考研数学命题人士豪金系列丛书

2015

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精炼

考研数学命题人复习全书

题型强化练习参考答案

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 编著

1 本书每章习题答案与详解 +2 篇北大、清华数学满分秘笈 +2 套原命题组成员密押试卷 +5 大考研命题人快速解题方法 +8 小时命题人数学串讲精华

正版书凭激活码登录 www.buaapress.com.cn，获超多增值服务

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2015

分类归纳+紧贴大纲+考点全覆盖+真题精析+习题精炼

考研数学命题人复习全书

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编写组 编著

本书每章习题答案与详解

+2 篇北大、清华数学满分秘笈

+2 套原命题组成员密押试卷

+5 [illegible]人[illegible]法

+8 小时命题人数学串讲精华

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

目　录

第一部分 高等数学

第1章 函数、极限与连续 题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [A].

由函数$f(x)$的表达式知,它在实数轴上除点$x=0,x=1$及$x=2$外处处有定义,在它的定义域上有

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}\right| = \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}\cdot\left|\frac{\sin(x-2)}{x-2}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{|(x-1)(x-2)|}.
\end{aligned}
$$

由此可见,$f(x)$在区间$(-1,0)$内有界,而在任何以$x=1$或$x=2$为端点的开区间内无界. 故应选[A].

2. [B].

由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\tan x e^{\sin x}=\infty$,故$f(x)$无界. 或考查$f(x)$在$x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$处的函数值,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$,可见$f(x)$是无界函数. 故应选[B].

3. [A].

① 设$x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为偶数},\\ 0, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ n, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$ 则$\{x_n\},\{y_n\}$都无界. 但$x_n\cdot y_n=0$,$\{x_ny_n\}$有界. 故[B]不正确.

② 若设$y_n=0$,x_n如①,则$\{y_n\}$有界,$x_n\cdot y_n=0$,(x_ny_n)有界. 故[C]不正确.

③$x_n=n,y_n=-n$,$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都无界,但$x_n+y_n=0$,$\{x_n+y_n\}$有界,故[D]不正确.

4. [A].

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^{\frac{1}{1+t}}=e^0=1$,应选[A].

这里应注意

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq-e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=e^{-1}\neq e.$$

5. [B].

设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1/x, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1/x, & x\text{ 为有理数,且 }x\neq0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则$f(x)g(x)=0$.

当$x\to 0$时,$f(x)g(x)\to 0$. 但当$x\to 0$时,$f(x)$及$g(x)$都不是无穷小,命题④不正确;且本例中$f(x)$及$g(x)$在$x=0$的任何邻域内都无界,但$f(x)g(x)=0$,在与前相同的邻域内有界,即命题①不正确. 应选[B].

6. [D].

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=2\cdot 0=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$

当$x\to 1$时函数没有极限,也不是∞,故应选[D].

7. [B].

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3$,且$\ln 2+\ln 3\neq 1$,所以应选[B].

8. [D].

由于当$x\to 0$时,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$,故$x^2$,$1-\cos x$,$\sqrt{1-x^2}-1$是同阶无穷小,可见应选[D].

9. [A].

由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=-1$知,当$x\to 0$时,$f(x)\sim -x^2$,于是$x^nf(x)\sim -x^{n+2}$.

又当$x\to 0$时,$\ln\cos x^2=\ln[1+(\cos x^2-1)]\sim\cos x^2-1\sim-\frac{1}{2}x^4$. 再根据题设有:$2<n+2<4$. 可见$n=1$,故应选[A].

10. [D].

用排除法. 令

$$\varphi(x)=1-\frac{1}{x^2},\quad f(x)=1,\quad g(x)=1+\frac{1}{x^2}$$

显然
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$
且
$$\lim_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0.$$
此时
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=1.$$
故[A]和[C]都不正确.

为了排除[B],再令

$$\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2},\quad f(x)=x,\quad g(x)=x+\frac{1}{x^2},$$

显然$\varphi(x)$,$f(x)$,$g(x)$满足题设全部条件,但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,故应选[D].

11. [A].

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a(e^{\sin x}-1)+b(x-\sin x)}{c\tan x+d(1-\cos x)}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ae^{\sin x}\cos x+b(1-\cos x)}{c\sec^2x+d\sin x}$

当$a\neq 0$时,原式$\neq 0$,故选[A].

12. [D].

[A],[B] 显然不对,因为由数列极限的不等式性质只能得出数列"当 n 充分大时"的情况,不可能得出"对任意 n 成立"的性质.

[C] 也明显不对,因为"无穷小 · 无穷大"是未定型,极限可能存在也可能不存在.故应选[D].

13. [B].

排除法.由于当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to 0$ 可能是无穷振荡的,$f'(x)$ 可能没有极限,如

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x^2, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x^2 + 2\cos x^2,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在.故[A]不对.例如 $f(x) = \sin x \to 0(x \to 0^+)$,但 $f'(x) = \cos x \to 1 \neq 0$,故[C],[D]不对.应选[B].

14. [A].

由基本初等函数的连续性及连续函数的四则运算法则知 $f(x) = \ln x + \sin x$ 在其定义域 $0 < x < +\infty$ 内连续,故应选[A].

15. [D].

由 $f(x)$ 是奇函数有 $f(0) = 0$.又因为 $f'(0)$ 存在,所以

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0} g(x)$$

又因为 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的间断点,且 $\lim\limits_{x\to0} g(x) = f'(0)$.所以 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.故应选[D].

16. [B].

易计算得

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & |x| < 1, \\ \dfrac{1+x}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

由题设得极限为

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & |x| < 1, \\ \dfrac{1+x}{2}, & |x| = 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

可知,$x = -1$,$x = 1$ 为函数的分段点,作为函数图形可知 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点,$x = -1$ 为 $f(x)$ 的连续点,因此应选[B].

17. [D].

因为 $\lim\limits_{x\to0}(x) = \lim\limits_{x\to0} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \xlongequal{\frac{1}{x} = y} \lim\limits_{x\to\infty} f(y) = a$,从而,当 $a = 0 = g(0)$ 时,$g(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续;当 $a \neq 0$ 时,$g(x)$ 在点 $x = 0$ 处间断,即 $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.故应选[D].

二、填空题

1. $\dfrac{6}{5}$.

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{6}{5}.$$

2. e.

[解法一]

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)^x$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故原式 $=$ e.

[解法二]

设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to0$. 于是

$$\text{原式} = \lim_{u\to0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}} = e^{\lim\limits_{u\to0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}}.$$

而由洛必达法则，得

$$\text{原式} = \lim_{u\to0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u} = \lim_{u\to0}\frac{\cos u-\sin u}{\sin u+\cos u} = 1,$$

故原式 $=$ e.

3. $e^{\frac{n+1}{2}}$.

此极限是 1^{∞} 型未定式.

[解法一]

$$\text{原式} = \lim_{x\to0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right]$$
$$= \exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n}\right],$$

其中方括号内的极限是 $\frac{“0”}{0}$ 型未定式，因此由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{n} = \lim_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$
$$= \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

于是原式 $= e^{\frac{n+1}{2}}$.

[解法二]　由于

$$\frac{(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})^{nx}}{2}=\left[1+\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{n}\right]^{\frac{1}{x}},$$

又因
$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{nx}$$
$$=\frac{1}{n}\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}(n+1).$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}(n+1)}$.

4. 1, −4.

不难得出
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\begin{cases}0, & a\neq1,\text{任何 } b,\\ 1-b, & a=1,\text{任何 } b.\end{cases}$$
从而，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则必须且只须 $a=1,1-b=5$，即 $a=1,b=-4$.

5. $\frac{4}{3}$.

[解法一]
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin4x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{3x}=\frac{4}{3}$$

[解法二]
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x(1-\sin^2x)}{x^4}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^4}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}+1$$
$$=1+2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=1+\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{4}{3}.$$

6. $\frac{1}{4}$.

因为
$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\ln e^2=2,$$
所以
$$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(2x)}=2,\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x}{f(2x)}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0}\frac{u}{f(u)}=2.$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$.

7. 16.

$$\text{原式}\xlongequal{\text{令}x=-t}\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{at^2+t+2}-t+1}{\sqrt{t^2-\cos t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{a+1/t+2/t^2}-1+1/t}{\sqrt{1-(\cos t)/t}}=\frac{\sqrt{a}-1}{1}=3.$$

故 $a=16$.

8. $\dfrac{1}{3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^x-3^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^x-1\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}3^x\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x/3)}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}}{x}=\frac{1}{3}.$$

9. 2.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

10. $a=-\dfrac{3}{2}$.

由$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2$,$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,以及

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

可得 $a=-\dfrac{3}{2}$.

11. $\dfrac{1}{1-2a}$.

由于

$$\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right],$$

利用等价无穷小代换,有

$$\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty).$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

12. $4e^{-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdots\frac{(n+n)}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right]\right\}$$
$$=e^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}=4e^{-1}.$$

三、解答题

1.

属 1^∞ 型.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)},$$

由于 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=e^{-\pi/2}$.

2.

[解法一] 因为

$$\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]$$
$$=1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\quad\sqrt{1+x^3}$$
$$=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}.$$

[解法二]

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{6x^2}e^x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}.$$

3.

这是 n 项和式和极限,当各项分母均相同且是 n 时,n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 区间上的一个积分和，于是可由定积分 $\int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$ 求得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$.

为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$，首先通过放缩化简 n 项和数列：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

根据夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}.$$

4.

【证明】 首先，显然有 $x_n>0$，$\{x_n\}$有下界.

证明 x_n 单调减：用归纳法. $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$，设 $x_n<x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n.$$

由此，x_n 单调减. 由单调查有界准则，$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，求 a：在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$，取得 $a=33$（$a=-2$ 舍去，因为 $x_n>0$，$a\geqslant0$）.

5.

（Ⅰ）
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]\\&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right)\\&=\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）记 $a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，

则
$$a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\leqslant f(x)\leqslant\left(\frac{na^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=a,$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}a\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}a=a,$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\max(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

6.

（1）在区域$(-\infty,1)$内，$y=x$ 的反函数就是它本身，又因函数 $y=x$ 的值域为$(-\infty,1)$，故其反函数 $x=y$ 的定义域也为$(-\infty,1)$，于是有 $y=f^{-1}(x)=x(-\infty<$

$x < 1$).

(2) 在区间[1,4]上由 $y = x^2$ 解出 $x = \pm\sqrt{y}$,因 $x \in [1,4]$,故 $x = \sqrt{y}$;又函数的值域为[1,16],故其反函数定义域为[1,16]. 于是 $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}(1 \leqslant x \leqslant 16)$.

(3) 在区间$(4, +\infty)$上由 $y = 2^x$ 解出 $x = \log_2 y$. 因函数 $y = 2^x$ 的值域为$(16, +\infty)$,故其反函数定义域为$(16, +\infty)$,于是 $y = \log_2 x(16 < x < +\infty)$.

综上所述,所求反函数也是一分段函数,它的表达式为

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

7.

【证明】　利用不等式 $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$,有

$$|f(x)| \leqslant 1 + \left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 2.$$

故 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上有界.

8.

【证明】　在所给方程中,用 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得 $af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx$,联立原方程,消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $(a^2 - b^2)f(x) = \frac{ac}{x} - bcx$.

又 $|a| \neq |b|$,所以 $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right)$. 将 $-x$ 代入 $f(x)$ 表达式得

$$f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2}\left(-\frac{a}{x} + bx\right) = -\frac{c}{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{x} - bx\right) = -f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

9.

【证明】　(1) 由周期函数及奇函数的积分性质,得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x), \end{aligned}$$

所以,$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k,有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k]\,\mathrm{d}t = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t + k(x - a).$$

由于 $k(x-a)$ 是线性函数,所以只需证明当 k 取某一值时 $g(x) = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质,得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k]\,\mathrm{d}t = \int_a^x [f(t) - k]\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+T} [f(t) - k]\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) + \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - kT. \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，则 $g(x+T) = g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

10.

题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数的等式，此类题目的解法一般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$. 为此，令 $t = \frac{x}{x-1}$，则 $x = \frac{t}{t-1}$，代入原等式得

$$f(t) = af\left(\frac{t}{t-1}\right) + \varphi\left(\frac{t}{t-1}\right).$$

于是得到关于 $f(x)$，$f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 的二元一次方程组

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right) - af(x) = \varphi(x), \\ f(x) - af\left(\frac{x}{x-1}\right) = \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right), \end{cases}$$

解得 $f(x) = \frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x) + \varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$.

11.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi) &= \lim_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi + n\pi] \\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi \\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0,\end{aligned}$$

这里用到当 $n\to\infty$ 时，$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0\ (n\to\infty)$，又 $|(-1)^n| = 1$ 是有界量，根据有界量乘以无穷小量仍是无穷小量知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi) = 0$.

12.

由于

$$\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x} = 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2},$$

又因为 $\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} = \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0.$$

根据有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量，有

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = 0.$$

13.

因当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^n) \sim x^n$，$\ln^m(1+x) \sim x^m$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases}\infty, & n < m, \\ 1, & n = m, \\ 0, & n > m.\end{cases}$$

14.

因为

$$\frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1} \leqslant \frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}} \leqslant \frac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n} \quad (k=0,1,\cdots,n-1),$$

所以
$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}}.$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k+1}{n}} = 1\cdot(e-1) = e-1,$$

所以由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = e-1$.

15.

令 $x_n = \dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot\cdots\cdot(10+n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$,则$0 < x_n = \dfrac{11}{1}\cdot\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{10+n}{3n-4}\cdot\dfrac{1}{3n-1}$.

显然,当 $n>7$ 时就有 $3n-4>10+n$,此时(即当 $n>N=7$ 时)$0<x_n<\dfrac{C}{3n-1}$,其中 $C=\dfrac{11}{1}\cdot\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\dfrac{17}{17}$. 若取 $y_n=0, z_n=\dfrac{C}{3n-1}$,则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$,故所求极限为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

16.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}\\
&= -\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}\\
&\qquad\qquad (\text{因 } e^{(x-1)\ln x}-1 \sim (x-1)\ln x, x\to1 \text{ 时})\\
&\underline{\underline{\text{洛必达}}} -\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1} = -\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]\\
&= 1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{x-1x}\ \underline{\underline{\text{洛必达}}}\ 1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}\\
&= 1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)] = 1+1 = 2.
\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&\underline{\underline{\text{洛必达}}}\lim_{\varphi\to0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}+\frac{2}{\cos2\varphi}\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\cdot\right.\\
&\qquad \left.\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\right]\\
&= \frac{1}{2}(1+2+\cdots n) = \frac{n(n+1)}{4}.
\end{aligned}$$

18.

利用

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

分别取 $n=1,2,\cdots$,求和得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}&\\=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]&\\=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].&\end{aligned}$$

故 $\qquad$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}.$

19.

设 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<x_n$，且 $x_n>0$,所以由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}>\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}=x_n\cdot(2n+1),$$

即 $x_n^2<\frac{1}{2n+1}$,所以 $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,故由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20.

先将 n 项乘积化简为下述形式:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]},$$

再在上式两端求极限,得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2.$$

21.

因为当 $x\to 1$ 时,$\sin(x-1)\sim x-1$,所以原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $1+a+b=0$. 把 $b=-1-a$ 代入原式得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1+a}=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 1}(x+1+a)=0$,故得 $a=-2,b=1$.

22.

用等价无穷小代换分别得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0,n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

23.

因为分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展至二阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式

$$\ln(1+x) = x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2} = 2.$$

于是必有 $1-a=0$，$-(1/2+b)=2$，解之得 $a=1, b=-5/2$.

24.

注意到 $\lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$，应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0}f(x) = \lim_{x\to +0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})} = 1,$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0}f(x) = \lim_{x\to -0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1} = -1.$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在，因而在 $x=0$ 处不连续.

25.

(1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则必要求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty,$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

因此，当 $a=0, b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\frac{e\left(e^{x-1}-\frac{b}{e}\right)}{[(x-a)(x-1)]},$$

又因为当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a}.$$

第 2 章　导数与微分　题型强化练习参考答案

一、选择题

1. [C].

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\sqrt[5]{x^4}-1}{x}=0$ 即 $f'(0)=0$. 应选[C].

2. [C].

因 $3x^3$ 处处任意阶可导，所以只需考查 $x^2|x|\triangleq\varphi(x)$，它是分段函数，$x=0$ 是连接点.

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant0,\\ x^3, & x\geqslant0,\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^3, & x<0,\\ 3x^3, & x>0,\end{cases}$$

又
$$\varphi'+(0)=(x^3)=(x^3)'_+\big|_{x=0}=0,$$
$$\varphi'_-(0)=(-x^3)'_-\big|_{x=0}=0\Rightarrow\varphi'(0)=0;$$

即
$$\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant0,\\ 3x^3, & x\geqslant0;\end{cases}$$

同理可得
$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0,\end{cases}\quad\varphi''(0)=0;$$

即
$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant0,\\ 6x, & x\geqslant0\end{cases}=6|x|,$$

因 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导 $\Rightarrow\varphi'''(0)$ 不存在. 所以应选[C].

3. [B].

当 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$x\in(0,1)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin^2t\cos t}{3\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t<0,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-\tan t)=\frac{d}{dt}(-\tan t)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=-\sec^2t\cdot\frac{1}{3\cos^2t(-\sin t)}=\frac{1}{3\cos^4t\sin t}>0.$$

故选[B].

4. [D].

由题设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 知 $f(0)=0,f'(0)=1$. 令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F'(x)=f'(x)-1,F''(x)=f''(x)>0$.

于是 $F'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 内单调增加，且 $F'(0)=0$. 当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$F'(x)<F'(0)=0$；当 $x\in(0,\delta)$ 时，$F'(x)>F'(0)=0$. 可见 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值，也即最小值，从而有 $F(x)>F(0)=0$，即 $f(x)>x,x\in(-\delta,\delta)$，故应选[D].

5. [A].

设 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-f,\varphi''(x)=f''(x)$.