宫卿　孙　懿

徐　超　李静楠　方　莹　王文相　王秀敏

王　婷　于　淮

内 容 提 要

本书根据注册电气工程师执业资格考试公共基础部分的最新考试大纲，由具有深厚的专业基础知识和丰富的教学经验的专家组织编写而成。内容涵盖了注册电气工程师资格考试所要求的公共基础部分的所有内容，即工程科学基础、现代技术基础和工程管理基础，具体包括高等数学、物理学、化学、理论力学、材料力学、流体力学、电气与信息、法律法规、工程经济九部分内容。每个部分的每个考点中均包括针对该考点的考试大纲、重要考点内容讲解、详细的例题解析，以及大量的典型习题和精讲。此外，在本书的最后还附有三套模拟试题，便于考生复习、练习，掌握试题类型，提高应试能力。本书以考试大纲为准，复习指导内容全面、典型习题丰富。本书可供参加注册电气工程师执业资格考试公共基础部分的考生复习之用，同时也是相关专业技术人员在实践中的一部重要参考书。

前　言

我国在工程建设领域陆续开展的注册工程师执业资格认证工作，是广大工程技术人员参加并通过相应的考核、考试后合法地从事相应工作的必经之路。为了帮助参加注册电气工程师考试的广大考生全面、系统地复习公共基础知识，我们按照最新考试大纲的要求，组织编写了这套公共基础考试用书。新考试大纲对注册电气工程师公共基础知识的要求包括三个方面，即工程科学基础、现代技术基础和工程管理基础。本书内容全面涵盖了新大纲各部分的知识点，是考生备考的良师益友。

本书共分为九大部分，每个部分分别针对新大纲的要求对重要知识点加以总结、提炼，形成考点主要内容；同时，在每个部分均配有相应的例题、练习题及相应的解析。通过对参考答案的解析引导考生掌握解题思路，熟悉解题方法，全面领会、检验相关知识。此外，书后还根据新大纲的要求编写了三套模拟题，每套 120 题，同时附有参考答案及解析。

本书由李楠老师组织校内相关学科的专业教师编写，主要的编写教师有王清（第 1 部分的 1、2、3 章）、杨文光（第 1 部分的 4、5 章）、刘海生（第 1 部分的 6、7 章及模拟题数学部分）、华玲玲（第 2 部分及模拟题物理部分）、孙春峰（第 3 部分及模拟题化学部分）、方秀珍（第 4 部分及模拟题理论力学部分）、刘玉丽（第 5 部分及模拟题材料力学部分）、李楠（第 6 部分及模拟题流体力学部分）、冉小英（第 7 部分的 1 至 6 章及模拟题电气部分）、李永飞（第 7 部分的 7 至 10 章及模拟题信息部分）、李彦军（第 8 部分及模拟题法律法规部分）、崔彩云和杨建平（第 9 部分及模拟题工程经济部分）。此外，还有许多老师参与编写，在此一并感谢。

由于编写时间紧促和编写水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评、指正。

编者

2014 年 1 月

目　　录

第 1 部分

数　学

1 空间解析几何

复习指导

考试大纲

向量的线性运算;向量的数量积、向量积及混合积;两向量垂直、平行的条件;直线方程;平面方程;平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系;点到平面、直线的距离;球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程;常用的二次曲面方程;空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

主要考点

理解向量的概念及其表示法,掌握向量的模、方向余弦、单位向量等概念与坐标表达式,掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积),了解两个向量垂直、平行的条件。

掌握平面方程和直线方程及其求法,会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)及其具体应用。

了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标为旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程,了解空间曲线的参数方程和空间曲线在坐标平面上的投影方程。

1.1 向量代数

1. 向量的概念

向量:既有大小,又有方向的量。在数学上用有向线段来表示向量,其长度表示向量的大小,方向表示向量的方向。在数学上只研究与起点无关的自由向量(以后简称向量)。

向量的表示方法有:$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$、$\overrightarrow{OM}$等。

向量相等 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$:如果两个向量大小相等,方向相同,则说两向量相等(即经过平移后能完全重合的向量)。

向量的模:向量的大小,记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{OM}|$。

模为 1 的向量叫单位向量,模为 0 的向量叫零向量。零向量的方向是任意的。

向量平行 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$:如果两个非零向量的方向相同或相反,则说两向量平行。零向量与任何向量都平行。

负向量:大小相等但方向相反的向量,记为$-\boldsymbol{a}$。

2. 向量的线性运算

加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$:适用于平行四边形法则(有时也称三角形法则)。其满足的运算规律有交

换律和结合律。

减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$。

向量与数的乘法 $\lambda\boldsymbol{a}$：设 λ 是一个数，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为

① $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$；

② $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=0$；

③ $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$。

其满足的运算规律有：结合律、分配律。设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$。

定理　设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$。

3. 利用坐标作向量的线性运算

通过坐标法，使平面上或空间中的点与有序数组之间建立一一对应关系；同样地，为了进行数与向量的研究，需要建立向量与有序数之间的对应关系。

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴正向的单位向量，并称它们为这一坐标系的基本单位向量，由向量的加法规则可知

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

或

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式，向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$。

于是，起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量可以表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

向量运算的坐标可以用下式表示。

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

注意，对于向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，它相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即

$$\{\boldsymbol{b}_x,\boldsymbol{b}_y,\boldsymbol{b}_z\}=\boldsymbol{\lambda}\{\boldsymbol{a}_x,\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{a}_z\}$$

也相当于向量的对应坐标成比例，即

$$\frac{\boldsymbol{b}_x}{\boldsymbol{a}_x}=\frac{\boldsymbol{b}_y}{\boldsymbol{a}_y}=\frac{\boldsymbol{b}_z}{\boldsymbol{a}_z}$$

4. 向量的模、方向角、投影

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，可以用它与三个坐标轴的夹角 α、β、γ（均大于或等于 0，小于或等于 π）来表示它的方向，称 α、β、γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，其余弦表示形式 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为方向余弦。

模和方向余弦表达式为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \\ \cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \end{cases}$$

任意向量的方向余弦性质均为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

5. 两向量的数量积

定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,式中,$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

物理意义:物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线的位移为 $\boldsymbol{s}$,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$,其中,$\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角。

性质

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

② 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直($\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$)的充分必要条件为:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

④ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

⑤ $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$　(其中,λ 为实数)。

坐标表示式:设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

因此,两向量的夹角可以由 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$式求解。

6. 两向量的向量积

定义　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量 $\boldsymbol{c}$,向量 $\boldsymbol{c}$ 满足:

① $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,式中,$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角。

② $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的平面,指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$,记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

性质

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$。

② 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行($\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$)的充分必要条件为:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$。

③ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$。

等价公式:

① 坐标表示式:设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

② 行列式表示式:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

1.2 平面

1. 平面的点法式方程

平面的法线向量定义：垂直于一平面的非零向量叫作平面的法线向量。平面内的任一向量均与该平面的法线向量垂直。

已知平面上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，对平面上的任一点 $M(x,y,z)$，有向量 $\overrightarrow{M_0M}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$。

代入坐标式，有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

此即平面的点法式方程。

2. 平面的一般方程

任一平面都可以用三元一次方程来表示，平面的一般方程为：$Ax+By+Cz+D=0$。

平面图形的特点如下：

① $D=0$：通过原点的平面。

② $A=0$：法线向量垂直于 x 轴，表示一个平行于 x 轴的平面。同理 $B=0$ 或 $C=0$：分别表示一个平行于 y 轴或 z 轴的平面。

③ $A=B=0$：方程为 $C_z+D=0$，法线向量为 $\{0,0,C\}$，此方程表示一个平行于 xOy 面的平面。同理 $A_x+D=0$ 和 $B_y+D=0$ 分别表示平行于 yOz 面和 xOz 面的平面。

④ 反之，任何三元一次方程，例如，$5x+6y-7z+11=0$ 都表示一个平面，该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{5,6,-7\}$。

3. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角。设平面 $\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 对应的法向量为

$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$，按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

几个常用的结论如下：

设平面 1 和平面 2 的法向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ 和 $\boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$

① 两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ （法向量垂直）；

② 两平面平行：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ （法向量平行）；

③ 平面外一点到平面的距离公式：设平面外的一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，则点到平面的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$。 (1-1-1)

1.3 直线

1. 空间直线的一般方程

空间直线可以看成是两个平面的交线。故空间直线的一般方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2yC_2z+D_2=0\end{cases}$$

2. 空间直线的对称式方程与参数方程

平行于一条已知直线的非零向量称作这条直线的方向向量。

已知直线上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$和它的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，设直线上任一点为 $M(x,y,z)$，那么$\overrightarrow{M_0M}$与 $\boldsymbol{s}$ 平行，由平行的坐标表示式可得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

此即空间直线的对称式方程(或称为点向式方程)。

设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

就可将对称式方程变成参数方程(t 为参数)

$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$$

三种形式可以互换。

3. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角(通常指锐角)称作两直线的夹角。

设两直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$和 $\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$，两直线的夹角可以按两向量夹角公式来计算

$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{1-1-2}$$

两直线 L_1 和 L_2 垂直：$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ (充分必要条件)

两直线 L_1 和 L_2 平行：$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$ (充分必要条件)

4. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线与它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$称为直线与平面的夹角，当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为$\frac{\pi}{2}$。

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，直线与平面的夹角为 φ，那么

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$\begin{cases}\text{直线与平面平行：}\boldsymbol{s}/\!/\boldsymbol{n}\text{，相当于}\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p} & \text{(充分必要条件)}\\ \text{直线与平面垂直：}\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\text{，相当于 }Am+Bn+Cp=0 & \text{(充分必要条件)}\end{cases}$$

5. 点到直线的距离

设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，则由向量积的几何意义知道$|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|$表示以$\overrightarrow{M_0M}$、$\boldsymbol{s}$ 为棱的平行四边形的面积，而$\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$表示以$|\boldsymbol{s}|$为

边长的该平行四边形的高，即点 M_0 到直线 L 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$。

1.4　柱面、旋转曲面、二次曲面

1. 曲面方程的概念

曲面方程的定义：如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

① 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程；

② 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程。

那么，方程 $F(x,y,z)$ 就叫作曲面 S 的方程，而曲面 S 就叫作方程的图形。

2. 旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫作旋转曲面，旋转曲线和定直线分别叫作旋转曲面的母线和轴。

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为 $f(y,z)=0$。把这条曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面，旋转曲面的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

旋转曲线绕 z 轴旋转，该轴对应变量不变，另外的变量将缺的变量补上改成正负二者的完全平方根的形式，即得旋转曲面方程.

常用旋转曲面：锥面（直线绕直线旋转，两直线的夹角为 $\alpha(0°<\alpha<90°)$，方程为

$$z^2=a^2(x^2+y^2)$$

式中：$a=\cot\alpha$。

3. 柱面

定义　平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫作柱面。定曲线 C 称为准线，动直线 L 称为母线。

特征：x、y、z 三个变量中若缺其中之一（例如 y），则表示母线平行于 y 轴的柱面。

几个常用的柱面如下所述。

① 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$（母线平行于 z 轴）；

② 抛物柱面：$y^2=2x$（母线平行于 z 轴）。

4. 二次曲面

三元二次方程表示的曲面叫作二次曲面。几种特殊的二次曲面如下所述。

椭球面方程：　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

抛物面方程：

① 椭圆抛物面　$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 q 同号）；

② 旋转抛物面　$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2p}=z(p>0)$；

③ 双曲抛物面（鞍形曲面）　$-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$　（p 与 q 同号）。

双曲面方程：

① 单叶双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

② 双叶双曲面　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$。

注意各种图形的规律特点,可以写出其他的方程表达式。

1.5　空间曲线

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线,故可以用两个曲面的联立方程组形式来表示曲线。空间曲线的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

2. 空间曲线的参数方程

将曲线 C 上的某一动点的坐标表示为参数 t 的函数,则空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

当给定 $t=t_1$ 时,就得到曲线上的一个点(x_1,y_1,z_1),随着参数的变化可得到曲线上的全部点。

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,消去其中一个变量(例如 z),得到方程 $H(x,y)=0$,它表示一个柱面。此柱面(垂直于 xoy 平面)称为投影柱面,投影柱面与 xoy 平面的交线叫作空间曲线 C 在 xoy 面上的投影曲线,简称投影,用方程表示为$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$。同理,可以求出空间曲线 C 在其他坐标面上的投影曲线。

典型题解

例题精析

【例 1】设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,下列命题中错误的是(　　)。

A. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

B. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$

C. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

D. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$

【答案】D

【精析】命题 A、B、C 都是正确的,而等式$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$,无论 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否垂直都成立。

【例 2】若 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 为共线的单位向量,则它们的数量积 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=$(　　)。