普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济管理数学基础

杨荣 张静 付瑶 编著

概率论与数理统计习题课教程

（第2版）

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理数学基础

杨荣 张静 付瑶 编著

概率论与数理统计习题课教程

（第2版）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是《概率论与数理统计(第2版)》(杨荣，郑文瑞编著，清华大学出版社，2014)的配套习题课教材. 内容包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计和假设检验.

本书分为8章，各章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还进行了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

本书可作为高等学校经济、管理、金融及相关专业微积分课程的习题课教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题课教程. /杨荣，张静，付瑶编著. --2版. --北京：清华大学出版社，2014
(经济管理数学基础)
ISBN 978-7-302-34711-8

I. ①微…　II. ①杨…　②张…　③付…　III. ①概率论-高等学校-题解　IV. ①O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第292369号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市李旗庄少明印装厂
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　**印　张**：15.75　**字　数**：290千字
版　次：2007年3月第1版　2014年6月第2版　**印　次**：2014年6月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：28.00元

产品编号：053433-01

“经济管理数学基础”系列教材总序

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学. 在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”，具备了更丰富的内涵和更广泛的外延. 数学科学在发展其严谨的逻辑性的同时，作为一门工具，在几乎所有的学科中大显身手，产生了前所未有的推动力.

在经济活动和社会活动中，随时都会产生数量关系和相互作用. 数学应用的第一步就是对实际问题分析其对象内在的数量关系，这种数量关系概括地表述为一种数学结构，这种结构通常称为数学模型，建立这种数学结构的过程称为数学建模. 数学模型按类型可以分为三类：第一类为确定性模型，即模型所反映的实际问题中的关系具有确定性，对象之间的联系是必然的. 微积分、线性代数等是建立确定性模型的基本数学工具. 第二类为随机性模型，即模型所反映的实际问题具有偶然性或随机性. 概率论、数理统计和随机过程是建立随机性模型的基本数学方法. 第三类为模糊性模型，即模型所反映的实际问题中的关系呈现模糊性. 模糊数学理论是建立模糊性模型的基本数学手段.

高等学校经济管理类专业本科生的公共数学基础课程一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三门课程，它们都是必修的重要基础理论课. 通过学习，学生可以掌握这些课程的基本概念、基本理论、基本方法和基本技能，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机量方面的数学基础. 在学习过程中，通过数学知识与其经济应用的有机结合，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的理性思维能力、综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力以及较强的自主学习能力，并逐步培养学生的探索精神和创新能力.

“经济管理数学基础”系列教材是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，包括《微积分》（上、下册）、《线性代数》、《概率论与数理统计》，以及与其配套的习题课教程. 为了方便一线教师教学，该系列教材又增加了与主教材配套的电子教案和教师用书（习题解答）. 该系列教材内容涵盖了教育部大学数学教学指导委员会制定的“经济管理类本科数学基础教学基本要求”，汲取了国内外同类教材的精华，特别是借鉴了近几年我国一批“面向21世纪课程”教材和国家“十五”规划教材的成果，同时也凝聚了作者们多年来在大学数学教

学方面积累的经验. 本系列教材编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意体现时代的特点，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，传授数学知识和培养数学素养的统一. 注重理论联系实际，通过实例展示数学方法在经济管理领域的成功应用. 把数学实验内容与习题课相结合，突出数学应用和数学建模的思想方法. 借助电子和网络手段提供经济学、管理学的背景资源和应用资源，提高学生的数学人文素养，使数学思维延伸至一般思维. 总之，本系列教材体现了现代数学思想与方法，建立了后续数学方法的接口，考虑了专业需求和学生动手能力的培养，并使教材的系统性和文字简洁性相统一.

在教材体系与内容编排上，认真考虑作为经济类、管理类和人文类各专业以及相关的人文社会科学专业不同学时的授课对象的需求，对数学要求较高的专业可讲授教材的全部内容，其他专业可以根据实际需要选择适当的章节讲授. “经济管理数学基础”系列教材中主教材基本在每节后面都配备了习题，每章后面配备了总习题，其中（A）题是体现教学基本要求的习题，（B）题是对基本内容提升、扩展以及综合运用性质的习题. 书末给出了习题的参考答案，供读者参考. 该系列教材中的习题课教程旨在帮助学生全面、系统、深刻地理解、消化主教材的主要内容，使学生能够巩固、加深、提高和拓宽所学知识，并综合运用所学知识分析、处理和解决经济管理及相关领域中的某些数学应用的问题. 每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲、疑难问题解答，有的章节还列出了常见错误类型分析，最后给出练习题、综合练习题及其参考答案与提示.

自本教材问世以来，许多同行提出了许多宝贵的意见，结合我们在吉林大学的教学实践经验，以及近年来大学数学课程教学改革的成果，我们对本系列教材进行了修订、完善. 本次修订的指导思想是：①突出数学理论方法的系统性和连贯性；②加强经济管理的实际应用的引入和数学建模解决方法的讲述；③文字力图简洁明了，删繁就简；④增加了实际应用例题和习题.

在本系列教材的编写过程中，吉林大学教务处、吉林大学数学学院给予了大力支持，吉林大学公共数学教学与研究中心吴晓俐女士承担了本系列教材修订的编务工作. 清华大学出版社的领导和编辑们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心的指导和大力支持. 在此一并致谢.

“经济管理数学基础”系列教材编委会
2013 年 8 月

前 言

经济管理数学基础《概率论与数理统计习题课教程》自2007年3月出版以来，受到了同行专家和广大读者的广泛关注，对本教材提出了许多宝贵的意见. 针对上述意见，结合我们在吉林大学的教学实践和教学改革以及大学数学教育发展的需要，我们对本教材进行了修订和完善.

根据本次修订的指导思想，紧密配合《概率论与数理统计(第 2 版)》主教材，同时结合考研大纲的要求，我们对书稿进行了适当的修改，充实了一些综合性较强的例题和习题，增加了实际应用例题和习题.

本次修订工作 1、2、3、6 章由杨荣负责，第 4、5 章由付瑶负责，第 7、8 章由张静完成，全书由杨荣统稿. 在本教材的修订过程中，得到了吉林大学教务处、吉林大学数学学院和清华大学出版社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本教材修订的编务工作，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正.

编　者

2013年8月

第 1 版前言

本书是依据经济类、管理类、金融类、人文类各专业对概率论与数理统计课程的教学要求而编写的.

本书密切配合“经济管理数学基础”系列教材中的《概率论与数理统计》，内容充实，题型全面，每章首先概括主要内容和教学要求，继之进行例题选讲，大部分章节还进行了常见错误类型分析、疑难问题解答，最后给出练习题、综合练习题及参考答案与提示. 参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者. 本书体现了现代数学思想与方法，解决疑难问题，总结学习规律，提示注意事项，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力.

本书内容包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验. 全书共分 8 章：其中第 1、2、3、6 章由杨荣编写，第 4、5 章由李忠范编写，第 7、8 章由张静编写. 全书由李忠范统稿. 青年教师孙鹏、侯影、朱本喜、卢秀双及研究生李健完成了本书的打印、排版、制图工作.

书中不足之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2006 年 8 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件及其概率

一、主要内容

随机试验和随机事件的概念, 随机事件的关系及运算, 概率的定义和性质, 古典概型和几何概型的概率计算.

二、教学要求

1. 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念, 掌握随机事件间的关系和运算.

2. 理解概率的定义, 掌握概率的性质.

3. 掌握古典概率及几何概率的计算, 能用概率的基本性质计算随机事件的概率.

三、例题选讲

例 1.1　写出下列随机试验的基本空间:

(1) 掷两枚骰子, 分别观察其出现的点数;

(2) 观察某昆虫的存活时间;

(3) 一人射靶三次, 观察其中靶次数;

(4) 口袋中装有 10 个球,6 个白球,4 个红球, 分别标有 $1\sim 10$ 号, 从中任取一球, 观察球的号数;

(5) 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标.

解　(1) $\Omega=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),(3,1),\cdots,(3,6),(4,1),\cdots,(4,6),(5,1),\cdots,(5,6),(6,1),\cdots,(6,6)\}$.

其中 (i,j) 表示第一枚骰子掷出 i 点, 第二枚骰子掷出 j 点 (i,j=1,2,3,4,5,6).

(2) $\Omega=(0,+\infty)$.

(3) $\Omega=\{w_{000},w_{001},w_{010},w_{011},w_{100},w_{101},w_{110},w_{111}\}$, 其中 w_{000} 表示三次均没中靶, w_{110} 表示第一次中靶, 第二次中靶, 第三次没中靶, 依次类推.

(4) $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(5) 取一直角坐标系, 则有 $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, 若取极坐标系, 则有 $\Omega = \{(\rho,\theta)\,|\rho<1, 0\leqslant\theta<2\pi\}$.

例 1.2　设 A,B,C 为三事件, 用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 都发生;

(5) A,B,C 都不发生;

(6) A,B,C 中不多于一个发生;

(7) A,B,C 中不多于两个发生;

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解　以下分别用 $D_i(i=1,2,3,\cdots,8)$ 表示 (1),(2),$\cdots$,(8) 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生, 例如事件 A 不发生即 $\overline{A}$ 发生.

(1) $D_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$ 或写成 $D_1 = A-B-C$.

(2) $D_2 = AB\overline{C}$ 或写成 $D_2 = AB-C$.

(3) $D_3 = A\cup B\cup C$ 或写成 $D_3 = \overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$, 或写成 $D_3 = A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

(4) $D_4 = ABC$.

(5) $D_5 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) $D_6 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或写成 $D_6 = \overline{AB\cup BC\cup CA} = \overline{AB}\cap\overline{BC}\cap\overline{CA}$.

(7) $D_7 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 或写成 $D_7 = \overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或写成 $D_7 = \overline{ABC}$.

(8) $D_8 = AB\cup BC\cup CA$ 或写成 $D_8 = ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

例 1.3　一名射手连续向某个目标射击三次, 事件 A_i 表示该射手第 i 次射击击中目标 $(i=1,2,3)$, 试用文字叙述下列事件: $A_1\cup A_2$; $\overline{A}_2$; $A_1\cup A_2\cup A_3$; $A_1A_2A_3$; A_3-A_2; $\overline{A_1\cup A_2}$; $\overline{A}_1\,\overline{A}_2$; $\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; $\overline{A_2A_3}$; $A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$.

解　$A_1\cup A_2$ 表示“前两次至少有一次击中目标”;

$\overline{A}_2$ 表示“第二次射击未击中目标”;

$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示“三次射击中至少有一次击中目标”;

$A_1A_2A_3$ 表示“三次射击都击中了目标”;

A_3-A_2 表示“第三次击中但第二次未击中目标”;

$\overline{A_1\cup A_2} = \overline{A}_1\,\overline{A}_2$ 表示“前两次射击都没有击中目标”;

$\overline{A}_2\cup\overline{A}_3 = \overline{A_2A_3}$ 表示“后两次射击至少有一次未击中目标”;

$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$ 表示“三次射击中至少有两次击中目标”.

例 1.4　指出下列关系中哪些成立, 哪些不成立.

(1) $\overline{A}B = A \cup \overline{B}$;　　(2) 若 $AB = \varnothing$, 且 $C \subset A$, 则 $BC = \varnothing$;

(3) $AB \cap A\overline{B} = \varnothing$;　　(4) 若 $\overline{A} \subset \overline{B}$, 则 $A \supset B$;

(5) $\overline{A-B} = \overline{A} - \overline{B}$;　　(6) $\overline{(A \cup B)C} = \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

解　(1) 不成立. 因为左边不含 A 而右边含 A.

(2) 成立. 因若 $BC \neq \varnothing$, 又 $C \subset A$, 则 $BA \neq \varnothing$, 此与条件矛盾.

(3) 成立. 因为 $B, \overline{B}$ 不同时发生, 从而 AB 与 $A\overline{B}$ 也不同时发生.

(4) 成立. 若 B 发生不导致 A 发生, 则导致 $\overline{A}$ 发生,$\overline{A} \subset \overline{B}$, 即导致 $\overline{B}$ 发生, 从而 $B \subset \overline{B}$, 矛盾.

(5) 不成立. 因为 $\overline{A-B} = \overline{(A\overline{B})} = \overline{A} \cup B$, 而 $\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} \cap B$.

(6) 不成立. 因为 $\overline{(A \cup B)C} = \overline{A}\ \overline{B} \cup \overline{C}$.

例 1.5　已知两事件:$A \subset B, P(A) = 0.2, P(B) = 0.3$, 求:

(1) $P(\overline{A})$;　　(2) $P(\overline{B})$;　　(3) $P(AB)$;

(4) $P(A \cup B)$;　(5) $P(B\overline{A})$;　(6) $P(A-B)$.

解　(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$;

(2) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$.

(3) $P(AB) = P(A) = 0.2$.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3$ 或 $P(A \cup B) = P(B) = 0.3$.

(5) $$\begin{aligned} P(B\overline{A}) &= P(B-A) = P(B) - P(AB) \\ &= P(B) - P(A) = 0.3 - 0.2 = 0.1. \end{aligned}$$

(6) $P(A-B) = P(\varnothing) = 0$.

例 1.6　已知 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B \mid \overline{A}) = 0.4$, 求 $P(A \cup B)$, $P(A-B)$, $P(A \cup \overline{B})$, $P(A \mid \overline{B})$.

解　由 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, 得 $P(\overline{A}) = 0.5$, $P(\overline{B}) = 0.4$;
又 $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$,
而 $P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = 0.2$, 故 $P(AB) = 0.4$.
所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7$, $P(A-B) = 0.1$,

$$P(A \cup \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}B) = 0.8,$$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\overline{B})} = \frac{0.5 - 0.4}{0.4} = 0.25.$$

例 1.7 证明: 对任意事件 A, B 有

$$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$

证明

$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(AB)&=P(A-B)P(AB)+P(B-A)P(AB)\\&\quad+P(AB)P(AB)\\&\leqslant P(A-B)P(B-A)+P(A-B)P(AB)\\&\quad+P(B-A)P(AB)+P(AB)P(AB)\\&=[P(A-B)+P(AB)][P(B-A)+P(AB)]\\&=P(A)P(B).\end{aligned}$$

所以 $$P(A\cup B)P(AB)\leqslant P(A)P(B).$$ □

例 1.8 设事件 A 与 B 同时发生必导致 C 发生, 则 (   ).

(A) $P(C)=P(AB)$ (B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C) $P(C)=P(A\cup B)$ (D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$

解 由于 $P(C)\geqslant P(AB)$, 而

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

所以选 (B).

例 1.9 袋内放有 2 个伍分,3 个贰分和 5 个壹分的钱币, 任取其中 5 个, 求钱额总数超过壹角的概率.

解 共有 10 个钱币, 任取 5 个, 则基本事件总数为 C_{10}^5, 有利于事件 A(取 5 个钱币金额超壹角) 的情形有以下两种:

(1) 取 2 个 5 分币; 其余 3 个可任取, 其总数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3\ (\text{或 } C_2^2C_8^3);$$

(2) 取 1 个 5 分币, 则 2 分币至少要取 2 个, 其总数为

$$C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2.$$

故有利于事件 A 的基本事件总数为

$$C_2^2C_3^3+C_2^2C_3^2C_5^1+C_2^2C_3^1C_5^2+C_2^2C_5^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126.$$

所以
$$P(A)=\frac{126}{\mathrm{C}_{10}^{5}}=\frac{1}{2}.$$

例 1.10　一袋内装有 7 个球, 其中 4 个白球,3 个黑球. 从中一次抽取 3 个, 求至少有 2 个白球的概率.

解　设事件 A_i 表示“抽到的 3 个球中有 $i\ (i=2,3)$ 个白球”, A_2 与 A_3 互不相容, 由古典概率的定义, 有
$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{18}{35},\quad P(A_3)=\frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^3}=\frac{4}{35},$$
故所求概率为
$$P(A_2\cup A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{22}{35}.$$

例 1.11　设有 r 个人, $r\leqslant 365$. 并设每人的生日在一年的 365 天中的每一天的可能性是均等的, 问此 r 个人生日都不相同的概率是多少?

解　r 个人都以等可能的机会在 365 天中的任一天出生, 故基本事件总数为 365^r, 设 A 为“r 个人生日都不相同”的事件, 则 A 所含的基本事件数为“从 365 个不同元素中任意取出 r 个不同元素的排列个数”, 即为 $\mathrm{P}_{365}^{r}=\dfrac{365!}{(365-r)!}$. 于是
$$P(A)=\frac{365!}{(365-r)!365^r}.$$

例 1.12　设有大小相同标号分别为 1,2,3,4,5 的 5 个球, 同时有标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个盒子, 将 5 个球放入 10 个盒子中, 假设每个球放入任何一个盒子中的可能性相同, 并且每个盒子可以同时容纳 5 个以上的球, 求下列事件的概率:

(1) 某指定的 5 个盒子各有一个球;

(2) 每个盒子中最多只有 1 个球;

(3) 某指定的盒子内不空.

解　5 个球放入 10 盒子中, 因为每个球有 10 种投法, 据乘法原理, 共有 10^5 种不同的投法. 且是等可能的.

(1) 设 A 表示“某指定的 5 个盒子中各有 1 个球”的事件.A 包含的基本事件数, 即 5 个不同元素的全排列, 共有 $n_A=5!$, 于是
$$P(A)=\frac{5!}{10^5}=0.0012.$$

(2) 设 B 表示“每个盒子中最多只有一个球”的事件.B 包含的基本事件数, 因为不指定哪 5 个盒子有球, 首先从 10 个盒中任取 5 个盒子, 共有 C_{10}^{5} 种取法.