

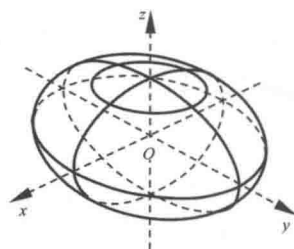
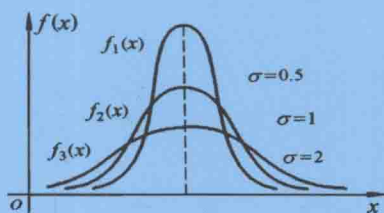
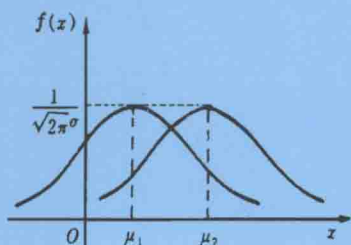


高职高专“十二五”规划教材

应用数学教程

YING YONG SHU XUE JIAO CHENG

主编 刘崇华 陈贵军



航空工业出版社

高职高专“十二五”规划教材

应用数学教程

主 编	刘崇华	陈贵军
副主编	郑玉敏	杨喜庆
参 编	王迎春	王胜男
主 审	王翠苒	

航空工业出版社

北 京

内 容 提 要

本书是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的高职院校公共基础课教材。全书共十章,分别讲述了函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、随机事件与概率、数理统计简介、矩阵、线性方程组等内容。此外,书后附有全部练习题的参考答案。

本书结构合理、论述准确、通俗易懂、例题丰富、突出实用性,可作为高职院校的数学基础课教材,也可作为读者的自学用书或参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学教程 / 刘崇华, 陈贵军主编. — 北京 :
航空工业出版社, 2011.8
ISBN 978-7-80243-800-2

I. ①应… II. ①刘… ②陈… III. ①应用数学—教材 IV. ①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 145220 号

应用数学教程 Yingyong Shuxue Jiaocheng

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行部电话: 010-64815615 010-64978486

北京忠信印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经售

2011 年 8 月第 1 版

2011 年 8 月第 1 次印刷

开本: 787×1092

1/16

印张: 13.25

字数: 331 千字

印数: 1—3000

定价: 28.00 元

出版说明

教材建设是高职院校内涵建设的重要内容。黑龙江生态工程职业学院组建之初,就十分重视教材的配套使用和配套编写。几年来,陆续出版了木材加工、多种经营、林产工业、森林养护和经济管理类等多部教材。由公共文化课和素质教育课组成的通识课程,不仅应服务于专业教学,更应服务于学生的后续发展,其作用更是奠基性的。因此,按照高职教育的要求,着力改革使用量大、使用率高的通识课教材,始终是学院教材建设的重点。正是基于这样的想法,在一直采用校本教材进行通识课程教学的过程中,经过实践中的不断修改,教材内容更加充实完善,在连续编写出版了园林类专业教材、计算机应用类系列教材后,对使用了几年的《生态伦理与节约型社会》、《应用数学教程》、《应用文写作与口语表达》、《实用英语教程》和《基础应用化学》校本教材,正式出版付印。

本次出版教材的特点:一是教材内容以实用、够用为原则,去除高、精、尖和抽象的理论,与专业的结合更加紧密。二是充分考虑学生的实际学习能力,以发挥学生的表象思维能力为主,体现了以学生为本的思想。三是引入生态文明的理念,助推学生对人与人、人与社会 and 人与自然之间关系的认识进程,促进学生情感、意志、人生观和价值观的正确形成,体现了对学生道德素质培养和形成的较高认识。四是在注重学生专业能力培养的同时,更加注重学生学习能力和社会能力的培养,体现了为学生职业素质形成和未来发展负责的态度。

本套教材可作为高职院校公共基础课教材和教学参考书。由于认知水平有限,不足之处难免,敬请批评指正。

高职高专公共基础课新课改教材编委会

主 任 张化疆

副主任 陈贵军 李永喜

编 委 刘永昌 殷敏红 黄志刚 卢 勇 刘崇华



高等职业教育作为我国高等教育的重要组成部分和特殊类型,肩负着为生产、建设、服务和管理第一线培养高素质技能型人才的使命,在加快推进社会主义现代化建设进程中具有不可替代的作用。而高等应用数学作为高职高专学生的一门专业基础课程,在为专业课程和其他各个领域服务上发挥着越来越大的作用。为了适应这种新的发展形势和高等职业教育改革的需要,我们根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则编写了这本教材。

本教材将重点放在“理解概念、掌握方法、强化应用、培养能力”上,教学内容符合学科要求,知识结构合理,在体例设计和内容安排上有以下特点:

1. 以实际应用为引例,导入概念、性质和定理,并加强了直观描述和几何解释,使抽象的概念形象化。让学生体会到数学是来源于实际,又能指导实际的一种思维创造。淡化理论推导,逐步渗透数学建模的思想,注重应用意识与创新思维能力的培养。

2. 在某些章节的后面介绍了一些相关数学家的生平事迹和成就,增强了数学课的人文氛围,使学生在学数学知识的同时不仅可以了解数学的发展历程,还可以受到数学文化的熏陶。

3. 每章后都配有练习题,类型包括填空题、选择题、计算题、综合题等,且书后附有练习题参考答案。

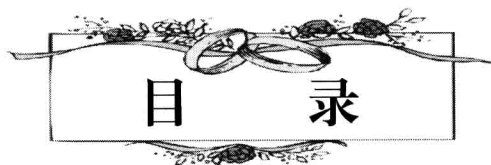
本教材共分十章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、随机事件与概率、数理统计简介、矩阵、线性方程组等。建议教学时数为80~100学时,在具体教学过程中,可根据自己学校的具体情况灵活掌握,必要时可对书中要讲解的内容进行适当删减。

本教材由黑龙江生态工程职业学院的教师编写。其中,刘崇华负责提出全书的总体编写思路,并编写了第一章、第二章、第三章和第四章;陈贵军负责编写了第七章和第八章,并对本书初稿进行过一次修改;郑玉敏负责编写了第五章和第六章;杨喜庆负责编写了第九章和第十章;王迎春演算了每章后面的习题并编制了附表;王胜男负责编写了部分章节后面的数学家故事并绘制了所有图形。

本教材由黑龙江生态工程职业学院王翠苒主审。王翠苒认真审阅了书稿,并提出了许多中肯的意见和有价值的建议。此外,本教材在编写过程中参考了大量的文献资料,在此向文献资料的作者致以最诚挚的谢意。

由于编者水平和编写时间有限,书中难免存在一些错误和不妥之处,恳请广大师生、读者批评指正。

编 者
2011年7月



第一篇 一元函数微积分

第一章 函 数	1
第一节 函数及相关概念	1
一、区间与邻域	1
二、函数的定义	2
三、函数的表示法	2
第二节 函数的特性	3
一、函数的单调性	3
二、函数的奇偶性	4
三、函数的有界性	4
四、函数的周期性	4
第三节 函数的运算	4
一、复合函数	5
二、反函数	5
第四节 初等函数	6
一、基本初等函数	6
二、初等函数	8
三、应用举例	9
练习题一	10
第二章 极限与连续	12
第一节 极限的概念	12
一、数列的极限	12
二、函数的极根	13
三、无穷小与无穷大	16
第二节 极限的运算	17
一、极限的四则运算法则	17
二、无穷小的比较	18
第三节 两个重要极限	19
第四节 函数的连续性	21
一、函数连续的概念	21
二、函数的间断点	22
三、初等函数的连续性	23
四、闭区间上连续函数的性质	24



练习题二	25
第三章 导数与微分	28
第一节 导数概念	28
一、引例	28
二、导数的定义	29
三、导数的几何意义	31
四、可导与连续的关系	31
第二节 求导法则	32
一、导数的四则运算法则	32
二、反函数的求导法则	33
三、高阶导数	34
第三节 复合函数和隐函数求导法测	34
一、复合函数求导法测	34
二、隐函数求导法测	35
三、对数求导法	35
第四节 微分及其应用	36
一、微分的定义	36
二、微分的几何意义	37
三、微分公式和运算法则	37
四、微分在近似计算中的应用	38
练习题三	39
第四章 导数的应用	42
第一节 微分中值定理	42
第二节 洛必达法则	44
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式的计算	44
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的计算	44
三、其他类型未定式的计算	45
第三节 导数在研究函数性态中的应用	46
一、函数的单调性	46
二、函数的极值和最值	47
三、曲线的凹凸性和拐点	50
第四节 导数在经济学中的应用	51
一、边际分析	51
二、弹性分析	53
三、最值分析	53
练习题四	54
数学家故事	56

罗 尔(Rolle, Michel)	56
拉格朗日(Lagrange, Joseph—Louis)	57
洛必达(L'Hospital)	58
第五章 不定积分	59
第一节 不定积分的概念与性质	59
一、原函数与不定积分的概念	59
二、不定积分的性质和几何意义	60
三、不定积分的直接积分法	61
第二节 不定积分的换元积分法	62
一、第一类换元积分法	63
二、第二类换元积分法	66
第三节 不定积分的分部积分法	68
第四节 有理函数的不定积分	70
练习题五	72
第六章 定积分及其应用	74
第一节 定积分的概念与性质	74
一、定积分的概念	74
二、定积分的性质	77
第二节 微积分基本公式	78
一、变上限的定积分	78
二、牛顿—莱布尼茨公式	79
第三节 定积分的换元积分法与分部积分法	80
一、定积分的换元积分法	80
二、定积分的分部积分法	82
第四节 广义积分	82
第五节 定积分的应用	84
一、定积分的微元法	84
二、定积分在几何中的应用	85
三、定积分在物理中的应用	90
练习题六	92
数学家故事	93
牛 顿(Isaac Newton)	93
莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz)	94

第二篇 概率论与数理统计

第七章 随机事件与概率	96
第一节 随机事件及其运算	96
一、随机试验、样本空间与随机事件	96
二、事件间的关系与运算	97



第二节 事件的概率	100
一、概率的统计定义	100
二、古典概型	101
第三节 概率的计算	104
一、条件概率	104
二、概率的乘法公式	104
三、全概率公式	105
四、贝叶斯公式	107
五、事件的独立性	108
第四节 随机变量及其分布	110
一、随机变量的定义	110
二、离散型随机变量的分布	111
三、随机变量的概率分布函数	112
四、连续型随机变量的分布	112
第五节 一维随机变量的数字特征	113
一、随机变量的数学期望	114
二、随机变量的方差	116
三、数学期望和方差的性质	117
第六节 常见的概率分布	117
一、常见的离散型分布	118
二、常见的连续型分布	121
练习题七	127
数学家故事	129
柯尔莫哥洛夫(A. N. Kolmogorov)	129
泊松(Poisson, Simeon-Denis)	129
贝叶斯(Bayes, Thomas)	130
第八章 数理统计简介	131
第一节 数理统计的基本概念	131
一、总体与样本	131
二、统计量与样本数字特征	132
三、样本分布及直方图	133
四、统计量的分布	135
第二节 参数估计	137
一、点估计	138
二、区间估计	139
第三节 假设检验	142
一、假设检验的基本概念与基本思想	142
二、单个正态总体参数的假设检验	144
练习题八	146

第三篇 线性代数

第九章 矩 阵	149
第一节 矩阵概念及其代数运算	149
一、矩阵概念	149
二、矩阵的代数运算与转置	151
三、矩阵运算的应用举例	155
第二节 n 阶矩阵的行列式	156
一、 n 阶矩阵行列式的概念	157
二、行列式的运算性质	160
第三节 矩阵的秩	162
一、矩阵秩的概念	162
二、矩阵的初等变换	164
第四节 逆矩阵	166
一、逆矩阵的概念与运算性质	166
二、伴随矩阵及其与逆矩阵的关系	166
三、逆矩阵的求法	167
练习题九	169
第十章 线性方程组	171
第一节 克莱姆法则	171
第二节 线性方程组的解法	172
一、线性方程组的矩阵表示	172
二、消元法解线性方程组	173
第三节 n 维向量	178
一、 n 维向量及其运算	178
二、 n 维向量的线性相关性	179
练习题十	181
数学家故事	183
克莱姆(Cramer, Gabriel)	183
附表 1 标准正态分布数值表	184
附表 2 泊松分布表	185
附表 3 χ^2 分布表	186
附表 4 t 分布表	189
练习题参考答案	190
练习题一	190
练习题二	190
练习题三	191
练习题四	191



练习题五·····	192
练习题六·····	193
练习题七·····	194
练习题八·····	194
练习题九·····	194
练习题十·····	195
参考文献·····	198

第一篇 一元函数微积分

第一章 函 数

函数是近代数学中最主要的概念之一,是客观世界中变量之间依存关系在数学中的反映.高等数学的主要研究对象就是函数.本章将在回顾函数知识的基础上,进一步拓展和研究函数的概念及性质,为以后的学习奠定基础.

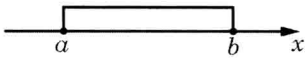
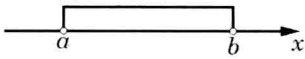
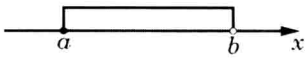
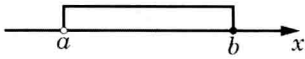
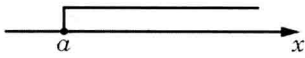
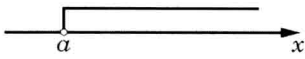
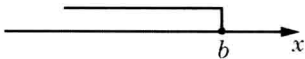
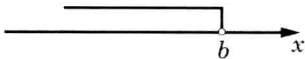
第一节 函数及相关概念

一、区间与邻域

1. 区 间

区间是由介于两个实数 a, b ($a < b$) 之间的所有实数构成的集合.它是在中学已学过的基本概念,也是高等数学中使用较多的一类实数集,有以下几种形式,如表 1-1 所示.

表 1-1

分类	定 义	名 称	符 号	数 轴 表 示
有 限 区 间	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
	$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
	$\{x \mid a \leq x < b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	
	$\{x \mid a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
无 限 区 间	$\{x \mid x \geq a\}$		$[a, +\infty)$	
	$\{x \mid x > a\}$		$(a, +\infty)$	
	$\{x \mid x \leq b\}$		$(-\infty, b]$	
	$\{x \mid x < b\}$		$(-\infty, b)$	
	$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$		$(-\infty, +\infty)$	



其中, a 和 b 都是确定的实数, 且 $a < b$, 它们分别称为区间的左端点和右端点. 有限区间的左、右端点之间的距离 $b - a$ 称为区间的长度.

2. 邻域

设 a 和 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 则满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的一切实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 由于不等式 $|x - a| < \delta$ 相当于 $a - \delta < x < a + \delta$, 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 可见, 点 a 的 δ 邻域实际上就是以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$.

若把邻域中心 a 去掉, 则得到点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta, x \neq a\}.$$

二、函数的定义

定义 1.1 设 D 是一个数集, 如果对于 D 中任意一个给定的 x , 按照某种对应法则 f , 都有唯一确定的值 y 与之对应, 则称这种对应关系为函数关系或函数, 记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中, x 称为自变量, D 称为定义域, y 称为因变量, 与 x 值相对应的 y 值称为函数值, 全体函数值的集合称为值域, 记作 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

在函数的定义中, 如果对于定义域内的第一个 x 值, 对应的 y 值都是唯一的, 称 y 是 x 的单值函数, $x \rightarrow y$ 的对应法则 f 称为单值对应. 否则, 称函数为多值函数, $x \rightarrow y$ 的对应法则 f 称为多值对应. 例如, 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 就是单值函数; 而 $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ 就是多值函数. 若无特别说明, 函数都是指单值函数.

三、函数的表示法

常用的函数表示方法有三种, 即解析法、列表法和图像法.

1. 解析法

解析法就是用数学表达式(等式)表示两个变量的函数关系, 如 $y = x^2$. 解析法的优点是便于进行理论推导和函数性态的研究.

在实际应用中, 如果变量之间的函数关系较为复杂, 可以用几个式子表示, 此时不能把它理解为几个函数, 而应该理解为由几个式子表示的一个函数. 这样的函数称为分段函数. 分段函数的定义域是函数的各个定义域区间的并集.

例如, 函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

的定义域是 $D = (-\infty, +\infty)$.

例 1 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ x^2 + 4 & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(-1)$, $f(1)$, $f(x-1)$.

解 $f(-1) = (-1)^2 + 4 = 5$,



$$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3,$$

$$f(x-1) = \begin{cases} 2(x-1) + 1 & x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2 + 4 & x-1 < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } f(x-1) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x^2-2x+5 & x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{例 2 已知 } f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in (0, +\infty) \\ 1 & x = 0 \\ -x+1 & x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \text{求 } f(-1), f(0), f(\frac{1}{2}).$$

解 因为 $-1 \in (-\infty, 0)$, 所以 $f(-1) = (-x+1)|_{x=-1} = -(-1)+1 = 2; f(0) = 1;$

因为 $\frac{1}{2} \in (0, +\infty)$, 所以 $f(\frac{1}{2}) = x+1|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$

$$\text{例 3 已知 } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}, \text{求 } f(0), f(1), f(2), f(a).$$

解 $f(0) = 2\sqrt{0} = 0, f(1) = 2\sqrt{1} = 2, f(2) = 2+1 = 3,$

$$f(a) = \begin{cases} 2\sqrt{a} & 0 \leq a \leq 1 \\ a+1 & a > 1 \end{cases}.$$

$$\text{例 4 设 } \varphi(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}, \text{求 } \varphi(0), \varphi(a).$$

分析: 此函数带有绝对值, 所以求 $\varphi(a)$ 时要根据 a 的情况进行讨论.

$$\text{解 } \varphi(0) = \frac{|0-1|}{0^2-1} = \frac{1}{-1} = -1,$$

$$\varphi(a) = \frac{|a-1|}{a^2-1} = \begin{cases} \frac{1}{a+1} & a > 1 \\ -\frac{1}{a+1} & a < 1 \text{ 且 } a \neq -1 \end{cases}.$$

2. 列表法

列表法就是以表格形式列出两个变量的函数关系, 如三角函数表、对数表等都是以这种方法表示函数的. 列表法的优点是可以直接在表中查到某个变量的函数值.

3. 图像法

图像法就是用图形表示两个变量的函数关系, 这种方法在科学研究和工程技术中应用较为普遍. 图像法的优点是形象直观, 可以看到函数的变化趋势.

第二节 函数的特性

一、函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 若对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时,



恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的, 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的. 若函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调, 则称区间 I 是函数 $f(x)$ 的单调区间.

单调增加的函数图形沿 x 轴正向逐渐上升, 单调减少的函数图形沿 x 轴正向逐渐下降.

二、函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, 函数 $y = \cos x$ 和 $y = x^2$ 都是偶函数, 而函数 $y = \sin x$ 和 $y = x^3$ 都是奇函数, 但是函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 和 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 都既非偶函数, 又非奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

三、函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$. 若存在一个正数 M , 使得对于一切 $x \in I$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界, 或称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. M 称为 $f(x)$ 在 I 上的一个界, 显然, 有界函数的界不是唯一的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内恒有 $|\sin x| \leq 1$, 故 1 是它的一个界, 而集合 $\{y \mid y \geq 1\}$ 中的每个元素也都可以作为它的界. 又如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 而在区间 $(1, 2)$ 内是有界的.

四、函数的周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D . 若存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$, 恒有

$$f(x+l) = f(x) \quad (x \pm l \in D),$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指函数的最小正周期.

例如, 函数 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

第三节 函数的运算

函数之间可以进行加、减、乘、除等代数运算, 也可以进行复合运算和反函数运算, 通过这些初等运算可以得到新的有用的函数.

一、复合函数

定义 1.2 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, u 是 x 的函数 $u=g(x)$, 如果对于函数 $u=g(x)$ 定义域内的每一个 x 对应的 u 都能使函数 $y=f(u)$ 有意义, 那么, y 就是 x 的函数, 这个函数称为 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 的复合函数, 记为 $y=f(g(x))$. u 称为复合函数 $y=f(g(x))$ 的中间变量.

例 1 指出下列函数的复合过程.

$$(1) y = \sin^3 x; \quad (2) y = e^{x^2}; \quad (3) y = \ln \tan \frac{x}{2}.$$

解 (1) $y = \sin^3 x$ 是由 $y = u^3$, $u = \sin x$ 复合而成的, u 为中间变量;

(2) $y = e^{x^2}$ 是由 $y = e^u$, $u = x^2$ 复合而成的, u 为中间变量;

(3) $y = \ln \tan \frac{x}{2}$ 可以看作是由三个简单函数 $y = \ln u$, $u = \tan v$, $v = \frac{x}{2}$ 复合而成的, v 、 u 为中间变量.

将复杂函数视为复合函数, 并分解为若干简单函数进行求解, 这在今后实际运算中经常用到, 应重点掌握.

例 2 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x^2)$, $f(\lg x)$ 的定义域.

解 由题意得: 在函数 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 中, 由 $0 < \frac{1}{x} < 1$, 得 $x > 1$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $\{x \mid x > 1\}$;

在函数 $f(x^2)$ 中, 由 $0 < x^2 < 1$, 得 $-1 < x < 1$ 且 $x \neq 0$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $\{x \mid -1 < x < 1 \text{ 且 } x \neq 0\}$;

在函数 $f(\lg x)$ 中, 由 $0 < \lg x < 1$, 得 $1 < x < 10$, 所以 $f(\lg x)$ 的定义域为 $\{x \mid 1 < x < 10\}$.

二、反函数

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 C . 我们根据这个函数中 x 、 y 的关系, 用 y 把 x 表示出来, 得到 $x=\varphi(y)$. 对于数集 C 中的任何一个数 y , 通过 $x=\varphi(y)$, x 在 D 中都有唯一的值和它对应, 那么, $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数. 这个函数 $x=\varphi(y)$ ($y \in C$) 叫做函数 $y=f(x)$ ($x \in D$) 的反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上, 常以 x 表示自变量, y 表示因变量. 因此, 一般将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

例 3 求函数 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ ($x \in R$) 的反函数.

解 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 可解得 $x=\log_2\left(\frac{y}{1-y}\right)$, 交换 x 、 y 的位置, 即得所求的反函数 $y=\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)$ 或 $y=\log_2 x - \log_2(1-x)$, 定义域为 $(0, 1)$.

注: (1) 只有从定义域到值域上一一对应所确定的函数才有反函数. 例如 $y=\sin x$ ($x \in R$) 没有反函数, 而 $y=\sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 的反函数是反正弦函数 $y=\arcsin x$ ($-1 \leq x \leq 1$).

(2)反函数的定义域和值域分别是原函数的值域和定义域. 因此反函数的定义域不能通过其解析式来求, 而应该求原函数的值域. 例如 $y=2^x$ $x \in [1, 2]$ 的反函数是 $y=\log_2 x$, 其定义域应为 $x \in [2, 4]$, 而不是 $(0, +\infty)$.

(3)互为反函数的两个函数具有相同的单调性, 它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 例如 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 互为反函数且都为单调增加函数.

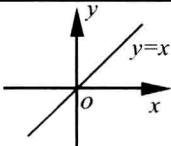
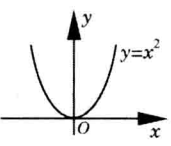
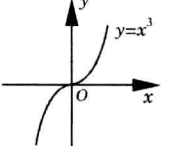
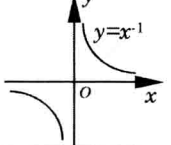
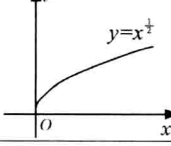
第四节 初等函数

一、基本初等函数

定义 1.4 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

基本初等函数应用非常广泛, 我们必须熟记它们的定义域、图像和性质, 见表 1-2.

表 1-2 基本初等函数的定义域、值域、图像及性质

函数类型	函数	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, +\infty)$ 内分别单调减少
	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加