

最优控制

ZUIYOU KONGZHI

沈智鹏 主编

232
19

大连海事大学出版社

014035225

0232
19

©沈智鹏 2013

前言

图例式目录 (CIP) 数据

最优控制

沈智鹏 主编



大连海事大学出版社



北航

C1715409

0232

19

ISBN 978-7-315-29252-9 定价: 18.00元

2013年12月

01403252

©沈智鹏 2013

图书在版编目 (CIP) 数据

最优控制 / 沈智鹏主编. —大连: 大连海事大学出版社, 2013. 12
ISBN 978-7-5632-2952-9

I. ①最… II. ①沈… III. ①最佳控制—数学理论 IV. ①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 317823 号



大连海事大学出版社出版

地址: 大连市凌海路 1 号

邮编: 116026

电话: 0411-84728394

传真: 0411-84727996

<http://www.dmupress.com>

E-mail: cbs@dmupress.com

大连住友彩色印刷有限公司印装

大连海事大学出版社发行

2013 年 12 月第 1 版

2013 年 12 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 185 mm×260 mm

印数: 1~500 册

印张: 8.5

字数: 208 千

责任编辑: 苏炳魁

版式设计: 诚 峰

封面设计: 王 艳

责任校对: 何 乔

ISBN 978-7-5632-2952-9

定价: 18.00 元

5850

91

前 言

最优控制理论,是20世纪50年代到60年代之间,在空间技术的发展和数字计算机广泛应用的推动下,随着动态系统优化理论的迅速发展而形成的一个重要的学科分支。时至今日,最优控制理论不仅有了许多成功的应用,而且远远超出了自动控制的传统界限,在系统工程、经济管理与决策、人口控制等许多领域都有越来越广泛的应用并取得了显著的成效。与此同时,最优控制理论自身在不断完善和充实的过程中又产生了许多需要解决的理论和实践问题。因此,最优控制理论目前仍然处于一个相当活跃的学科领域。

现已出版的最优控制理论相关教材普遍内容较多、书写深奥难读且大多只介绍理论与方法,例题不够丰富,不太适合本科教学。本书以较为通俗易懂的语言,由浅入深,采用对比的方法来叙述函数与泛函、函数极值与泛函极值、微分与变分等概念,循序渐进,由积分型性能指标到复合型性能指标、由不带约束条件到带约束条件的方式讲解变分法、极小值原理、动态规划等相关内容。全书各章节间内容联系紧密,逻辑性强,前后围绕月球软着陆最小能耗问题、基金的最优管理问题、生产计划问题等工程应用实例进行了详细的解答,各种最优控制方法的应用实例丰富,整本书例题近60个。

本书共六章,第一章结合实例分析最优控制问题的数学描述、系统性能指标等最优控制问题的相关研究内容并简要介绍最优控制的发展过程。第二章为便于读者更好地理解泛函的极值问题,首先讨论函数的极值问题,给出用于求解带约束条件函数极值问题的拉格朗日乘子法。第三章重点讲述泛函与变分基本概念以及欧拉方程和横截条件、哈密尔顿函数法等求解泛函极值问题的方法。第四章针对线性二次型问题,根据第三章介绍的哈密尔顿函数法分别讨论状态调节器问题、输出调节器问题和跟踪系统问题。第五章着重阐述用于求解控制量受约束最优控制问题的常用方法——极小值原理并介绍线性时间最优控制问题。第六章讲述用于求解控制量受约束最优控制问题的另一种常用方法——动态规划法,并分析变分法、极小值原理与动态规划之间的关系。

本书可供自动化、测控技术与仪器、电气工程及其自动化等专业的本科生作为最优控制课程的教材和参考书,也可供控制科学与工程专业的研究生参考。

本书是作者在为大连海事大学自动化专业本科生讲授“最优控制”课程所用讲义的基础上,经过多年的教学实践不断修改完成的。在编写过程中,参考了许多作者的著作,在此对他们表示衷心的感谢!

限于编者水平和经验,不妥和疏漏之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2013年12月

6.2 离散动态规划

6.3 连续动态规划

6.4 变分法、极小值原理与动态规划

练习题

参考文献

103

103

106

113

127

129

目 录

第一章 绪论	1
1.1 最优控制问题实例分析	1
1.2 最优控制问题的数学描述	4
1.3 最优控制的发展	8
第二章 函数的极值问题	10
2.1 无约束条件的函数极值问题	10
2.2 有约束条件的函数极值问题	13
练习题	16
第三章 变分法	17
3.1 变分法基础	17
3.2 固定端点的变分问题——欧拉方程	23
3.3 变动端点的变分问题——横截条件	30
3.4 复合性能泛函的变分问题	35
3.5 最优控制问题的变分法	39
练习题	52
第四章 线性二次型最优控制	53
4.1 线性二次型问题	53
4.2 有限时间状态调节器	56
4.3 无限时间状态调节器	63
4.4 输出调节器	65
4.5 跟踪问题	68
练习题	76
第五章 极小值原理	77
5.1 极小值原理的叙述	77
5.2 极小值原理的应用举例	86
5.3 线性时间最优控制	94
练习题	101
第六章 动态规划	103
6.1 多级决策问题与最优性原理	103
6.2 离散动态规划	106
6.3 连续动态规划	118
6.4 变分法、极小值原理与动态规划	123
练习题	127
参考文献	129

第一章 绪论

本章要点

◆最优控制理论的研究内容：根据被控对象的动态特性(系统数学模型)，选择一个容许的控制律，使得被控对象按预定要求运行(由初始状态运行到终端状态)，并使给定的某一性能指标达到最优值。

◆最优控制问题的数学描述包含被控对象数学模型、边界条件、性能指标和容许控制。

◆系统性能指标类型：末值型性能指标、积分型性能指标和复合型性能指标。

◆解决最优控制问题的方法有经典变分法和现代变分法。其中经典变分法只能解决容许控制属于开集的一类最优控制问题，而现代变分法能解决容许控制属于闭集的最优控制问题。现代变分法中最常用的方法是极小值原理和动态规划法。

1.1 最优控制问题实例分析

下面列举几个简单但具有实际应用的例子，它们虽然来自完全不同的领域，却反映了一个共同的问题——最优控制问题。

例 1.1 火车快速到达问题。

考虑一列火车 W ，其质量为 m ，沿着水平轨道运动，不考虑空气的阻力和地面对火车的摩擦力，把火车看成一个沿着直线运动的质点， $x(t)$ 表示火车在 t 时刻的位置， $u(t)$ 是施加在火车上的外部控制力，假设火车的初始位置和速度分别为 $x(0)=x_0$ ， $\dot{x}(0)=0$ ，要求选择一个合适的外部控制函数 $u(t)$ 使火车在最短时间内到达并静止在坐标原点，即到该坐标原点时速度为零。

根据牛顿第二定律得火车的运动方程为

$$m\ddot{x} = u(t), \quad t > 0 \quad (1.1.1)$$

初始条件

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (1.1.2)$$

终端条件

$$x(t_f) = 0, \quad \dot{x}(t_f) = 0 \quad (1.1.3)$$

由于技术上的原因，外部推力不可能要多大就多大，它在数量上是有界的，即

$$|u(t)| \leq M \quad (1.1.4)$$

其中， M 是正常数。

$$J(u) = \int_0^{t_f} 1 dt = t_f \quad (1.1.5)$$

问题是寻找一个满足式(1.1.4)的控制函数 $u(t)$ ，把 W 由初态 $(x_0, 0)^T$ 转移到终态 $(0, 0)^T$ ，且使式(1.1.5)中的性能指标达到最小。任何能达到上述要求的控制函数都称为最优控制。电梯的快速升降、轧钢机的快速控制和机械振动的快速消振问题都可以用上述问题阐述。

例 1.2 月球软着陆最小燃耗问题。

为了使宇宙飞船在月球表面实现软着陆（到达月球表面时的速度为零），飞船必须依靠其发动机产生一个与月球重力相反的推力，要寻求发动机推力的最优控制规律，使燃料消耗最少，以便在完成登月考察任务后，有足够的燃料离开月球，返回地球。

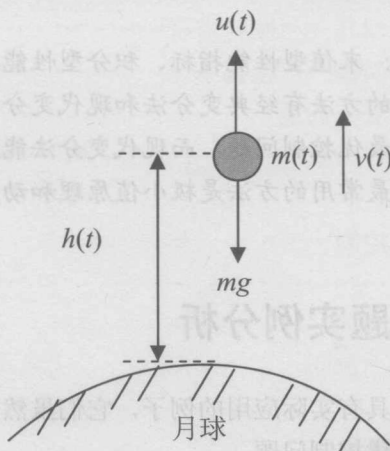


图 1-1 月球上的飞船软着陆示意图

设飞船总质量为 $m(t)$ ，距月球高度为 $h(t)$ ，垂直速度为 $v(t)$ ，发动机推力为 $u(t)$ ，月球表面的重力加速度可视为常数 g ，飞船的自身质量为 M ，所带初始燃料质量为 F ，初始高度为 h_0 ，初始垂直速度为 v_0 。那么，飞船的运动方程式可表示为

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{u(t)}{m(t)} - g \\ \dot{m}(t) = -ku(t) \end{cases} \quad (1.1.6)$$

初始条件

$$h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad m(0) = M + F \quad (1.1.7)$$

终端条件

$$h(t_f) = 0, \quad v(t_f) = 0 \quad (1.1.8)$$

作为控制函数的推力 $u(t)$ 满足约束

$$0 \leq u(t) \leq \alpha \quad (1.1.9)$$

其中, α 是发动机的最大推力。

要求燃料消耗最少就是使

$$J(u) = m(t_0) - m(t_f) = - \int_0^{t_f} \dot{m}(t) dt = \int_0^{t_f} ku(t) dt \quad (1.1.10)$$

取最小值。

我们的任务是寻求发动机推力的最优控制规律 $u(t)$, 在满足约束条件式(1.1.9)下, 使飞船由初态式(1.1.7)转移到终态式(1.1.8), 并且使式(1.1.10)中性能指标为最小。

式(1.1.10)中性能指标是指燃料消耗量为最小, 由于初始燃料是个定值, 所以式(1.1.10)可等价于飞船在着陆时的质量为最大, 即

$$J(u) = m(t_f) \quad (1.1.11)$$

达到最大值。可见, 极小值和极大值问题可以相互转换。

例1.3 基金的最优管理问题。

某基金会得到一笔60万元的基金, 现将这笔款存入银行, 年利率为10%, 该基金会计划用80年, 80年后要求只剩0.5万元用作处理该基金会的结束事宜。根据基金会的需要, 每年至少支取5万元, 至多支取10万元作为某种奖金。我们的问题是制定该基金的最优管理策略, 即每年支取多少元才能使基金会在80年中从银行取出的总金额最大。

令 $x(t)$ 表示第 t 年存入银行的总钱数, $u(t)$ 表示第 t 年支取的钱数, 则

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - u(t), & r = 0.1 \\ x(0) = 60 \\ x(80) = 0.5 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

根据基金会的需要, 每年至少支取5万元, 至多支取10万元, 因此

$$5 \leq u(t) \leq 10 \quad (1.1.13)$$

基金会在80年中从银行取出的总金额为

$$J(u) = \int_0^{80} u(t) dt \quad (1.1.14)$$

基金的最优管理问题是求解满足式(1.1.12)和式(1.1.13)的 $u(t)$ 使式(1.1.14)中的 $J(u)$ 取最大值的问题。

应用第五章介绍的极小值原理可以求出最优管理策略: 在第16年以前每年支取5万元, 第16年以后每年支取10万元, 共支取720万元。

例1.4 生产计划问题。

设有 m 台同样的机器, 每台机器可以做两种工作, 如果用于第一种工作, 每台每年可获利3万元, 机器的损坏率为 $2/3$; 如果用于做第二种工作, 每台每年可获利2.5万元, 机器的损坏率为 $1/3$ 。现考虑3年的生产周期, 试确定如何安排生产计划才可获得最大利润。

设第 k 年可用机器的台数为 $x(k)$ 台, 第 k 年分配做第一种工作的机器台数为 $u(k)$ 台, 显然, 第 $k+1$ 年可用机器的台数 $x(k+1)$ 满足状态方程

$$x(k+1) = \frac{1}{3}u(k) + \frac{2}{3}[x(k) - u(k)] \quad (1.1.15)$$

$u(k)$ 满足约束条件

$$0 \leq u(k) \leq x(k) \quad (1.1.16)$$

第 k 年获得的利润为

$$R(k) = 3u(k) + 2.5[x(k) - u(k)] = 0.5u(k) + 2.5x(k) \quad (1.1.17)$$

3 年一共获得的利润为

$$J[u(k)] = \sum_{k=0}^2 R(k) = \sum_{k=0}^2 [0.5u(k) + 2.5x(k)] \quad (1.1.18)$$

生产计划问题是寻求满足状态方程式(1.1.15)和约束条件式(1.1.16)的 $u^*(k)(k=0,1,2)$, 使式(1.1.18)中的目标 $J[u(k)]$ 达到最大。

应用第六章介绍的动态规划法可以求出最优生产计划: 第一、二年分配做第一种工作的机器数都为 0, 第三年分配做第一种工作的机数为 $\frac{4}{9}m$, 三年共获得利润 $\frac{11}{2}m$ 万元。

1.2 最优控制问题的数学描述

由上述四个最优控制问题的实例可以看出, 最优控制理论所要解决的问题是根据被控对象的动态特性(系统数学模型), 选择一个容许的控制律, 使得被控对象按预定要求运行(由初始状态运行到终端状态), 并使给定的某一性能指标达到最优值。因此, 最优控制问题的数学描述应包含被控对象的数学模型、系统的边界条件(初态和终态)、衡量“控制作用”效果的性能指标和容许控制四个方面的内容。

1.2.1 数学模型

被控对象的数学模型, 即动态系统的微分方程, 它反映了动态系统在运动过程中所遵循的物理或化学规律, 其运动规律可以用状态方程来表示。

令 $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ 表示控制系统的状态变量, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in R^m$ 表示控制系统的控制变量, 则控制系统的状态方程通常可用一阶微分方程组描述为

$$\dot{x} = f[x(t), u(t), t] \quad (1.2.1)$$

方程式(1.2.1)概括了方程式(1.1.1)、式(1.1.6)和式(1.1.12)几种情况。

当 f 不显含 t 时, 称式(1.2.1)为定常系统(或称为时不变系统)。当 f 关于 x 和 u 为线

性关系时, 称式(1.2.1)为线性系统, 这时方程可以写成

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.2.2)$$

其中, $A(t)$ 为 n 阶方阵, $B(t)$ 为 n 行 m 列矩阵。当 A 和 B 与时间 t 无关时, 称式(1.2.2)为线性定常系统或线性自治系统。

在一些实际问题中, 系统的状态变量和控制变量关于时间是离散的, 这样的控制系统称为离散控制系统。令 $x(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T \in R^n$ 表示控制系统的状态变量, $u(k) = [u_1(k), \dots, u_m(k)]^T \in R^m$ 表示控制系统的控制变量, 则离散控制系统的状态方程可用差分方程描述成

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad (1.2.3)$$

方程式(1.2.3)概括了方程式(1.1.15)的情况。

1.2.2 边界条件

动态系统的初态和终态, 也就是状态方程的边界条件。动态系统的运动归根结底是在状态空间里从一个状态转移到另一个状态, 其运动随时间变化对应于状态空间的一条轨线。轨线的初始状态可以记为 $x(t_0)$, t_0 为初始时间; 轨线的终端状态可记为 $x(t_f)$, t_f 为达到终态的时间。

在最优控制问题中, 当 $t = t_0$ 时的初态通常是已知的, 即 $x(t_0) = x_0$, 而到达终端的时间 t_f 和状态 $x(t_f)$ 则因问题而异。就终端时间 t_f 来说, 它可以有两种情形: 一种是固定的, 如例 1.3 中 $t_f = 80$ 年, 例 1.4 中 $t_f = 3$ 年; 另一种是变动或自由的, 如例 1.1 和例 1.2。至于终端状态 $x(t_f)$, 情况要复杂得多, 可归纳为以下三种情况:

(1) 终端状态固定

终端状态固定指终端状态 $x(t_f)$ 对应于状态空间的一个固定点, 即 $x(t_f) = x_f$ 是已知的。如例 1.1 和例 1.2 中 $x(t_f) = 0$, 例 1.3 中 $x(t_f) = 0.5$ 。

(2) 终端状态受约束

终端状态受约束指终端状态 $x(t_f)$ 受到一些条件的限制, 如用以下方程表示 $x(t_f)$ 必须满足的约束条件。

$$G[x(t_f), t_f] = 0 \quad (1.2.4)$$

(3) 终端状态自由

终端状态自由指终端状态 $x(t_f)$ 不再是一个点, 而是一个运动点。

对于以上情况, 都可以用一个目标集 S 来概括, 如果终端状态固定, 则目标集 S 仅有一个元素; 如果终端状态受某些条件的约束, 则目标集 S 为状态空间的一个曲面; 如果终端状态自由, 即不受任何条件的约束, 则目标集 S 扩展到整个状态空间。

1.2.3 性能指标

在状态空间中从初始状态转移到终端状态，可以通过不同的控制作用来实现，如何来衡量系统在控制作用下的好坏，需要一个标准对它进行量化评定，这个评价的衡量尺度或标准我们称之为性能指标。

值得着重指出的是：第一，我们无法为各种各样的最优控制问题规定一个统一格式的性能指标，那种面面俱到的最优控制实际上是不存在的。第二，性能指标的内容和形式取决于最优控制问题所要解决的主要矛盾。第三，即使是同一个问题，其性能指标也可能因设计者着眼点的不同而异，如有的设计者注重缩短时间，有的设计者注重节省燃料，而有的设计者则兼顾缩短时间和节省燃料。因此，为了使性能指标规定得恰到好处，理论知识固不可少，但经验和技巧的积累尤为重要。性能指标一般用 J 表示，在很多技术资料中被赋予不同的名称，如性能泛函、价值函数、目标函数、效益函数等。

性能指标的数学表达主要有以下三种形式：

(1) 末值型性能指标，也称为迈耶尔(Mayer)性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] \quad (1.2.5)$$

例 1.1 火车快速到达问题中， $J(u) = t_f - t_0$ ，即为末值型性能指标。

(2) 积分型性能指标，还称为拉格朗日(Lagrange)性能指标

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1.2.6)$$

例 1.3 基金的最优管理问题中， $J(u) = \int_0^{80} u(t) dt$ ，即为积分型性能指标。

(3) 复合型性能指标，也叫波尔扎(Bolza)性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1.2.7)$$

复合型性能指标实际是末值型性能指标和积分型性能指标的组合，由式(1.2.7)可看出该指标对控制过程的状态量 $x(t)$ 、控制量 $u(t)$ 及末端状态 $x(t_f)$ 均有要求。

1.2.4 容许控制

对于一个实际的控制问题，控制变量 $u(t)$ 通常是某种物理量。根据控制量的变化范围，控制问题可分为两类：一类是控制量变化范围受限制的控制，如控制船舶转向的舵角、控制电机的电流都是受限制的；另一类是控制量变化范围不受限制或实际上不受限制的控制，如导弹的推力控制方向角，因可作 $\pm 360^\circ$ 的变化而不受限制。

对每一个控制问题来说，满足条件的控制作用 $u(t)$ 的一个取值对应于 m 维空间 R^m 中的一个点，所有满足条件的控制作用 $u(t)$ 的取值构成 m 维空间的一个集合，记为 Ω ，称之为容许控制集。凡是属于容许控制集 Ω 的控制都是容许控制。在前面提到的两类控制中，前一类控制属于闭集控制，后一类控制属于开集控制。后续我们将会看到，这两类控制问题，在处理方法上有着本质的区别。最优控制一定是容许控制，即

$$u(t) \in \Omega \subseteq R^m \quad (1.2.8)$$

1.2.5 最优控制的一般提法

设已知系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \quad t \in [t_0, t_f] \quad x(t) \in R^n \quad (1.2.9)$$

初始条件和终端状态满足

$$x(t_0) = x_0, \quad G[x(t_f), t_f] = 0 \quad (1.2.10)$$

控制函数为

$$u(t) \in \Omega \subseteq R^m \quad (1.2.11)$$

其中, 函数 f 是 $x(t)$ 、 $u(t)$ 和 t 的连续函数, 并对 $x(t)$ 和 t 连续可微。若存在一个在区间 $[t_0, t_f]$ 中分段连续的控制函数 $u(t)$ 能使系统状态 $x(t)$ 从初态 x_0 转移到终态 $x_f \in S$, 并使性能指标

$$J = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (1.2.12)$$

达到极值, 则称控制函数 $u(t)$ 为最优控制函数, 记为 $u^*(t)$, 与之对应的 $x(t)$ 称为最优轨线, 记为 $x^*(t)$, 此时的性能指标 J 叫做最优性能指标。

可见, 最优控制属于系统综合与设计范畴。最优控制的任务是给定一个被控系统 (controlled system) 或被控过程 (controlled process) (包括有关的约束条件和边界条件) 以及性能指标 (performance index), 如何设计相应的控制系统 (control system), 使得在满足约束条件和边界条件的同时, 其性能指标达到极值 (极大或极小)。

1.2.6 离散系统最优控制问题的数学描述

设已知系统的差分方程为

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \quad k = k_0, k_0 + 1, \dots, k_n - 1 \quad (1.2.13)$$

初始条件和终端状态满足

$$x(k_0) = x_0, \quad G[x(k_n), k_n] = 0 \quad (1.2.14)$$

控制函数为

$$u(k) \in \Omega \subseteq R^m \quad (1.2.15)$$

性能指标

$$J = \varphi[x(k_n), k_n] + \sum_{k=k_0}^{k_n-1} L[x(k), u(k), k] \quad (1.2.16)$$

离散系统的最优控制问题就是寻求一个容许控制 $u(k)$, 使系统的状态 $x(k)$ 从给定的初值 x_0 转移到终态 $x(k_n) \in S$, 并使性能指标 J 达到极值。

若上述最优控制问题有解 $u^*(k)$, 则 $u^*(k)$ 称为最优控制函数, 对应的轨线 $x^*(k)$ 称为最优轨线, 而这时的性能指标 J 叫做最优性能指标。

1.3 最优控制的发展

最优控制理论是现代控制理论的一个重要组成部分, 它的发展与现代控制理论的发展是分不开的。迄今为止, 控制理论的发展经历了古典控制理论和现代控制理论的两个重要发展阶段, 并进入了第三个阶段, 即大系统理论和智能控制理论。

第二次世界大战以后发展起来的自动控制理论, 在用来设计与分析单输入单输出的线性定常系统时是行之有效的。然而, 随着生产的发展, 特别是空间技术的发展, 控制系统日趋复杂, 其精度要求愈来愈高。于是, 建立在传递函数和频率特性基础上的自动控制理论, 即我们通常说的经典控制理论, 就日益显示出它的局限性来。这种局限性首先表现在对于时变系统, 传递函数根本无法定义; 即使是线性定常系统, 在多输入多输出时, 其传递函数成为一个函数矩阵, 以致从传递函数概念得出的工程上的结论, 在这里也变得很复杂而难于应用。其次还表现在频率法本质上是一种工程方法, 由频率法所获得的校正特性只能靠简单的网络来实现, 而网络参数的确定, 还须经过调试过程, 当系统很复杂, 精度要求很高时, 这种半经验的方法就不大适用了。因此, 人们又回到时间域, 建立了以状态空间概念为基础的现代控制理论。

现代控制理论所能处理的问题范围很广。原则上, 它可以用来处理时变系统、非线性系统、多输入多输出系统以及分布参数系统的问题。用它来处理随机系统问题和离散系统问题同样是很方便的。

早在20世纪50年代初期, 就有人发表了从工程观点研究最短时间控制问题的文章, 虽然最优性的证明借助于几何图形, 带有启发性质, 但它为现代控制理论的发展提供了第一批实际模型。随后, 最优控制问题的深入研究以及空间技术的迫切需要吸引了一大批数学家的密切注意。人们通过研究发现, 从数学观点来看, 最优控制问题就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题, 其本质是一个变分学问题。然而, 经典变分理论所能解决的只是其容许控制属于开集的一类最优控制问题, 在工程实践中所遇到的, 却大多是其容许控制属于闭集的一类最优控制问题, 经典变分理论无能为力, 这就需要人们去探索求解最优控制问题的新途径。

在种种新方法中, 有两种方法最富成效。一种是前苏联学者庞特里亚金(L.C.Pontryagin)的“极小值原理”; 另一种是美国学者贝尔曼(R.E.Bellman)的“动态规划”。受力学中哈密尔顿原理的启发, 庞特里亚金等人把“极小值原理”作为一种推测首先提出来, 随后不久又提供了一种严格的证明, 并于1958年在爱丁堡召开的国际数学会议上首次宣读。“极小值原理”发展了经典变分原理, 成为处理闭集性约束变分问题的强有力工具。“动态规划”是贝尔曼在1953至1957年间逐步创立的, 他依据最优性原理, 发展了变分学中的哈密尔顿-雅

可比 (Hamilton-Jacobi) 理论, 构成了“动态规划”, 它是一种适用于计算机计算、处理问题范围更广泛的方法。在现代控制理论的形成与发展中, 极小值原理、动态规划和卡尔曼的最优估计理论起了重要的推动作用。

现代控制理论迅速发展的同时, 数字计算机也在飞速地发展, 并得到广泛地应用。数字计算机运算速度的提高、存储容量的增大、体积的缩小以及软件的广泛应用, 使数字计算机不仅成为控制系统分析与设计的强有力的工具, 而且逐渐成为自动控制系统的主要部件之一。计算机“在线”参与控制, 使得许多既不要求把控制器归结为简单的校正网络, 也不要求有封闭式解析解的复杂控制方法在实际工程应用中成为可能。因此, 高速度、大容量、软硬结合计算机的问世, 一方面使现代控制理论的工程实现有了可能, 另一方面又反过来提出许多新的理论和问题, 导致诸如最优控制的直接和间接计算的大批研究成果的出现, 进一步推动了现代控制理论的发展。

近20年来, 在现代控制理论和现代控制工程应用中, 吸收了现代数学的很多成果, 又得到了很大发展, 并渗透到生产、生活、国防、城市规划、智能交通、管理等许多领域, 发挥了愈来愈大的作用。最优控制的发展成果主要包括分布式参数的最优控制、随机最优控制、自适应控制、大系统最优控制、微分对策等, 最优控制理论形成了比较完善的理论体系, 为现代控制工程做了比较充分的理论准备。特别要指出的是, 随着高性能嵌入式系统的应用和发展, 最优控制理论研究将是一个十分活跃的研究领域, 最优控制理论在实际工程中应用将愈来愈广泛。

例 2.3 求一元函数 $y = x^2$ 的极值。

解: $y = 3x^2, y' = 6x$

可见, $x=0$ 是出现极值的必要条件, 但 $x=0$ 外, $y=0$, 因此不能确定此点是极值点或拐点, 要通过 $x=0$ 附近的变化情况来定。

(1.1.5) $x < 0$ 时, y 为正; $x > 0$ 时, y 为负, 故 $x=0$ 不是极值点而是拐点。

2.1.2 二元函数的极值

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在某点 (x_0, y_0) 处取得极值的必要条件是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2.1.3)$$

满足上述条件的点称为驻点, 驻点不一定是极值点, 也可能是拐点。

驻点 (x_0, y_0) 处, 点 (x_0, y_0) 是极大值点, 点 (x_0, y_0) 是极小值点, 点 (x_0, y_0) 是鞍点。

第二章 函数的极值问题

本章要点

◆多元函数取极值的充分条件可通过其海塞矩阵的正定或负定性来判断；海塞矩阵是实对称矩阵，其正负定性判断可用特征值法或塞尔维斯特判据来判别。

◆求解带约束条件的函数极值问题常用拉格朗日乘法。

最优控制问题实质就是求解一类带有约束条件的泛函极值问题，而泛函的极值问题与函数的极值问题在处理问题的途径和概念上有一定的联系，因此，我们先介绍函数的极值问题。当函数自变量没有附加约束条件时要求函数极值，我们称为无约束条件函数极值问题。然而在实际问题中，常常遇到的是自变量要受到约束条件的限制，被称为有约束条件的函数极值问题。例如，要求过渡过程响应的时间最短，而加速度又不允许超过一定数值，就是条件极值问题。

2.1 无约束条件的函数极值问题

2.1.1 一元函数的极值

连续可微一元函数 $y=f(x)$ ，在定义区间 (a, b) 的 x_0 处，存在极值的必要条件是

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \dot{f}(x) \Big|_{x=x_0} = 0 \quad (2.1.1)$$

充分条件是

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \ddot{f}(x) \Big|_{x=x_0} < 0, \text{ 存在极大值} \quad (2.1.2)$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \ddot{f}(x) \Big|_{x=x_0} > 0, \text{ 存在极小值}$$

如果 $\ddot{f}(x)=0$ ，则要看 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的变化情况来判别 x_0 是极值点或拐点。

上述情况可用图 2-1 来表示。R 点是局部极小点，又是总体极小点，U 只是局部极小点，T 是局部极大点，S 是拐点，不是极值点。

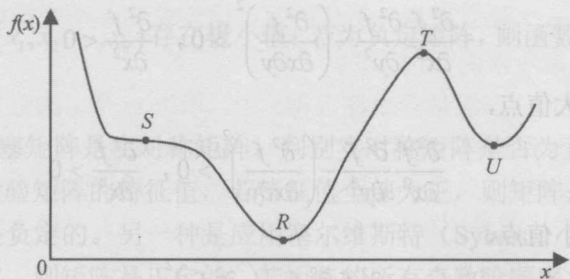


图 2-1 函数的极值点和拐点

例 2.1 求使 $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ 最小的 x 取值。

解: $f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \cdots + 2(x - a_n)$

必要条件 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 充分条件 $f''(x^*) = 2n > 0$

故解 $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 使 $f(x)$ 达到极小值。本例是著名的最小二乘问题。

例 2.2 求一元函数 $y = 3x - x^3$ 的极值。

解: $\dot{y} = 3 - 3x^2$, 必要条件 $\dot{y} = 0$, 得 $x = \pm 1$ 。充分条件为 $\ddot{y} = -6x$, 得

当 $x = 1$ 时, $\ddot{y} < 0$, 所以取极大值得 $y = 2$ 。

当 $x = -1$ 时, $\ddot{y} > 0$, 所以取极小值得 $y = -2$ 。

例 2.3 求一元函数 $y = x^3$ 的极值。

解: $\dot{y} = 3x^2$, $\ddot{y} = 6x$

可见, $x = 0$ 是出现极值的必要条件, 但 $x = 0$ 处, $\dot{y} = 0$, 因此不能确定此点是极值点或拐点, 要通过 $x = 0$ 附近的变化情况来定。

当 $x \rightarrow 0^+$, y 为正; $x \rightarrow 0^-$, y 为负。因此, $x = 0$ 处不是极值点而是拐点。

2.1.2 二元函数的极值

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在定义域 D 内可微, 则 z 在 D 内部一点 (x_0, y_0) 取极值的必要条件是

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0 \quad (2.1.3)$$

满足上述方程的点不一定是函数的极值点, 而可能是鞍点。假定函数在此点附近是二阶可微的, 在此点的邻域展成泰勒级数。

若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

则 (x_0, y_0) 是极大值点,

若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

则 (x_0, y_0) 是极小值点,

若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$

则无极值,

若 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

则不能确定是否存在极值。

例 2.4 求二元函数 $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ 的极值。

解: $\frac{\partial f}{\partial x} = x, \frac{\partial f}{\partial y} = y$, 可见, $x=0, y=0$ 时, 满足极值的必要条件。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 1 > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 > 0,$$

故在点 $(0,0)$ 处, 函数 $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ 有极小值。

2.1.3 n 元函数的极值

考虑更一般的 $n(n \geq 3)$ 元函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值问题。设它在 n 维空间 R^n 的某个区域 D 上定义, 且连续可微, 则存在极值的必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad (2.1.4)$$

令 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 则上式可写成 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 可简称为 $\nabla_x f$, 称作函数 f 的梯度。

充分条件是, 海塞矩阵

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.1.5)$$