

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

# 多体系统动力学

(第二版)

*Dynamics of Multibody Systems*

*(Second Edition)*

刘延柱 潘振宽 戈新生 编著

高等教育出版社

研究生教学用书

教育部学位管理与研究生教育司推荐

# 多体系统动力学

DUOTI XITONG DONGLIXUE

(第二版)

Dynamics of Multibody Systems

(Second Edition)

刘延柱 潘振宽 戈新生 编著

高等教育出版社·北京

## 内容提要

多体系统动力学是在经典力学基础上发展的、与大型复杂工程对象的设计紧密结合的力学学科。其研究对象是由大量物体相互联系组成的系统,研究方法立足于现代计算技术。本书系统地介绍这门学科的基本内容,共分十一章:第一、二章介绍刚体运动学和动力学的基础知识;第三章利用图论工具叙述多体系统的运动学;第四、五章分别用分析力学方法和矢量力学方法推导用相对坐标表示的多体系统动力学方程;第六章介绍凯恩方法;第七章叙述绝对坐标方法和变分方法;第八章介绍自然坐标方法;第九章叙述柔性多体系统动力学的有限元方法和绝对节点坐标方法;第十章叙述完全递推方法和单向递推组集建模方法;第十一章叙述多体系统动力学的常微分方程和微分/代数方程的多种算法,简要介绍几何数值积分方法。附录中给出阅读正文必需的数学工具。每章均有例题和习题。书末列出主要的参考文献。

本书可作为高等工科院校的工程力学、机械工程、车辆工程和航空航天工程等专业的研究生教材,也可供相关专业的教师、研究人员和工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

多体系统动力学 / 刘延柱, 潘振宽, 戈新生编著.

-- 2 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2014. 7

ISBN 978-7-04-040132-5

I. ①多… II. ①刘… ②潘… ③戈… III. ①系统动力学-高等学校-教材 IV. ①N941.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 125894 号

策划编辑 赵向东  
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 赵向东  
责任校对 刘春萍

封面设计 李小璐  
责任印制 韩刚

版式设计 王莹

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 保定市中国画美凯印刷有限公司  
开 本 787mm × 960mm 1/16  
印 张 26  
字 数 480 千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landraco.com>  
<http://www.landraco.com.cn>  
版 次 1989 年 1 月第 1 版  
2014 年 7 月第 2 版  
印 次 2014 年 7 月第 1 次印刷  
定 价 40.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 40132-00

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

# 序

自 20 世纪 60 年代起,人们日益关注机械、车辆、机器人的动力学特性,并将其作为产品设计中必须保证和着力提升的品质。与此同时,电子计算机、数值计算方法的进步为这些复杂系统动力学的建模和分析提供了可能性。在这样的背景下,人们开始研究由多个部件和运动副组成的动力学系统,进而形成了力学学科的新分支——多体系统动力学。

在人们早期关注的多体系统中,部件相对刚硬且运动速度较低,可简化为刚体模型。因此,该学科的研究重点是如何描述多个刚体的大范围运动,建立程式化的建模方法并数值求解系统动力学方程。近三十年来,随着高速弹性机构、柔性机器人、可展开空间结构等新技术的发展,该学科的研究重点逐步转向如何描述多个柔体的大范围运动与变形的相互耦合,并高效求解更为复杂的系统动力学方程。

刘延柱先生是我国多体系统动力学研究的发起者和开拓者,是我非常钦佩的学术前辈。我对多体系统动力学的了解始于阅读刘延柱先生在 20 世纪 80 年代中期编著的《多刚体系统动力学》,但当时的体会非常肤浅。20 世纪 90 年代初,我在德国 Stuttgart 大学力学研究所 B 担任洪堡基金研究员,与 Werner Schiehlen 教授合作从事非线性动力学研究。该研究所的主要研究领域是多体系统动力学,而 Schiehlen 教授则是该领域的世界著名学者。这使我对多体系统动力学有了进一步的理解,并且多次听到 Schiehlen 教授赞誉刘延柱先生的学术成就,进而萌生了对他的敬意。回国后不久,我在振动工程国际学术会议上与刘延柱先生相识,直接聆听到他对动力学与控制学科发展的高见。此后,刘延柱先生多次将他的学术新作赠予我,使我从中学习新的知识,领悟到学术真谛。

今天,我有幸在刘延柱先生、潘振宽教授、戈新生教授的新作《多体系统动力学》出版之前获得学习机会,领略他们的学术思想、治学风格和研究进展。令我钦佩的是,已步入古稀之年的刘延柱先生与两位弟子合作,对多体系统动力学的发展进行了全面梳理,形成了这部系统的著作。该书在刘延柱先生的《多刚体系统动力学》基础上,融入他多年的教学经验和研究心得,系统、严谨地阐述了多刚体系统动力学的理论和方法。在此基础上,该书进一步介绍了多柔体系统动力学的主要建模方法、多体系统动力学的数值计算方法等。上述内容与附录、习题、参考文献、索引等构成一个完整的体系,既可作为初学者的入门向导,又可作为研究者的案头工具。

## 第 2 版前言

本书的初版以《多刚体系统动力学》书名于 1989 年出版,是国内在多体系统动力学领域内最早出版的研究生教材。其主要特点是从力学基本原理出发,综合叙述多刚体系统动力学的各种建模方法。该书的出版对多体系统动力学学科在国内的早期发展曾起过积极促进作用,1992 年获得教育部优秀教材二等奖。20 世纪 90 年代以后,国内又陆续有多本多体系统动力学的教材和著作出版,进一步推动了多体系统动力学的学科发展和课程建设。

多体系统动力学是与大型复杂工程对象的设计和 optimization 紧密结合的力学学科。针对多体系统的各种动力学建模理论最终必须与数值计算方法结合,形成各种实用的工程计算软件。但作为动力学与控制的分支学科,多体系统动力学并不仅限于计算力学范畴。当经典力学的研究对象已从简单的质点和刚体转变为超大自由度的多体系统,当飞速发展的计算技术与力学学科已密不可分,经典力学必然会被推动向前发展。于是沉寂多年的欧拉参数和四元数等古老的力学和数学概念找到了用武之地,不同风格的适合复杂系统的建模方法陆续出现。可以认为,多体系统动力学作为经典力学的现代发展,极大地丰富了经典力学内容。本书保留初版的特点,致力于从基本力学原理出发,综合叙述各种动力学建模方法的原理、特点和相互联系,同时介绍相关的数值计算方法。

自初版问世以来的二十多年期间,多体系统动力学有了很大发展,研究对象从多刚体系统发展为由柔性体和刚体组成的刚柔耦合系统,数值计算方法也有了飞速进展,因此有必要将书名中的“多刚体”改为“多体”。虽然就柔性多体系统而言,多刚体系统的运动学和动力学仍是分析的理论基础。本书对原书内容的叙述作了相应的调整,对各种方法作了更合理的取舍和分类,增加了绝对坐标方法、自然坐标方法和递推方法等新内容。在增加的柔性多体系统动力学的章节中,介绍了浮动坐标方法、有限元方法和绝对节点坐标方法。在数值计算方面,以数值稳定性为主线,介绍了传统的常微分方程算法;以微分指标和约束稳定为主线,系统地介绍了微分/代数方程算法;并以结构保持为主线,简要介绍了无约束与含约束多体系统动力学的现代几何数值积分方法,包括辛算法、能量方法和变分数值积分方法等。

本书的第一章至第七章由刘延柱编写,第八、九章由戈新生编写,第十、十一章由潘振宽编写,全书由刘延柱统稿。本书可作为高等工科院校的工程力学、机械工程、车辆工程和航空航天工程等专业的研究生教材,也可作为相关专业的教

# 第 1 版前言

在现代科学技术发展的推动下,经典力学范畴内逐渐形成一个略具独立性的学科分支——多刚体系统动力学。它的研究对象是由大量刚体相互联系组成的系统,研究方法立足于与现代计算技术相适应。在大约二十年内,相继涌现了风格迥异的各种研究方法。使沉寂多年的经典刚体动力学面貌一新。为了介绍这个领域的研究成果,上海交通大学从 1982 年开始为一般力学专业硕士研究生开设了多刚体系统动力学课程,并在上海、重庆、武汉、福州等地举办了讲座。这本书就是在为课程及讲座编写的《多刚体系统动力学》讲义基础上作了较大的修改和补充写成的。鉴于多刚体系统动力学研究方法的多样性,本书的宗旨是较全面而系统地介绍多刚体系统动力学几种有代表性的研究方法,并在保留各种方法固有风格的前提下力图连贯沟通。不过限于作者水平,实际效果与预期目标尚有差距。书中对各种方法基本内容的叙述作了改进,以避免烦琐冗长的推导过程。虽然不同研究方法各有其习惯采用的符号和术语,为便于阅读,书中尽可能将主要符号和名词予以统一。每章都附有例题和习题以帮助读者加深对各种方法的理解。书中还增加多刚体系统的算法一章,向读者介绍计算机辅助分析处理经典力学问题的初步概念。

本书可作为高等工科院校的一般力学、机械原理、机器人、车辆、航天技术等专业的研究生教材,也可作为上述各专业教师、研究人员及工程技术人员的参考书。在本书写作过程中得到许多兄弟院校理论力学同行的热情支持和鼓励,北京大学力学系周起钊教授对本书作了详细的审阅并提出了宝贵意见,作者谨表示深切的谢意。

作者于上海交通大学

一九八六年十二月

# 主要符号表

$\underline{1}_n$  元素均为 1 的列阵

$$\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\omega}_k \times (\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{d}_{ki})$$

$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, \mathbf{a}')$  旋量

$\hat{\mathbf{a}}$  旋量列阵

$\mathbf{a}_j$  第  $j$  单元形函数的系数

$\mathbf{A}$  有限转动张量

$A_j$  梁单元的截面面积

$\underline{\mathbf{A}}^{(1)}$  有限转动矩阵

$\hat{\mathbf{A}}^{(g)}$  齐次坐标变换矩阵

$\hat{\mathbf{A}}^{(g)}$  旋量变换矩阵

$\mathbf{A}$  动力学方程的系数矩阵

$\mathbf{b}_j$  增广体铰矢量

$\mathbf{b}$  增广体铰矢量阵

$B_0$  零刚体

$B_i$  第  $i$  刚体

$B_i^*$  第  $i$  增广体

$\underline{\mathbf{B}}$  动力学方程的非齐次项

$\underline{\mathbf{B}}_j$  第  $j$  单元的布尔矩阵

$\mathbf{c}_{ij}$  体铰矢量

$\mathbf{c}_{ik}^e$  力元矢量

$\mathbf{C}_{ij}$  加权体铰矢量

$\mathbf{C}_{ik}^e$  加权力元矢量

$\underline{\mathbf{C}}$  体铰矢量矩阵

$\mathbf{d}_{ij}$  通路矢量

$\underline{\mathbf{d}}$  通路矢量矩阵

$\underline{\mathbf{D}}$  角速度的系数矩阵

$\underline{\mathbf{D}}$  并矢

$\underline{\mathbf{D}}^*$  共轭并矢

$\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$  基矢量

$\underline{\mathbf{e}}$  参考基

$\underline{\mathbf{e}}^{(0)}$  固定参考基

$\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$  第  $i$  刚体的连体基

$\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$  第  $i$  变形体的浮动基

$E_k$  力元

$E_j$  第  $j$  单元

$E_j$  梁单元的弹性模量

$\underline{\mathbf{E}}$  单位并矢

$\underline{\mathbf{E}}$  单位阵

$\underline{\tilde{\mathbf{E}}}$  反对称单位阵

$f$  自由度数

$f_0$  派生树的自由度

$f_k^c$  切断铰的自由度

$\mathbf{f}_v$  质点  $P_v$  的作用力

$\mathbf{F}^{(r)}$  广义主动力

$\mathbf{F}^{*(r)}$  广义惯性力

$\mathbf{F}_i^*$  惯性力

$\mathbf{F}$  作用力的主矢

$\mathbf{F}_i^e$  外力的主矢

$\mathbf{F}_j^h$  铰约束力的主矢

$\mathbf{F}_j^j$  铰主动力的主矢

$\mathbf{F}_j^n$  铰理想约束力的主矢

$\mathbf{F}_k^c$  切断铰约束力的主矢

$\mathbf{F}_k^e$  力元作用力

$\hat{\mathbf{F}}$  力旋量

$g$  重力加速度

$G$  加速度能量, 吉布斯函数

$\mathbf{h}_j = \boldsymbol{\omega}_{i(j)} \times \boldsymbol{\Omega}_j$

$H$  哈密顿函数



$\underline{H}$ 约束矩阵	$n_{d_j}$ 第 $j$ 单元的节点树
$I_j$ 梁单元的截面惯性矩	$\underline{N}_j$ 第 $j$ 单元的形函数
$I_j$ 等效惯量张量	$O_j$ 铰点
$J$ 惯量张量	$O_c$ 质心
$J_i$ 第 $i$ 刚体的中心主惯量矩	$p_i$ 广义动量
$J_c$ 中心惯量张量	$p$ 动量
$J$ 惯量矩阵	$p_j$ 转动轴基矢量
$k_j$ 滑移轴基矢量	$\hat{p}$ 动量旋量
$\underline{K}$ 变形体的刚度矩阵	$P$ 功率
$\underline{K}_{vj}$ 增广体张量	$P_v$ 第 $v$ 质点 $P_i$
$\underline{K}$ 增广体张量矩阵	$P_i$ 刚体的参考点
$\underline{K}_j^*$ 无根系统的增广体张量	$Q_j$ 广义力
$\underline{K}^*$ 无根系统的增广体张量矩阵	$Q_j^*$ 广义惯性力
$l$ 广义坐标数	$\underline{Q}$ 凯莱-克莱因参数
$l_j$ 第 $j$ 单链子系统	$\underline{Q}_j$ 第 $j$ 单元形函数的多项式
$L$ 拉格朗日函数	$\underline{q}$ 广义坐标阵
$L(j)$ 内接刚体数列	$\underline{q}_1$ 独立坐标阵
$\underline{L}$ 变形体速度的系数矩阵	$\underline{q}_{11}$ 多余坐标阵
$L$ 绝对动量矩	$\underline{q}_f$ 浮动基的广义坐标阵
$L'$ 相对动量矩	$\underline{q}_a$ 模态坐标阵
$m$ 质量, 铰数	$r$ 矢径
$m_i$ 第 $i$ 刚体的质量	$\underline{R}, \underline{R}^*$ 欧拉参数组成的 $3 \times 4$ 矩阵
$m_{rs}$ 变形体质量矩阵的子矩阵	$s$ 约束数, 多余坐标数
$M_j^a$ 主动控制力	$\underline{s} = \dot{\underline{r}}_0 \underline{1}_n - \underline{d}^T \times (\omega_0 \underline{1}_n)$
$\underline{M}$ 变形体的质量矩阵	$\underline{S}$ 关联矩阵
$\underline{M}$ 作用力的主矩	$\underline{S}_j$ 第 $j$ 单元的形函数
$\underline{M}_i^*$ 惯性力的主矩	$\hat{\underline{S}}$ 全关联矩阵
$\underline{M}_i^e$ 外力的主矩	$\underline{S}_s$ 缩减的关联矩阵
$\underline{M}_j^h$ 铰约束力的主矩	$\hat{\underline{S}}$ 旋量关联矩阵
$\underline{M}_j^a$ 铰主动力的主矩	$\underline{S}^c$ 力元关联矩阵
$\underline{M}_j^h$ 铰理想约束力的主矩	$\underline{S}^c$ 切断铰关联矩阵
$\underline{M}_k^c$ 切断铰约束力的主矩	$T$ 动能
$n$ 刚体数	$\underline{T}$ 通路矩阵
$n_c$ 力元数	$\underline{T}_s$ 缩减的通路矩阵
	$\hat{\underline{T}}$ 旋量通路矩阵

$u$ , 广义速率	$\theta_j$ 转动铰的相对转角
$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{d}}^T \times \underline{\boldsymbol{\sigma}}$	$\boldsymbol{\theta}$ 无限小转动矢量
$\underline{\mathbf{u}}_i$ 刚体的参考矢量	$\lambda$ 拉梅系数
$\underline{\mathbf{u}}_i$ 变形体的变形位移	$\lambda_k (k=0, 1, 2, 3)$ 欧拉参数
$U_j$ 梁单元的应变能	$\lambda_k$ 拉格朗日乘子
$\underline{U}$ 回路矩阵	$\underline{\lambda}$ 拉格朗日乘子阵
$\underline{\mathbf{v}}$ 速度	$\underline{\Delta}$ 欧拉参数阵
$\hat{\underline{\mathbf{v}}}$ 速度旋量	$\mu$ 泊松比
$\underline{\mathbf{v}}_v^{(r)}$ 偏速度	$\underline{\mu} = \underline{E} - (\underline{m} \underline{\mathbf{1}}_n \underline{\mathbf{1}}_n^T) / m$
$V$ 势能	$\nu_j$ 单自由度铰的类型系数
$V$ 变形体的空间	$\underline{\mathbf{v}}_j = \boldsymbol{\omega}_{i(j)} \times \underline{\mathbf{V}}_j$
$\underline{\mathbf{V}}_j$ 相对滑动速度	$\xi = x_j / l$
$w_{jk}$ 第 $j$ 单元的节点坐标	$\pi_r$ 伪坐标
$X$ 节点的绝对坐标	$\underline{\Pi}_{ij}$ 递推方法中的系数矩阵
$Y$ 节点的绝对坐标	$\hat{\rho}$ 变形体的密度
$\underline{Y}_i$ 递推方法中的变量列阵	$\rho_k (k=1, 2, 3)$ 罗德里格参数
$z_j$ 滑动矢量	$\rho_c$ 质心的相对矢径
$Z$ 拘束函数	$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ 应力张量矩阵
$Z^*$ 考虑约束因素的拘束	$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{1}}_n - \underline{T}^T (\underline{\mathbf{w}} + \underline{\mathbf{h}})$
$\psi$ 欧拉角(进动角)	$\Phi_k$ 完整约束方程
$\vartheta$ 欧拉角(章动角)	$\Phi_q$ 约束方程的雅可比矩阵
$\varphi$ 欧拉角(自转角)	$\Phi_i^{(i)}$ 广义惯量矩阵
$\alpha, \beta, \gamma$ 卡尔丹角	$\Psi_j$ 变形体的模态
$\underline{\boldsymbol{\alpha}} = -(\underline{\mathbf{p}} \underline{T} \times \underline{\mathbf{d}})^T$	$\Psi_k$ 非完整约束方程
$\underline{\boldsymbol{\alpha}}^* = -(\underline{\mathbf{p}} \underline{T} \times \underline{\mathbf{b}})^T$	$\underline{\Psi}_i$ 主动力矩阵
$\underline{\boldsymbol{\beta}} = -(\underline{\mathbf{p}} \underline{T})^T$	$\underline{\Psi}$ 形函数矩阵
$\underline{\boldsymbol{\gamma}} = -\underline{S}^{eT} \underline{\boldsymbol{\alpha}} + \underline{C}^{eT} \times \underline{\boldsymbol{\beta}}$	$\boldsymbol{\omega}$ 角速度
$\underline{\Gamma}_{ij}$ 递推方法中的系数矩阵	$\boldsymbol{\omega}_0$ 零刚体的角速度
$\delta$ 变分符号	$\boldsymbol{\omega}_a$ 绝对角速度
$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 应变张量矩阵	$\boldsymbol{\omega}_i^{(r)}$ 偏角速度
$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times (\underline{J}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i)$	$\boldsymbol{\Omega}_j$ 转动铰的相对角速度
$\underline{\zeta}$ 约束方程的非齐次项	

## 作者简介

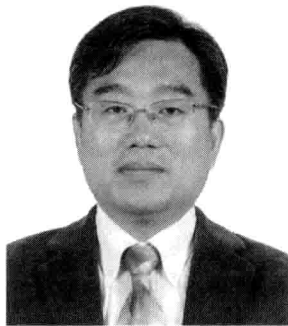
### 刘延柱

1936年生。1959年毕业于清华大学工程力学研究班。1960年至1962年在莫斯科大学力学数学系进修。1959年至1973年清华大学工程力学系任教。1973年起上海交通大学工程力学系任教授、博士生导师。2006年退休。历任上海交通大学工程力学系主任、工程力学研究所所长、中国力学学会副理事长等。现任中国力学学会荣誉理事、《力学与实践》副主编。研究领域为刚体和多体系统动力学、非线性动力学、超大变形弹性细杆力学。著有《陀螺力学》、《多刚体系统动力学》、《航天器姿态动力学》、《充液系统动力学》、《弹性细杆的非线性力学》等著作,《理论力学》、《高等动力学》、《振动力学》、《非线性振动》等教材。科研成果曾获国家自然科学基金四等奖、两项教育部科技进步二等奖和两项上海市科技进步二等奖,多项教育部优秀教材奖。



### 潘振宽

1966年生。1987年毕业于西北工业大学工程力学系,1992年于上海交通大学工程力学系获博士学位。2005年至2006年加州大学洛杉矶分校数学系访问学者。1992年起任教于青岛大学自动化学院及信息工程学院。现任青岛大学教授、博士生导师、信息工程学院院长、中国力学学会动力学与控制专业委员会委员、中国图形图像学会虚拟现实专业委员会理事、山东省计算机学会副秘书长、青岛市计算机学会秘书长。研究领域为多体系统动力学与控制、计算机视觉与图像科学。曾获山东省科技进步二等奖2项、山东省优秀教学成果一等奖与二等奖各一项、青岛市科技进步一等奖与二等奖各一项。2006年获教育部“新世纪优秀人才支持计划”支持。



## 戈新生

1957年生。1982年毕业于合肥工业大学数力系,2004年于上海大学力学系获博士学位。1982年任教于北京机械工业学院,现任北京信息科技大学教授、机电工程学院院长。2006年兼任北京交通大学博士生导师、中国自动化学会机器人专业委员会委员、中国力学学会动力学与控制专业委员会多体动力学组副组长、中国机械工程学会高级会员。研究领域为多体系统动力学、航天器姿态动力学与控制。著有《理论力学》。曾获教育部科技进步奖二等奖一项、上海市科技进步奖二等奖两项。



# 目 录

绪论	1
第一章 刚体运动学基础	6
1.1 刚体的有限转动	6
1.1.1 欧拉定理	6
1.1.2 有限转动张量	7
1.1.3 欧拉角	10
1.1.4 卡尔丹角	12
1.1.5 欧拉参数	15
1.1.6 罗德里格参数	20
1.2 刚体的无限小转动	22
1.2.1 无限小转动矢量	22
1.2.2 瞬时角速度和角加速度	23
1.2.3 转动刚体上点的速度与加速度	24
1.3 刚体的运动学方程	25
1.3.1 角度坐标的运动学方程	25
1.3.2 方向余弦的运动学方程	26
1.3.3 欧拉参数的运动学方程	27
1.3.4 罗德里格参数的运动学方程	29
习题	31
第二章 刚体动力学基础	33
2.1 牛顿-欧拉动力学方程	33
2.1.1 动量与动量矩定理	33
2.1.2 动量矩	34
2.1.3 刚体的质量几何	36
2.1.4 动能与加速度能	40
2.1.5 动量矩定理	41
2.2 动力学普遍方程	44

2.2.1	虚功原理	44
2.2.2	虚功率原理	45
2.2.3	高斯原理	46
2.2.4	刚体动力学方程	47
2.3	拉格朗日方程	48
2.3.1	广义坐标与自由度	48
2.3.2	用动能表示的动力学普遍方程	49
2.3.3	拉格朗日方程	50
2.3.4	正则方程	52
2.4	拉格朗日乘子方法	54
2.4.1	第一类拉格朗日方程	54
2.4.2	拉格朗日乘子的物理意义	55
2.4.3	劳斯方程	56
	习题	58
<b>第三章 多体系统的运动学</b>		<b>60</b>
3.1	多体系统的结构	60
3.1.1	铰与邻接刚体	60
3.1.2	结构的图论描述	61
3.1.3	树系统的数学表达	63
3.2	转动铰系统的运动学	66
3.2.1	刚体的相对转动	66
3.2.2	刚体的角速度与角加速度	68
3.2.3	体铰矢量与通路矢量	68
3.2.4	刚体的质心速度与加速度	70
3.3	滑移铰系统的运动学	72
3.3.1	滑移铰约束	72
3.3.2	带滑移铰的树系统	74
3.3.3	车辆系统	78
3.4	非树系统的运动学	78
3.4.1	非树系统的树形化	78
3.4.2	非树系统的数学表达	79
3.4.3	切断铰约束条件	84
3.5	带力元系统的运动学	89
3.5.1	铰的力关联	89

3.5.2 力元 .....	90
3.5.3 力元的运动学 .....	90
习题 .....	93
<b>第四章 相对坐标方法 .....</b>	<b>95</b>
4.1 有根树系统 .....	95
4.1.1 有根树系统的虚功率 .....	95
4.1.2 转动铰系统的动力学方程 .....	96
4.1.3 带滑移铰系统的动力学方程 .....	100
4.2 无根树系统 .....	102
4.2.1 无根系统的特点 .....	102
4.2.2 无根树系统的虚功率 .....	102
4.2.3 无根树系统的动力学方程 .....	104
4.3 非完整系统 .....	108
4.3.1 含多余坐标的完整约束 .....	108
4.3.2 非完整约束 .....	109
4.3.3 含多余坐标系统的动力学方程 .....	112
4.4 非树系统 .....	112
4.4.1 非树系统的约束条件 .....	112
4.4.2 非树系统的动力学方程 .....	113
4.4.3 拉格朗日乘子方法 .....	116
习题 .....	120
<b>第五章 矢量力学方法 .....</b>	<b>122</b>
5.1 牛顿-欧拉方程 .....	122
5.1.1 有根树系统 .....	122
5.1.2 无根树系统 .....	124
5.1.3 非树系统 .....	126
5.2 增广体动力学 .....	127
5.2.1 增广体 .....	127
5.2.2 有根树系统 .....	130
5.2.3 无根树系统 .....	134
5.3 自由多体系统 .....	137
5.3.1 系统相对质心的动量矩 .....	137
5.3.2 动量矩积分 .....	140

9.2.2	质量矩阵与刚度矩阵 .....	254
9.2.3	动力学方程 .....	256
9.2.4	平面梁单元特例 .....	257
9.3	绝对节点坐标方法 .....	262
9.3.1	绝对节点坐标 .....	262
9.3.2	质量矩阵与刚度矩阵 .....	265
9.3.3	动力学方程 .....	268
	习题 .....	272
<b>第十章</b>	<b>递推方法</b> .....	<b>274</b>
10.1	变形体的动力学方程 .....	274
10.2	邻接变形体的运动学 .....	277
10.3	柔性多体系统动力学完全递推方法 .....	282
10.3.1	多体系统的拓扑结构 .....	282
10.3.2	单链系统的动力学递推方程 .....	283
10.3.3	树系统的动力学递推方程 .....	286
10.3.4	非树系统的动力学递推方程 .....	287
10.4	单向递推组集建模方法 .....	293
10.4.1	单链系统的单向递推组集 .....	294
10.4.2	树系统的单向递推组集 .....	297
10.4.3	非树系统的单向递推组集 .....	298
	习题 .....	302
<b>第十一章</b>	<b>多体系统动力学数值方法</b> .....	<b>304</b>
11.1	常微分方程数值方法 .....	304
11.1.1	常微分方程离散变量方法 .....	304
11.1.2	常微分方程数值求解的单步法 .....	306
11.1.3	常微分方程数值求解的线性多步法 .....	317
11.1.4	常微分方程数值求解的直接积分法 .....	321
11.2	微分/代数方程数值方法 .....	324
11.2.1	微分/代数方程及其微分指标 .....	324
11.2.2	指标 1 微分/代数方程数值求解 .....	325
11.2.3	指标 2 微分代数方程数值求解 .....	327
11.2.4	指标 3 微分/代数方程数值求解 .....	328
11.2.5	超定微分/代数方程的数值求解方法 .....	330



7.3.3	冗余约束 .....	193
7.3.4	受约束系统的动力学方程 .....	194
7.3.5	动力学逆问题 .....	197
7.4	变分方法 .....	199
7.4.1	高斯最小拘束原理 .....	199
7.4.2	刚体和多体系统的拘束 .....	200
7.4.3	受约束系统的变分问题 .....	203
7.5	齐次坐标方法 .....	205
7.5.1	齐次坐标及其变换 .....	205
7.5.2	广义惯量矩阵与主动力矩阵 .....	207
7.5.3	拘束的齐次坐标表达 .....	210
	习题 .....	215
<b>第八章 自然坐标方法 .....</b>		<b>216</b>
8.1	自然坐标与约束方程 .....	216
8.1.1	刚体的自然坐标 .....	216
8.1.2	刚体的约束方程 .....	217
8.1.3	铰约束方程 .....	219
8.2	刚体的动力学方程 .....	224
8.2.1	刚体的平面运动 .....	224
8.2.2	刚体的空间运动 .....	227
8.3	多体系统的动力学方程 .....	230
8.3.1	动力学方程的普遍形式 .....	230
8.3.2	平面运动情形 .....	234
8.3.3	自由多体系统 .....	237
	习题 .....	240
<b>第九章 柔性多体系统动力学 .....</b>		<b>241</b>
9.1	浮动坐标系方法 .....	241
9.1.1	浮动坐标系 .....	241
9.1.2	质量矩阵与刚度矩阵 .....	245
9.1.3	平面梁特例 .....	248
9.1.4	动力学方程 .....	251
9.2	有限元方法 .....	253
9.2.1	有限元坐标和形函数 .....	253