

误差论

THEORY ON ERRORS

NEW CLASSICAL THEORY ON ERRORS FOR REMOTE SENSING SURVEYING AND MAPPING

----- 误差分布与传播的普遍规律 -----

----- 测量平差学引论 -----

王玉玮 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press



1956 2012

误差分布与传播的普遍规律
测量平差学引论

误差论

THEORY ON ERRORS

NEW CLASSICAL THEORY ON ERRORS FOR REMOTE SENSING SURVEYING AND MAPPING

王玉玮 著

国防工业出版社

· 北京 ·

本书由中国航天基金会资助出版

图书在版编目(CIP)数据

误差论 / 王玉玮著. —北京:国防工业出版社,
2014.1

ISBN 978 - 7 - 118 - 08866 - 3

I. ①误... II. ①王... III. ①误差理论

IV. ①0241.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 273401 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷责任有限公司

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 21 $\frac{3}{4}$ 字数 412 千字

2014 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—1050 册 定价 198.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

谨以此书

献 给

关心基础理论研究的读者

测绘学,是有单位的数学。确切地说,是探索宇宙空间天体、星体、大地几何状态和物理特性的学科。在探索的过程中,有关数据必然会遇到误差的干扰;其他与测绘学相关的学科亦然。如何面对这个客观现实,这本《误差论》阐明了方向!

——作 者

人类的历史,就是一个不断地从必然王国向自由王国发展的历史。……因此,人类总得不断地总结经验,有所发现,有所发明,有所创造,有所前进。

——毛泽东

大 上
器 善
晚 若
成 水

沈
景
弦
二〇二
十
月
十
日

无为而无不为

王瑞

写于王瑞同志《误差说》

付梓之时

2011.10.1

作者王玉玮所著《误差论》是论述测量平差学科基础理论的学术性著作。该书从拉普拉斯与高斯在早年的学术分歧到今天的统一,均以简练的数学语言,做出了严密的阐明。书中所提具有普遍性的“王玉玮分布”,是王玉玮多年的研究成果,从学术探索的角度提出了一个数据处理的新途径。该书出版,将为测量平差的科学概念和算法,开拓一个新领域。

沈荣骏 高俊 谢世杰

2011.12.18日 2011.12.9 2011.12.23

沈荣骏,原国防科工委副主任,中将,中国工程院院士;

高俊,原郑州解放军测绘学院院长,少将,中国科学院院士;

谢世杰,总参测绘局资深研究员,天文、大地测量专家。

致 谢

谨此衷心致谢,自 1956 年至 2012 年,作者在探索误差理论的过程中,在关键时刻给予支持、鼓励、帮助的中国遥感测绘界精英。

林颂章: 20 世纪 50 年代至 60 年代初,为中国人民解放军军委测绘学院教员,后任新疆建设兵团设计院总工程师。

卢福康: 20 世纪 50 年代,为中国人民解放军总参谋部测绘研究所副所长,后任总参测绘局总工程师,天文测量专家、学者。我国气压测高仪首创者。著有《天文测量学》。

吴仕杰: 原上海同济大学校长秘书;20 世纪 40 年代末,参加中国人民解放军第二野战军;50 年代初,是设计修建康藏公路的主要技术领导人,曾任拉萨规划委员会副主任;后调总参测绘局组建总参测绘研究所,任研究所科技处处长,后任总参测绘局资深研究员。

谢世杰: 上海同济大学测量系毕业;20 世纪 40 年代末,同吴仕杰一起参加中国人民解放军第二野战军,修建康藏公路;后调总参测绘研究所,现任总参测绘局资深研究员,天文大地测量学家。

党颂诗: 武汉大学数学系毕业;20 世纪 50 年代初,任中国人民解放军军委测绘学院教员、教授,为我军测绘事业,特别是军事测绘数学的学科领域,开拓了空间。

张国威: 安徽全椒人,1949 年参军,20 世纪 50 年代初,任中国人民解放军总参测绘局参谋,后任总参测绘研究所科技处处长;20 世纪 80 年代,调任总参测绘局副局长,后任局长,少将军衔。

石玉臣: 黑龙江绥棱人,1958 年军委测绘学院毕业后,在总参测绘局航测队任助理员;20 世纪 60 年代初,转入地方,受命组建煤炭部航空摄影测量队,“文革”时期,坚持生产,使测量队逐渐壮大为煤炭工业部航测遥感局,时任局长。

沈荣骏: 安徽合肥人,1958 年军委测绘学院毕业后,参加酒泉基地建设,16 年后,调任洛阳测通所副所长、所长;1985 年调任北京国防科工委干部学校校长;1986 年调任国防科工委副主任,中将军衔;中国航天工程的组织者、领导者、见证者,航天载人工程的先驱者;中国工程院院士。

测绘精英, 学界楷模!

序

1809年,德国科学家高斯(Gauss)发表了高斯分布[2. VII, P254],为1806年法国科学家勒让德(Legendre)提出的“最小二乘法”阐明了理论基础,标志着近代测绘学科的诞生。

从哥白尼、开普勒、牛顿生活的年代到18世纪末,以天文大地测量为核心的自然科学界,都在被与偶然误差有关的剩余观测问题困扰着;它像一堵高墙,禁锢着科学家们的前进道路。高斯分布使这堵高墙坍塌了,给科学家带来了科学史上的惊喜。科学家们越过坍塌的高墙,奔向各自向往的四方,开创了近代科学之舟从无到有的启航。

高斯分布,是高斯在点着蜡烛的条件下写成的,电的能量还没有被人们利用。数据处理的计算手段,不是手摇计算机,不是电动计算机,更不是今天应用的电子计算机,而是刚刚从筹码、珠算演变过来的纳伯尔对数。法国科学家拉普拉斯(Laplace),曾先于高斯分布,提出过拉普拉斯分布,对基于高斯分布的最小二乘法持之疑义[7. P118];但经过认真的反复推敲后认定:在当时的对数手段条件下,寻求基于严密数学基础的办法应用于生产,是不现实的,是不可能的。也就是说,最小二乘法是当时在没有更好方法共识的前提下提出来的,是没有办法的办法。

200多年的时间过去了!在这200多年间,很多测绘学者,在拉普拉斯、高斯分布的基础上,对偶然误差的分布规律,进行了认真的不断的研究,极大地揭示了误差分布规律的数学内涵。

数学内涵是学科发展的灵魂,数据处理是学科发展的动力。随着对误差分布数学内涵的认识和数据处理计算手段的逐步提高,科学界与误差分布相关的学科,都有了突飞猛进的发展,造就了现代科学的繁荣局面。21世纪的今天,电子计算机超高水平的发展,则进一步向各个学科发出了科学里程碑的警告:基于“对数时代”学科的基础理论,必须在“电子计算机时代”重新审核。首先受到警告的学科,应该是测绘学(遥感测绘学)。

21世纪的测绘学,应向何处去?每一个从事测绘学科工作的学者,都应该考虑。应该说,“数字地球”就是方向。

测绘学科奔向数字地球大道,应该从基础理论开始,应该探索基础理论在电子计算机时代与对数时代可能出现的差异。综合近年来学者们的意向,大体上说,遥感测绘学科,应该在误差理论的深化、天文经纬度测定的精化、大地航测球面解算方法的优化、光学系统畸变(在摄影测量原始数据中)的净化、数字地球屏幕显示

的规范化等五个主要方面进行学科理论的探索。深化、精化、优化、净化和规范化,是当前研发数字地球基础理论五个方面的重要任务。中国遥感测绘学科的发展方向是数字地球,数字地球的研发重点是探索“五化”。

在“五化”任务中,误差理论的“深化”,是重中之重。

在今天 GPS 到处都受到欢迎的这个年代里,人们几乎都忘记了天文测量。忘记 GPS 的精度来自大地,大地的精度来自天文。天文测量学科的科技工作,没有得到应有的重视。我国应用天文测量,光机结构,仍停留在 45°和 60°传统的水银等高技术水平上[5. P270],约束了“基准水平面的稳定性误差为 0”这个优越性的发挥。另外,现代科学实践,要求天文大地测量的精度,要高于($m = \pm 0.01''$);这是对当前天文测量仪器设备“精化”的新要求,也是对天文测量数据误差处理“深化”技术的高标准要求。

大地测量和航空、航天摄影测量,从董德编著的《测绘学公式集》一书^[16]可知,在科技领域,测绘科技工作者已经开拓了一个浩瀚的测绘数学空间。现在的问题是,在电子计算机时代,应该如何面对数字地球精度要求?无疑,应该对大量异曲同工的数学方法进行优化。局限于对数时代而进行线性化的展开式,应该恢复完整的全式;球面问题简化为平面解算的平面状态,应该恢复它们的球面状态。优化大地、航测球面解算方法的核心任务,就数学模型来说,是全面地以球面坐标系(L, B, d),来代替基于高斯投影的直角坐标系(X, Y, h);就非线性方程组来说,是以全误差方程组的整体解算,来代替省略高次项的线性化解算。优化计算方法也好,优化整体解算也好,这个“优化”前提,应该是首先把含有误差的观测数据处理好,把误差理论的“深化”工作处理好。

在数字测量像机的几何鉴定问题上,求解内方位元素和“净化”光学畸变对原始数据的影响,本人在总结前人成果的基础上,运用合片理论,1988 年提出了有利于提高精度的计算公式[17. P49][18. P124][21. P277];但这些公式,仍须以误差理论的“深化”工作为前提。

另外,在现代兴起的数字地图、数字地球研发工作中,屏幕显示的“规范化”精度,更须以误差理论的“深化”工作为前提。

总之,涉及 21 世纪测绘学科发展的“五化”任务,最重要的是误差理论的深化。

自从高斯分布问世以来的 200 多年间,有关反映误差分布理论的数学公式,已有不少。涉及测绘学基础理论的误差分布,主要内容如下:

早于 1806 年的拉普拉斯分布和最小一乘原理[11. P64]

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda}\right), [V] = \min$$

1806 年的勒让德(最小二乘)原理[6. P13]

$$[VV] = \min$$

作为误差分布的普遍性,高斯不认可拉普拉斯分布和最小一乘原理;1809 年

发表了基于算术数原理的高斯分布和最小二乘原理[2. VII, P254][7. P11]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot m} \exp\left(-\frac{1}{2m^2}x^2\right), [VV] = \min$$

乔丹认为,拉普拉斯分布和高斯分布,在误差极值问题上是没有数量概念的,理论上是以无穷大为极限,与近百年来,在测绘实践活动中出现的误差分布实际现状是相悖的;故于1904年发表了包含最大误差 α 参数的乔丹分布[3. P104]

$$f(x) = c \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^q$$

随后,又经历了半个世纪的测绘实践,不少学者发现,不仅有双峰分布、多峰分布,即使是单峰分布,也多有不遵循高斯分布规律的现象。这些现象,经我国著名学者刘述文研究,1950年发表了刘述文分布[3. P78]

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt{2\pi} \cdot m} \left(1 + \left(3 - 6\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{x}{m}\right)^4\right) \frac{[Pss]}{8m^4} + \dots\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2m^2}\right)$$

除刘述文分布外,在近半个世纪里,我国学者对误差分布不遵循高斯分布的现象多有研究。诸如:双峰分布、截尾分布、有界分布等,以及广义平差、相关平差、逐一平差、滤波平差、积分平差、拟稳平差等([9. P215]),都是在不同程度上,对误差基础理论认识深化的探索;但这些探索,在误差分布的普遍规律问题上,都未能具备严密的数学基础。为此,王玉玮基于严密的数学基础,1983年发表了王玉玮分布[16. P417][20. P9]

$$f(x) = \frac{\varepsilon}{4\alpha \cdot W\left(\xi, \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right)} \cdot \exp\left(-\xi \frac{|x|^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon - |x|^\varepsilon}\right)$$

从理论上阐明了误差分布的普遍规律,进而提出具有普遍性的测量平差学原理:

$$\left[\frac{|V|^\varepsilon}{\alpha^\varepsilon - |V|^\varepsilon}\right] = \min$$

实验室的数据已经显示,基于该原理的数据处理方法,在精度上要比最小二乘法高达25倍[19. P42]。这固然是王玉玮分布在更深的层次上反映了误差分布的规律,但还应该说,更重要的原因是(当时运行的北京大学6912)电子计算机高性能的发挥。电子计算机的问世,标志着测量平差学科“没有办法的办法”的“最小二乘法”时代已经过去[1. IV, P45],基于“严密数学理论基础的办法”的时代已经到来。

王玉玮分布是在拉普拉斯、高斯等分布理论基础上,对拉普拉斯、高斯分布理论的发展,是对测量平差基础理论认识的深化。上述拉普拉斯、高斯等分布,都是王玉玮分布的特例[19. P28];王玉玮分布是误差分布规律的普遍形式。

王玉玮分布的学术前提,是反映历代学术界先哲思想,在误差基本概念上的共识(3.001)~(3.004)四式;该共识,基于严密的数学基础,使长期处于分歧状态的

多种分布得到了统一。继之,使学术界长期回避的、函数误差分布的数学界定问题得到了解决;概率论学科的中心极限定理,只是特定数学条件下的特例,没有普遍性。遥感测绘学术界的测量平差学科,应该摆脱中心极限定理的长期束缚,深化测量平差的科学概念和算法,开拓新的领域。

目前,在天文经、纬度测定的精化问题上,除坚持水银等高仪器水平面的稳定性误差为0思想外[5. P270],还必须遵循误差分布规律,正确处理误差方程的相互关系。在大地、航测学科,王之卓院士曾提出“双向解析摄影测量的运算,也可以不区分为相对定向、绝对定向及模型坐标计算等步骤,而把这些步骤放在一个整体内进行,理论较为严密”的优化计算观点[4. P43],仍与误差分布相关。至于有关光学畸变的净化、数字地球显示的规范化,都是与正确认识误差分布的数学概念,紧密相连。五化任务的首要任务是深化,深化误差理论,势在必行。

作为学术问题,探索过程是坎坷的。但毕竟在中国测绘界先驱楷模和同志们的积极努力支持下,看到了曙光。

科学的宗旨,是求真务实;学者的风范,是忠诚严谨。检验真理的唯一标准,只能是认真的实践。评判测绘科技成果的唯一标准,只能是以数学为主要内涵的科学实验;不能是个人意志,不能是远离数学、又不敢以文字表述的“人云亦云”。学术界应该远离“人云亦云”的不利因素,形成“善学者尽其理,善行者究其难”的“百家争鸣”新局面;尽其理,究其难,坚持科学发展观,传承创新。

中国遥感测绘科技界的同志们,让我们在科学发展观的思想指引下,不忘

尽理 究难 传承 创新
求真 务实 忠诚 严谨

团结起来,面对21世纪的今天,把《误差论》的学术思想,传播祖国大地;在增强国家整体实力的工作中,做出遥感测绘学科应该做出的贡献。

王玉玮

2011年8月1日于北京怀柔

本书体例

一、本书中引文标注约定

1) 参考文献引文来源索引信息,以[]标注:

[3.P78]——引文有原文、原意之分,引原文加“”相括,引原意不加。

└—— 参考书的第78页
└—— 参考文献中,编号为[3]的参考书

2) 本书中,编、章内的文献引用标号,以[]相括,引用数学公式时:

[15.(482)], [19.P102(3.215)]

└—— 第(482)号公式 └—— 第(3.215)号公式
└—— 第15篇文献 └—— 第19篇文献,第102页

3) 参考文献非具体引文标注:

[16]——参考文献中,编号为[16]的参考书

4) 正文可省略的定义性、详细注释性的文字,以()标注:

(光机数字化)解析测图仪——“光机数字化”是可省略的文字

5) 正文可省略的参考性注释文字,以[]标注:

[以缩小镜头场角之举,……实非正道]——文字供读者参考

6) 【 】为学术期刊杂志名括号;期刊杂志名与其刊载文章名,以“·”相间:

【军事测绘·误差有限分布论】(·点后为文章名)

7) 《 》为书名括号,书名与其编章名,以“·”相间:

《遥感测绘学术论文选集·误差有限分布论》(·点后为文章名)

8) = = 为数学表达式(数学特性的)等效符号:

$A = = B$

表示数学表达式 A 与数学表达式 B 等效, B 可以代替 A 。

二、本书编章结构形式、公式、图形、引用参考文献等标号约定

1) 《误差论》书中,编、章结构形式:…(全书分编序号数小于10)

编:第一编,第二编…(编内分章序号数小于10)

章:第一章,第二章…(章内分节序号数小于10)

节:一、二…(节内公式序号数小于10)

段:一),二)…

分:1),2)…

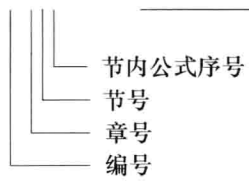
点:A),B)…

注:*),**)…

2) 本书中,编、章结构中的数学公式标号:(编、章、节的序号均小于10)

数学公式标号,采取中国传统的“编、章、节序,一点式”方法,即

(3.496); (a1), (a2), …, (b1), (b2), …, (k1), (k2), …, (n1) …

	章、节内数学公式临时编号,为便于节内公式推演而设;只供章内引用,不提供章外引用。
	章、节、公式序号,单数字相连,如:496编号与章号,以“.”相间,如:3.4

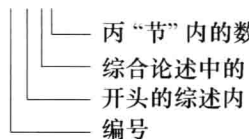
(第三编.第四章 第九节内的第6个数学公式;标号提供节外引用)

由于数学公式标号,是节序,只在节内的序号连续,在编、章内不连续,故判断书中

“正文”是否连续,是否有缺失?以页码序号连续为准。

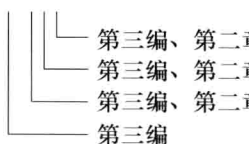
3) 本书中,编、章内开头的综合论述,其中数学公式标号,以0表之:

(4.035); (开头的综合论述,若分“节”,按“甲、乙、丙、…”标注)

	丙“节”内的数学公式序号(第5个公式)
	综合论述中的(丙)部分,处正文结构中的第三“节”位(以3标号)
	开头的综述内(在分章论述之前)的数学公式标志(以0标号)
	编号

4) 本书中,编、章内的图形标号与数学公式标号同,只是标号以【】相括:

【3.241】;

	第三编、第二章、第四节的第一个图形
	第三编、第二章、第四节
	第三编、第二章
	第三编

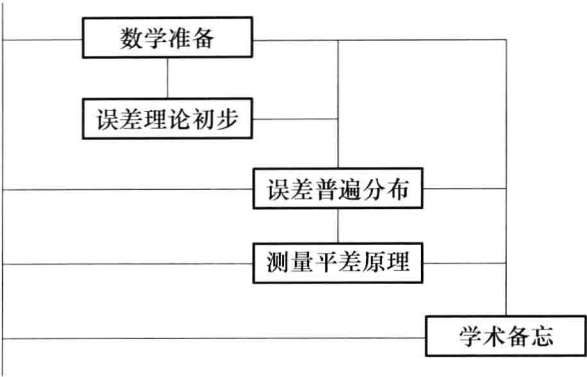
5) 本书中,公式、图形、文献引用形式示例:

——“(3.126)式”

——“图【3.241】”

——“高斯分布[2. VII, P254]”

三、本书中编、章结构示意



四、本书中选用希腊字母含义

希腊字母	字母名称	音节读音	选用字母	涵义
A α	Alpha	<i>al · fa</i>	α	最大误差
B β	Beta	<i>be · ta</i>	β	最大误差
Γ γ	Gamma	<i>gam · ma</i>	Γ, γ	函数幂差特征值
Π π	Pi	[<i>pai</i>]	π	圆周率
Θ θ	Theta	<i>the · ta</i>	θ	五阶误差特征值
Δ δ	Delta	<i>del · ta</i>	Δ, δ	函数未知数误差
Ξ ξ	Xi	[<i>ksai</i>]	ξ	误差分布参数
H η	Eta	<i>e · ta ei · ta</i>	η	误差分布参数
Z ζ	Zeta	<i>ze · ta</i>	ζ	误差分布参数
K κ	Kappa	<i>ka · pa</i>	κ	单位权误差
M μ	Mu	<i>mu</i>	μ	
E ε	Epsilon	<i>ep · si · lon</i>	ε	
Λ λ	Lambda	<i>lam · da</i>	λ	一阶误差特征值
T τ	Tau	<i>tau</i>	τ	误差特征值
Ω ω	Omega	[<i>oumiga</i>]	Ω, ω	全概率、三阶
Φ φ φ	Phi	[<i>fai</i>]	φ, φ	多种函数名
P ρ	Rho	[<i>rou</i>]	ρ	未知数列阵
Ψ ψ	Psi	[<i>psai</i>]	ψ	多种函数名
Σ σ ζ	Sigma	[<i>sigma</i>]	Σ, σ	四阶误差特征值