

诸德超文集

航空工业出版社

ISBN 7-80183-257-4



内 容 提 要

本文集主要包含了诸德超教授在学术期刊和国内外重要学术会议上发表过的主要学术论文。文集包含4个部分,共42篇论文,内容主要涉及结构振动分析及控制和广义模态理论、升阶谱有限元素方法及其应用、复合材料结构力学和弹性冲击理论与试验技术等。

本文集主要供从事结构动力学、计算力学方面研究工作的技术人员使用,也可供航空航天及其他部门和从事复合材料结构设计和研究的人员和高等院校的师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

诸德超文集/诸德超著. —北京:航空工业出版社,
2003.10

ISBN 7-80183-257-4

I. 诸... II. 诸... III. ①诸德超—文集②航空器—结构力学—文集③航天器—结构力学—文集 IV.
①V214-53②V414-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第088152号

责任编辑:李铁柏

封面设计:麦醒媛

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

北京航宇印刷厂印刷

全国各地新华书店经售

2003年10月第1版

2003年10月第1次印刷

开本:787×1092

1/16

印张:24.5

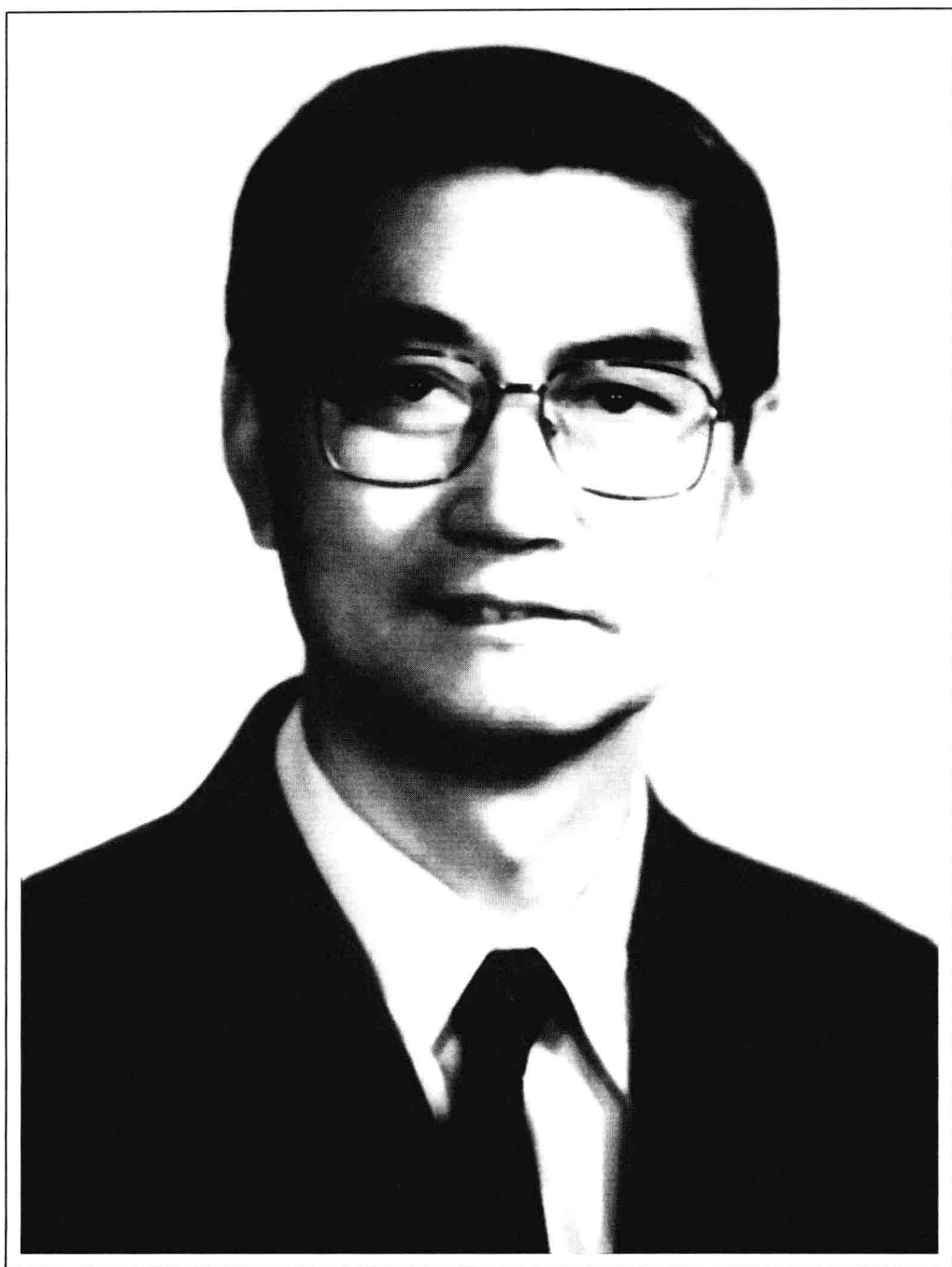
字数:651千字

印数:1—500

定价:100.00元

ISBN 7-80183-257-4

V·032



沈明

序 言

诸德超教授 1933 年 11 月 11 日生于上海, 2003 年 1 月 8 日在北京逝世。

为了怀念诸德超教授, 出版这本诸德超教授的学术文集, 是很有意义的。

诸德超教授是我国著名的计算力学和结构动力学专家、航空科学教育家, 具有很高的学术造诣, 在国内外享有很高的学术声望, 为力学学科、航空科技与教育事业的发展做出了杰出的贡献。

自 20 世纪 50 年代初, 诸德超教授就献身于科学研究事业。他主要从事升阶谱有限元理论和应用、结构线性亏损振动系统的广义模态理论、复合材料结构力学、结构弹性碰撞分析和实验研究等领域的研究工作。在这些领域获得了国内外瞩目的开创性的研究成果, 尤其是关于升阶谱有限元和广义模态理论的研究成果受到国内外专家的高度评价, 促进了固体力学的发展。他所撰写的专著《升阶谱有限元》获得国防优秀图书出版基金资助, 于 1993 年由国防工业出版社出版。

在升阶谱有限元方面, 诸德超教授以显表达式给出正规域内两类重要最佳升阶谱有限元, 以分式形式给出结构矩阵元素的准确值, 从而解决了国外以往在使用高价元时难以克服的数值误差积累问题, 为自适应有限元分析技术奠定了基础。研究成果得到国内外专家的高度赞赏。

在结构线性亏损振动系统的广义模态理论方面, 诸德超教授的研究成果包括两部分: 一是在国际上首先给出判定线性结构振动系统亏损性质的一般方法和理论根据, 方法极为简便易行, 英国 Newland 教授在其 1989 年出版的新著《机械振动分析与计算》一书中说到, 在其他方法不易搞清独立特征向量之数量时该方法可能是有用的。二是比较系统地建立了线性结构振动亏损系统的广义模态理论和论证了广义模态的惟一性, 传统的实模态理论和复模态理论只是该广义模态理论的特例。为线性非保守复杂结构动力学分析和实验提供了更为扎实的理论基础和适用范围更为广泛的手段。国内外同行专家评价有关成果“取得了可以说是突破性的进展”等。

诸德超教授还非常重视试验研究工作和科研成果在航空航天工业中的应用。在 20 世纪 50 年代参加型号研制的过程中, 他开创了两个重要的结构动力学实验。一是 1958 年率队赴沈阳 112 厂完成了歼教 1 飞机全机地面共振试验, 这是我国第一次为飞机型号设计而进行的共振试验。二是 1967~1974 年间设计并完成了我国第一台飞行器全动舵和机翼模型超声速风洞颤振试验装置, 利用该装置进行的实验为若干型号设计的颤振分析提供了实验依据, 至今仍被航天工业厂所应用。这些工作为型号研制做出了重要贡献。

作为国际知名学者, 诸德超教授多次应邀在国际著名大学访问, 并在国外和香港著名大学和学术会议上作学术报告。在长期孜孜不倦从事科研工作的同时, 诸德超教授还始终工作在教学第一线。自 1958 年以来长期主讲“飞机的振动与颤振”、“飞机结构振动分析”、“气动弹性力学”、“有限元基础”、“计算方法”、“变分法”、

“结构分析中的有限元素法”、“变分原理及有限元”和“近代固体力学”等本科生及研究生课程。他讲课深入浅出、语言生动、循循善诱、诲人不倦，具有极其丰富的教学经历和经验，培养了大批优秀人才。

诸德超教授还编写了多本教材和科技著作，主要包括《气动弹性力学讲义》、《气动弹性力学》、《结构分析中的有限元素法》、《振动学基础》、《升阶谱有限元技术》；《Advances in Engineering Mechanics》；《Selected Papers of T. H. Pian》，《有限元手册》（英译汉，主译）、《弹性力学中的变分原理及其应用》（汉译英，在国外发行）、《实用振动工程(1)~(3)》。这些凝集了诸德超教授几十年心血的著作，是留给后人的宝贵财富。

诸德超教授是中国振动工程学会和北京振动工程学会创始人之一，是北京航空航天大学固体力学专业的创始人之一。他曾担任中国振动工程学会第3届副理事长，第1、2届常务理事兼副秘书长，中国力学学会第5届和第6届常务理事，北京振动工程学会第1~3届理事长等职。1982年以来他长期担任航空科学技术研究院结构动力学专业组副组长，1989~1991年担任中国干线飞机总设计师顾问。1992年起享受国家政府特殊津贴，1992~1997年期间为国务院学位委员会第3届力学学科评议组成员。

诸德超教授为国内学报工作做出了重要贡献。自1995年以来他任国内重要学术刊物《航空学报》主编，曾担任《力学学报》、《振动工程学报》、《北京航空航天大学学报》等多种学报的常务编委和编委，曾担任德国 Springer 出版社《国际计算力学学报》的中国常务编委（Managing editor）。他还在清华大学、西安交通大学等多所著名大学、重点实验室担任重要学术职务。

诸德超教授一生坚持真理、治学严谨、淡薄名利、无私奉献，他为人既耿直坦率，又平易近人，堪称知识分子的楷模。文集的出版在于弘扬诸德超教授献身科技的崇高精神，展现他在科学事业上做出的重要贡献。希望同行专家，特别是青年科技工作者从文集的内容中得到启迪。

借此机会，再一次对诸德超教授表示深切的怀念，对诸德超教授的夫人林翠虹老师致以诚挚的问候。

王大纲

目 录

第一部分 结构振动分析及控制和模态理论

应用矩阵迭代法求解后掠飞机的全机自由—自由振动问题	诸德超, 崔德瑜, 王玉茹 (1)
全动舵振动及颤振计算报告	诸德超 (11)
有关超声速颤振试验的几个问题	张世基, 诸德超, 邹从青 (16)
The Determination of Defectiveness of Linear Structural Dynamic Systems	 ZHU De-chao, SHI Guo-qin (37)
Free Vibration of an Orthogonally Stiffened Flat Plate	 MEAD D J, ZHU D C, BARDELL N S (41)
线性振动亏损系统的广义模态理论	时国勤, 诸德超 (67)
线性振动亏损系统广义模态参数的识别方法	时国勤, 诸德超, 王俊奎 (76)
Explicit Expressions for Defective Vibrating Systems with Two Degrees of Freedom	 ZHU De-chao (84)
时域模态参数识别的直接特征系统实现算法	王卫东, 张世基, 诸德超 (89)
线性结构振动亏损系统的实验模态分析	时国勤, 诸德超, 王俊奎 (95)
The Mutual Variational Principle of Free Wave Propagation in Periodic Structures	 ZHU De-chao, CHENG Wei (102)
振动主动控制中速度反馈的作用	诸德超 (109)
The Generalized Mode Theory in Structural Dynamics	ZHU De-chao, SHI Guo-qin (116)
周期性加筋板中的波传播特性	程 伟, 诸德超 (122)
梁波传播的固有特性	程 伟, 诸德超, 王大钧 (128)

第二部分 有限元素方法及其应用

锥形薄壳限制扭转的实用理论	诸德超 (135)
弹性薄壁杆件的平衡理论	诸德超 (154)
斜削梁协调元素族及其在梁固有振动分析上的应用	诸德超 (171)
固体力学中的杂交与混合有限元素法	诸德超 (184)
铁木辛柯梁的升阶谱元素及其在固有振动问题中的应用	葛效尧, 诸德超 (188)
部分正交升阶谱圆筒壳元素及其在固有振动中的应用	时国勤, 诸德超 (201)
论升阶谱有限元技术	诸德超 (210)
用高阶有限元分析旋转梁的固有振动	诸德超 (218)

第三部分 复合材料结构力学

A New Mechanical Model for Laminated Composite Beams and Plates	
..... ZHU De-chao, HUANG Chuan-yue (225)	
纺织分层材料模型与平编织纤维复合材料正轴弹性性能预测	顾忠明, 诸德超 (231)
The Influence of Shear Deformation on the Modelling and Dynamic Properties of Composite Laminates	ZHU D C, SHENOI R A, JIANG T H (236)
基于剖面翘曲修正理论的复合材料叠层梁动态特性分析	黄传跃, 诸德超 (242)
Assessment of Four Shear Deformation Theories for Laminated Composite Structures Based on Both Static and Dynamic Analysis	ZHU De-Chao, XU Zhen-Yu (248)
A Homogenisation Scheme and Its Application to Evaluation of Elastic Properties of Three-Dimensional Braided Composites ...	CHEN Zuo-rong, ZHU De-chao, LU Meng, YE Lin (260)
Multiscale Finite Element Method for Subdivided Periodic Elastic Structures of Composite Materials	CAO Li-qun, CUI Jun-zhi, ZHU De-chao, LUO Jian-lan (287)
The Analysis of Thin Walled Composite Laminated Helicopter Rotor With Hierarchical Warpng Functions and Finite Element Method	
..... ZHU De-chao, DENG Zhong-min, WANG Xing-wei (297)	
A Homogenization Method Based on Eigenvector Expansions for Woven Fabric Composites ...	
..... ZHU De-chao, XIE Wen-jian. (308)	

第四部分 结构弹性冲击理论与试验技术

用模态法识别结构弹性碰撞载荷的可行性	邢誉峰, 诸德超 (316)
点弹性碰撞问题之解析解	诸德超, 邢誉峰 (322)
杆和板弹性正碰撞的瞬态响应	邢誉峰, 诸德超 (326)
结构弹性碰撞问题注	诸德超, 邢誉峰, 李 敏 (331)
杆和梁在锁定过程的响应	邢誉峰, 诸德超 (336)
结构弹性碰撞分析三种隐式时间积分法结果的比较	诸德超, 李 敏 (341)
复合材料叠层梁和金属梁的固有振动特性	邢誉峰, 诸德超, 乔元松 (348)
Analytical Solutions of Impact Problems of Rod Structures with Springs	
..... XING Yu-feng, ZHU De-chao (355)	
球杆碰撞问题的数值分析和实验研究	李 敏, 诸德超 (365)
Elastic Impact on Finite Timoshenko Beam	
..... XING Yu-feng, QIAO Yuan-song, ZHU De-chao, SUN Guo-jiang (370)	
编后语	邢誉峰, 程 伟, 李 敏 (381)

应用矩阵迭代法求解后掠飞机的 的全机自由—自由振动问题^①

诸德超, 崔德瑜, 王玉茹
(北京航空学院 一〇四教研室)

摘 要: 应用矩阵迭代法求解后掠飞机全机自由—自由振动的频率及模态。由于采取了根据孤立结构元件的柔度矩阵, 通过变换矩阵以求出整个结构柔度矩阵的办法, 因而使动力矩阵可由若干个分别代表几何、质量及刚度参数的简单矩阵组合而成。这样, 当用电子计算机求解时, 就可使人工的计算工作量减到最低限度。

关键词: 矩阵迭代法; 后掠飞机; 全机自由—自由振动

1 引 言

在用 Галеркин 方法计算后掠飞机或具有重机翼的飞机的颤振问题时, 需要应用全机自由飞行时的自由振动模态。本文的内容是研究如何发挥电子计算机的特点, 利用矩阵迭代法求解全机的自由—自由振动问题, 希望得到人工计算工作量最小而计算程序最简单的矩阵公式, 使输入计算机的数据只是结构参数, 而输出的就是解答。

早在 1874 年, Seidel 就已经总结了迭代法在求解线性联立代数方程组上的应用。在工程上, Duncan^[1] 和 Morris^[2,3,4] 等或许是首批应用矩阵迭代法来求解悬臂梁和飞机振动的学者。在他们的著作中, 都是把连续系统简化为一离散系统, 即是用一带有离散质量的无重量弹性梁系统来代替真正的系统。应用矩阵迭代法求解振动问题的另一种方式, 就是先写出系统的积分方程, 然后用配置法 (Collocation) 和数值积分法把它转化为矩阵公式求解。例如, White^[5] 曾用此法解过梁及涡轮叶片的振动问题。

矩阵迭代法的优点是计算程序较简单。同时也易于考虑一些因素的影响, 例如剪切的影响, 这对飞行器薄壁结构的振动特别是对其高音振动是相当重要的^[6]。矩阵迭代法的缺点可能是矩阵的阶数较高, 文献^[7]指出, 通常要求矩阵的阶数为所求模态数量的 4~6 倍。

2 全机柔度影响系数矩阵^②

如图 1 所示, 我们用一组相交的分别代表机翼、尾翼及机身的梁来表征全机的弹性性能, 代表机身的梁在头部以某种静定的方式支持起来, 这种附加的拘束以后可以根据平衡条件消去。同时, 我们用一离散的刚硬质量块系来表征飞机的惯性能, 每一个质量块以一点固接

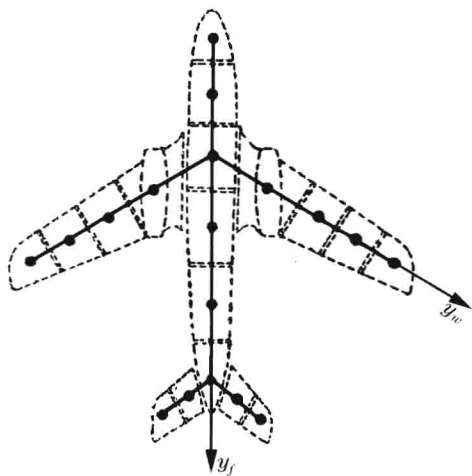


图 1

① 发表于《航空学报》1966 年第 2 卷第 2 期, 第 49~59 页

② 以后简称为柔度矩阵

中国航空学会成立大会学术报告, 北京 1964 年

的形式连接在各根梁的指定站上,并且随着梁一起运动。

为了分析上述简化系统的振动特性,先来建立它的柔度矩阵。对于由串联元件所组成的结构,Argyris^[8]总结了通过结构元件的柔度矩阵来表示整个结构柔度矩阵的一般矩阵公式如下:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{f} \mathbf{B} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{F}$ 为结构的柔度矩阵;

$\mathbf{f}$ 为元件柔度矩阵的组合矩阵;

$\mathbf{B}$ 为所谓的单位载荷矩阵,表示当结构受到各种单位(广义)载荷作用时,元件因此而受到的载荷情况;

T 为表示将矩阵转置。

本文就利用这种概念来导出后掠飞机的全机柔度矩阵。由于飞机在振动时可以分作对称与反对称性的振动,所以在建立柔度矩阵时也可对应地分作二种情况进行。

2.1 机身的弯曲柔度矩阵

在飞机对称振动时,机身只发生弯曲变形。我们将它简化成在一头二站处简支的梁,如图2所示。在梁的各站(i)上作用有线载荷 z_i 及弯矩 m_i 。如果将梁按站切开,分割成一系列串联起来的二端简支的元件梁。那么,根据平衡条件,在元件梁与原梁所受的载荷之间将存在下列的矩阵关系式

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}_m \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{Bmatrix}_f \quad (2)$$

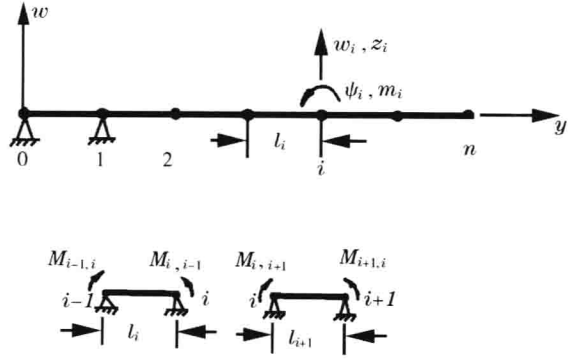


图2

式中: $\mathbf{B}_m = [\mathbf{I}_0^s(\mathbf{\Sigma Y} - \mathbf{Y \Sigma}) \mathbf{I}_0^m \mathbf{\Sigma}]$;

$\mathbf{M}$ 为列阵 $\{M_{01} \ M_{10} \ M_{12} \ M_{21} \ \cdots \ M_{n-1,n} \ M_{n,n-1}\}$;

$\mathbf{z}_0, \mathbf{m}_0$ 为将 z_i 及 m_i 自 0 到 n 按序排列而成的列阵;

$\mathbf{Y}$ 为将坐标 y_i 自 0 到 n 按序排列而成的对角矩阵;

$\mathbf{\Sigma}$ 为主对角线及其右上方的元素均为 1 的三角矩阵;

$$\mathbf{I}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_0^m = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

角标 f 代表机身。

第 i 个元件梁对应于其所受弯矩 $M_{i-1,i}$ 及 $M_{i,i-1}$ 的柔度矩阵 $\mathbf{f}_i^m$ 为

$$f_i^a = \frac{l_i}{12} \begin{bmatrix} \frac{3}{EI_{i-1}} + \frac{1}{EI_i} & \frac{1}{EI_{i-1}} + \frac{1}{EI_i} \\ \frac{1}{EI_{i-1}} + \frac{1}{EI_i} & \frac{1}{EI_{i-1}} + \frac{3}{EI_i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2l_i} \left(\frac{1}{GF_{i-1}} + \frac{1}{GF_i} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中: l_i 为元件梁的长度;

EI_i 及 GF_i 为分别代表梁在 i 站处的抗弯及抗剪刚度。

在导出式(3)时,已假设刚度的倒数沿着梁的轴线是线性变化的^[9]。于是元件梁系的柔度矩阵 f^a 为

$$f^a = \begin{bmatrix} f_1^a & & & \\ & f_2^a & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n^a \end{bmatrix} \quad (4)$$

最后,根据式(1),机身的弯曲柔度矩阵 F_m 可以表成

$$F_m = B_m^T f^a B_m \quad (5)$$

2.2 机身的扭转柔度矩阵

在飞机反对称振动时,机身只发生扭转变形。我们将它简化成一悬臂梁,如图3所示。在梁的各站(i)上作用有扭矩 t_i 。如果将梁按站切开,分割成一系列串联起来的悬臂元件梁,则可写成下式

$$T_0 = \Sigma t_0 \quad (6)$$

式中: T_0 及 t_0 分别代表将 T_i 及 t_i 自 0 到 n 按序排列而成的列阵。

悬臂元件梁的扭转柔度系数 f_i^θ 为

$$f_i^\theta = \frac{l_i}{2} \left(\frac{1}{GJ_{i-1}} + \frac{1}{GJ_i} \right) \quad (7)$$

式中: GJ_i 为梁在 i 站处的抗扭刚度。在导出式(7)时也已假设抗扭刚度的倒数是线性变化的。于是元件梁系的柔度矩阵 f^θ 可写成

$$f^\theta = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & f_1^\theta & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n^\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

最后,根据式(1),可得机身的扭转柔度矩阵 F_θ 如下

$$F_\theta = \Sigma^T f^\theta \Sigma_0 \quad (9)$$

2.3 机翼(或尾翼)的柔度矩阵

不论在飞机对称或反对称振动时,机翼(或尾翼)将同时发生弯曲和扭转变形。如果把它看成是一悬臂梁,并且也将它按站分割成一系列串联起来的元件梁,就弯曲载荷而言,元件梁是二端简

支的,而就扭转载荷而言,元件梁则是悬臂的。那么,根据平衡条件,在元件梁与原梁所受的载荷之间,我们可以列出如下的矩阵关系式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix}_{w,t} = \mathbf{B}_{w,t} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{m} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}_{w,t} \quad (10)$$

式中:

$$\mathbf{B}_{w,t} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}(\Sigma\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\Sigma)_1 & \mathbf{I}^m \Sigma_1 \\ & \Sigma_{w,t} \end{pmatrix};$$

$\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \mathbf{m}$ 和 $\mathbf{t}$ 分别是将 T_i, Z_i, m_i 和 t_i 自 1 到 n 按序排列而成的列阵;

$$\mathbf{I}^z = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \circ$$

其它矩阵符号的意义不变,但带有角标 1 者是表示自原矩阵中抽去其第 1 列而得出的新矩阵,角标 w 和 t 分别代表机翼和尾翼。

最后,机翼(或尾翼)的整个柔度矩阵 $\mathbf{F}_{w,t}$ 可写成

$$\mathbf{F}_{w,t} = \mathbf{B}_{w,t}^T \mathbf{f}^{w,t} \mathbf{B}_{w,t} \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{f}^{w,t} = \begin{bmatrix} f_1^z & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & f_n^z & & & & & & & \\ & & & f_1^\theta & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & f_n^\theta & & & & \\ & & & & & & & & & f_n^\theta \end{bmatrix}_{w,t} \circ$$

2.4 后掠飞机对称受载时的全机柔度矩阵

利用对称性关系,我们只需对半个飞机进行计算。为此把飞机沿机身中心线剖开,所以以后凡是机身,都是指半个机身,其质量与刚度均是原机身质量及刚度的一半。

在飞机对称振动时,机身除了承受作用在本身上的弯曲载荷外,还要承受来自机翼和尾翼的载荷。如果我们把原来作用在机身、机翼和尾翼上的载荷按序排成列阵,并用 $\mathbf{P}^s$ 来标记,则

$$\mathbf{P}^s = \{ \mathbf{Z}_{of} \quad \mathbf{m}_{of} \quad \mathbf{Z}_w \quad \mathbf{m}_w \quad \mathbf{t}_w \quad \mathbf{Z}_t \quad \mathbf{m}_t \quad \mathbf{t}_t \} \quad (12)$$

式中:角标 f, w, t 分别代表机身、机翼和尾翼,而角标 s 代表对称情况。

然后,我们把机翼及尾翼从根部切开,再把在这种情况下作用在机身、机翼和尾翼上的载荷按序排列成列阵,并用带角标 0 的 P_0^s 来标记,则根据平衡条件,有

$$P_0^s = A^s P^s, \quad (13)$$

式中:

$$A^s = \begin{bmatrix} E_f & e_{if} e_w^T & & & e_{if} e_t^T & & \\ & E_f & \sin \Lambda_w e_{if} y_w^T & \sin \Lambda_w e_{if} e_w^T & -\cos \Lambda_w e_{if} e_w^T & \sin \Lambda_t e_{if} y_t^T & \sin \Lambda_t e_{if} e_t^T & -\cos \Lambda_t e_{if} e_t^T \\ & & E_w & & & & & \\ & & & E_w & & & & \\ & & & & E_w & & & \\ & & & & & E_t & & \\ & & & & & & E_t & \\ & & & & & & & E_t \end{bmatrix},$$

E 是单位矩阵;

e 是元素均为 1 的列阵; e_i 或 e_j 是第 i 或 j 个元素为 1 而其余均为 0 的列阵, i 和 j 分别是机身上连接机翼及尾翼的站数;

Λ_w 及 Λ_t 分别是机翼及尾翼的后掠角;

y 是列阵 $\{y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n\}^T$ 。

如果我们再进一步把机身、机翼及尾翼等分割成一系列的元件梁,并把这些元件梁所受的载荷也按序列成列阵,用 Q 来标记,则根据式(2)及式(10),有

$$Q^s = B^s P_0^s = B^s A^s P^s, \quad (14)$$

式中: Q^s 是列阵 $\{M_f \ M_w \ T_w \ M_t \ T_t\}^T$;

$$B^s = \begin{bmatrix} B_m & & \\ & B_w & \\ & & B_t \end{bmatrix}。$$

于是,全机在对称受载时的柔度矩阵 F^s 可写成

$$F^s = A^{sT} B^{sT} f^s B^s A^s \quad (15)$$

$$\text{式中: } f^s = \begin{bmatrix} f^a & & \\ & f^w & \\ & & f^t \end{bmatrix}。$$

我们注意到, F^s 的头二行和头二列的元素均为 0, 所以它是一个半定正的矩阵, 当抽去它的头二行和头二列元素后, 即可得出一对称正定的矩阵。

2.5 后掠飞机反对称受载时的全机柔度矩阵

在飞机反对称振动时, 机身除了承受作用在本身上的扭转载荷以外, 还将承受来自机翼和尾翼的载荷。按照与上节同样的推导方法, 可导出对应于反对称载荷列阵 P^a 的全机柔度矩阵 F^a 如下

$$F^a = A^{aT} B^{aT} f^a B^a A^a \quad (16)$$

以上 P^a 是列阵 $\{t_{0f} \ Z_w \ m_w \ t_w \ Z_t \ m_t \ t_t\}^T$ 。

$$A^a = \begin{bmatrix} E_f & \cos A_w e_{if} y_w^T & \cos A_w e_{if} e_w^T & \sin A_w e_{if} e_w^T & \cos A_t e_{jf} y_t^T & \cos A_t e_{jf} e_t^T & \sin A_t e_{jf} e_t^T \\ & E_w & & & & & \\ & & E_w & & & & \\ & & & E_w & & & \\ & & & & E_t & & \\ & & & & & E_t & \\ & & & & & & E_t \end{bmatrix}$$

$$B^a = \begin{bmatrix} \Sigma_f \\ & B_w \\ & & B_t \end{bmatrix}; \quad f^a = \begin{bmatrix} f^0 \\ & f^w \\ & & f^t \end{bmatrix}$$

角标 a 代表反对称情况。

同样,我们也注意到, F^a 的第一行和第一列的元素均为零,所以也是一个半定正的矩阵,当抽去其第一行和第一列的元素后,也可得到一个对称正定的矩阵。

3 自由-自由振动时的动力矩阵

由于描述对称或反对称振动情况的矩阵公式在形式上是一致的,所以在下面的推导过程中采用了统一的矩阵符号。当把代表对称或反对称的各个矩阵元素代入时,即可得到相应的结果。

如果我们把对应于外载荷列阵 P 的绝对位移变量也列成列阵,并用 W 来标记,则在对称振动时

$$W^s \text{ 是列阵 } \{\omega_{0f} \quad \varphi_{0f} \quad \omega_w \quad \varphi_w \quad \theta_w \quad \omega_t \quad \varphi_t \quad \theta_t\}^T \quad (16)$$

而在反对称振动时

$$W^a \text{ 是列阵 } \{\theta_{0f} \quad \omega_w \quad \varphi_w \quad \theta_w \quad \omega_t \quad \varphi_t \quad \theta_t\}^T \quad (17)$$

其中: ω, φ, θ 分别代表由各站(i)的线位移 w_i 、转角 φ_i 及扭角 θ_i 按序列构成的列阵,带有角标 0 者表示 i 自 0 到 n ,而不带角标 0 者表示 i 自 1 到 n 。

于是,在自由振动时,由振动而产生的惯性力列阵可写成

$$P = \omega^2 M W, \quad (18)$$

式中: ω 是振动的圆周频率。

$$M^s = \begin{bmatrix} m_{0f} \\ & m_w \\ & & m_t \end{bmatrix}; \quad M^a = \begin{bmatrix} I_{y0f} \\ & m_w \\ & & m_t \end{bmatrix}$$

而

$$m_{0f} = \begin{bmatrix} m & s_x \\ s_x & I_x \end{bmatrix}_{0f}; \quad m_{w,t} = \begin{bmatrix} m & s_x & s_y \\ s_x & I_x & I_{xy} \\ s_y & I_{xy} & I_y \end{bmatrix}_{w,t}$$

式中: $m, s_x, \dots, I_y$ 等分别代表由各站(i)上质量块的质量 m_i 、绕 x 轴的静质矩 s_{xi} 及绕 y 轴的转动惯量 I_{yi} 等按序组成的对角矩阵(图 4)。

如果用 W^* 代表振动时相对于连接在机身头部拘束上并随之一起运动的坐标系的相对位移变量列阵,则利用全机的柔度矩阵,我们有

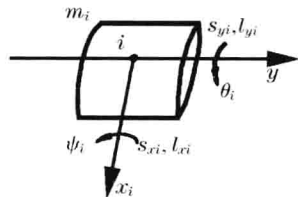


图 4

$$\mathbf{W}^* = \omega^2 \mathbf{F} \mathbf{M} \mathbf{W} \quad (19)$$

而在绝对位移变量 $\mathbf{W}$ 和相对位移变量 $\mathbf{W}^*$ 之间存在有下列关系

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^* + \mathbf{R} \mathbf{Z} \quad (20)$$

其中第二项代表由于放松机身头部的拘束而引起的飞机刚体运动,即是

$$\mathbf{Z}^s = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}_f; \quad \mathbf{Z}^a = \boldsymbol{\theta}_{0f}$$

$$\mathbf{R}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_f & \mathbf{y}_f \\ 0 & \mathbf{e}_f \\ \mathbf{e}_w & \mathbf{y}_{if}\mathbf{e}_w + \sin\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{y}_w \\ 0 & \sin\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{e}_w \\ 0 & -\cos\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{e}_w \\ \mathbf{e}_t & \mathbf{y}_{jf}\mathbf{e}_t + \sin\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{y}_t \\ 0 & \sin\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{e}_t \\ 0 & -\cos\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{e}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_1} \end{bmatrix}_f; \quad \mathbf{R}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_f \\ \cos\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{y}_w \\ \cos\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{e}_w \\ \sin\boldsymbol{\Lambda}_w\mathbf{e}_w \\ \cos\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{y}_t \\ \cos\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{e}_t \\ \sin\boldsymbol{\Lambda}_t\mathbf{e}_t \end{bmatrix}$$

式中: l_{1f} 为机身头二站的间距。

为了消去 $\mathbf{Z}$, 我们可以利用在自由—自由振动时的全机平衡条件

$$\omega^2 \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{W} = 0 \quad (21)$$

利用条件式(21), 将式(20)二边均左乘以 $\mathbf{R}^T \mathbf{M}$, 经移项整理后可得

$$\mathbf{Z} = -(\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{W}^*$$

再把结果代入式(21), 得到

$$\mathbf{W} = (\mathbf{E} - \mathbf{R}(\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{M}) \mathbf{W}^* \quad (22)$$

由于 $\mathbf{M}$ 是定正矩阵, 故逆矩阵 $(\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1}$ 恒存在。将式(22)代入式(19), 即得

$$\mathbf{W}^* = \omega^2 \mathbf{F} \mathbf{M}^* \mathbf{W}^* \quad (23)$$

式中: $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} - \mathbf{M} \mathbf{R}(\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{M}$ 。

公式(23)即是曾由 Jennings^[10]得出的, 通过相对振动位移变量来求解结构自由—自由振动问题的一般矩阵公式。如果将式(19)代入式(22), 则得

$$\mathbf{W} = \omega^2 (\mathbf{E} - \mathbf{R}(\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{M}) \mathbf{F} \mathbf{M} \mathbf{W} \quad (24)$$

这是曾由 Scanlan^[11]等得出的, 通过绝对振动位移变量来求解结构自由—自由振动问题的一般矩阵公式。如果在式(24)二边左乘以 $\mathbf{M}$, 并利用式(18)的关系, 又可得到

$$\mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{M}^* \mathbf{F} \mathbf{P} \quad (25)$$

可以把式(25)看作是通过振动惯性力变量来求解结构自由—自由振动问题的一般矩阵公式。

显然, 方程(23), (24), (25)是通过变换式(18), 式(19)及式(22)相互联系起来的, 所以它们将具有相同的特征值, 而在对应的特征向量之间将具有如式(18), 式(19)及式(22)等所示的变换关系。下面为了方便起见, 我们将式(23)、式(24)、式(25)写成统一的形式如下

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{x}, \quad (26)$$

式中: $\lambda = 1/\omega^2$ 。

当从方程(19)及式(21)直接求解时, 显然

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad \omega = 0 \quad (27)$$

是问题的解答, 这即是自由结构的刚体运动模态, 其对应的频率为零。式(27)中 $\mathbf{a}$ 是常数列阵, 其

阶数则与刚体自由度的个数相同,可以根据初始条件定出。

由于在导出式(23)、式(24)、式(25)等时,我们已利用平衡条件消去了全部刚体模态,其结果是将质量矩阵 $\mathbf{M}$ 转化为新的质量矩阵 $\mathbf{M}^*$,而后者却是半正定的矩阵,即是

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}^* \mathbf{R} \equiv 0. \quad (28)$$

这意味着对应于刚体模态的广义质量已被转化为零。因此,对应的频率也将从零转化为无穷大。于是,在用迭代法求解这些方程时,其结果将直接向频率最低的弹性振动模态收敛。

至此,求解结构自由—自由振动频率与模态的问题就归结为求解方程(23)、(24)、(25)中的一个。其中,式(23)是计算工作量最小的一种,但不能直接得出用绝对位移变量来表示的模态;式(24)的计算工作量要大一些,但可直接得到最终结果;而当 $\mathbf{M}$ 是对角矩阵的情况下,使用式(25)可能是最有利的。

4 动力矩阵的求解

4.1 正交条件

如果 $\mathbf{F}$ 矩阵中由零元素所组成的行和列,则它是一正定矩阵,因而可分解成

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \mathbf{G}^T \quad (29)$$

式中: $\mathbf{G}$ 可以是一个实数的三角矩阵,且具有与 $\mathbf{F}$ 相同的零元素行和列。于是,式(25)可改写成

$$\mathbf{G}^T \mathbf{P} = \omega^2 \mathbf{G}^T \mathbf{M}^* \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{P}) \quad (30)$$

由于矩阵 $(\mathbf{G}^T \mathbf{M}^* \mathbf{G})$ 是半正定对称矩阵,所以, ω^2 除了具有无穷大的解以外,其余的解均为正实数,因而对应的特征向量也将是实数向量。这种结果反映了无阻尼系统自由振动的特点,即振动是谐和的,并且,振动只能处于同相或反相的情况。同时,根据 $\mathbf{G}^T \mathbf{M}^* \mathbf{G}$ 的对称性可知,式(30)的第 i 次和第 j 次特征向量,必定满足下列正交条件

$$(\mathbf{G} \mathbf{P})_i^T (\mathbf{G} \mathbf{P})_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (31)$$

$$\text{即} \quad \mathbf{P}_i^T \mathbf{F} \mathbf{P}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (32)$$

利用式(18)、式(19)、式(21)、式(22)等式,又可自式(32)引出

$$\mathbf{W}_i^T \mathbf{M} \mathbf{F} \mathbf{W}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (33)$$

$$\mathbf{W}_i^{*T} \mathbf{M}^* \mathbf{W}_j^* \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (34)$$

$$\mathbf{W}_i^T \mathbf{M} \mathbf{W}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_i^T \mathbf{M} \mathbf{P}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (36)$$

下面为了方便起见,我们将正交条件式(32)~式(36)写成统一的形式如下

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{H} \mathbf{X}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (37)$$

$$\text{或} \quad \mathbf{h}_i^T \mathbf{X}_j \equiv 0 \quad (i \neq j) \quad (38)$$

式中: $\mathbf{h}_j = \mathbf{H} \mathbf{X}_j$ 。

4.2 “扫去矩阵”

当以任意的初始向量用迭代法求解(26)式时,其结果首先将向对应于最大特征值 λ_1 (或最小振动频率 ω_1) 的特征向量 $\mathbf{x}_1$ (振动模态) 收敛。在求解高音频率及特征向量时,可以应用 Flenen-hoft^[12] 提出的方法,即是利用“扫去矩阵”扫去每次迭代向量中的全部低音特征向量的分量,这样迭代结果就会向频率最低的高音频率及特征向量收敛。例如,在求第二次特征向量时,我们可以先立

出“扫去矩阵” s_1 ,其最简单的形式可以取为

$$s_1 = E^1 + e_i s_1 \quad (39)$$

式中: $E^1 = E - E_i$, E_i 是第 i 个对角元素为 1 而其余元素均为零的对角矩阵;

s_1 是待求的未知行阵。

这样,任何向量 α 与它相乘后的结果,除了第 i 个元素将发生变化外,其余元素均保持不变。如果我们使这样变化的结果恰巧能使下列正交条件

$$h_1^T s_1 \alpha = 0 \quad (40)$$

得以成立,即是使乘积 $s_1 \alpha$ 中将不包含有 x_1 的分量,那么对方程

$$\lambda x = D s_1 x \quad (41)$$

进行迭代计算的结果,就会向第二次特征向量 x_2 收敛。把式(39)代入式(40),得到

$$h_1^T (E^1 + e_i s_1) \alpha = 0$$

由此可把 s_1 选为

$$s_1 = - (h_1^T e_i)^{-1} h_1^T E^1$$

于是“扫去矩阵” s_1 最终可选为

$$s_1 = (E - (h_1^T e_i)^{-1} e_i h_1^T) E^1 \quad (42)$$

式中: $h_1^T e_i$ 是 h_1 中的第 i 个元素,可以称之为“枢轴件”,一般应取 h_1 中有效位数最多且数值较大的元素为之。按照同样的概念^[13],当已求出头 r 阶模态而欲求第 $r+1$ 阶模态时,我们可利用下式求解

$$\lambda x = D s_1 s_2 \cdots s_r x \quad (43)$$

$$\text{式中: } s_r = [E - (h_r^T s_{r-1} e_k)^{-1} e_k h_r^T s_{r-1}] E^r; \quad (44)$$

$$E^r = E^{r-1} - E_k;$$

k 是枢轴件($h_r^T s_{r-1} e_k$)在行阵 $h_r^T s_{r-1}$ 中的序号,也应选取有效位数及数值较大的元素为之。

应用这种方法的优点在于可以逐次降低动力矩阵的阶数,并且直接得出所需的特征向量而无须转换,当选择适当的枢轴件时,将有利于延缓有效数字的衰减和舍入误差的积累。

其他求解高频率及特征向量的方法在文献[14]中是有较详细的讨论。

5 数值例题^[13]

我们计算了一个由(60mm×2mm)铝条固接而成的简单后掠飞机模型自由—自由对称振动的头二次频率及模态,并且和微分方程解作了比较。模型的数据如下:

机身长度:60cm;

机翼长度:40cm;

尾翼长度:15cm;

机尾翼后掠角:30°;

抗弯刚度:2880×9.8 N·cm²;

抗扭刚度:4320×9.8 N·cm²;

单位长度质量:3.36×10⁻³/g kg·s²/cm²;

单位长度绕 y 轴的转动惯量:10.08×10⁻³/g kg·s²;

$g = 980 \text{ cm/s}^2$ 。

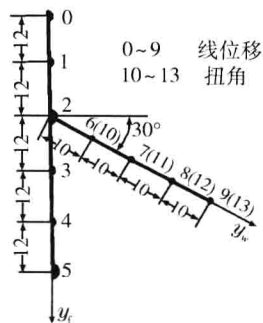


图 5