普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学学习指导 下册

第二版

经济类

吕 雄◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

第二版
下 册

高等数学学习指导

经济类

吕雄 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导．下册 / 吕雄主编．—2 版．—北京：中国农业出版社，2013.8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17988-2

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吕…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 174855 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100125）

策划编辑　朱　雷　魏明龙

文字编辑　甘敏敏

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2009 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 2 版

2013 年 8 月第 2 版北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：14.25

字数：248 千字

定价：25.00 元

内容提要

本书是普通高等教育农业部“十二五”规划教材《高等数学》（经济类专业用）的配套教材。分上、下两册出版，下册内容为：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程。本书从高等数学的教学目的与要求、知识结构、题型分析和典型例题等方面作了具体分析指导，有助于增强正确理解和掌握数学知识的能力与水平；每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以巩固和提高所学内容，检测对知识的掌握情况；最后还对主教材中的习题作了详细解答，有助于学生学习。

本书内容具有相对独立性，可作为习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书。

编写人员名单

主　编　吕　雄

副主编　白树叶　戴云仙

编　者　（按姓名笔画排序）

白树叶　吕　雄　朱艳霞　杨丽英

吴国荣　姚贵平　高　莲　戴云仙

第二版前言

本书第二版是普通高等教育农业部“十二五”规划教材暨全国高等农林院校“十二五”规划教材经济类《高等数学》(第二版)的配套教材。

本书第一版是全国高等农林院校“十一五”规划教材经济类《高等数学》的配套教材。

随着高等农林院校人才培养方案的修订，经济类《高等数学》课程的教学大纲与教学计划有较大变化，课程性质从公共基础课(必修)调整为公共基础课(必修)+拓展课(选修)，公共基础课的教学时数减少幅度较大，教学内容及教学要求需做出相应的调整，同时也要兼顾课程的科学性、系统性，还要考虑学生考研的需求。本学习指导书第二版是在第一版的基础上，结合配套教材第二版修订而成。

参加本书第二版修订工作的仍为第一版编写团队。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2013年5月

第一版前言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材《高等数学》(经济类专业用)的配套教材。分上、下两册出版，上册内容为：函数、极限与连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册内容为：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数、微分方程。

高等数学是高等院校经济类等各专业学生必修的重要基础理论课之一，理解并掌握好高等数学的基础知识、基本理论、基本运算及分析方法，对后继课程的学习以及学生基本素质与数学素养的提高有着极其重要的作用，对其今后的发展与提高有着深远的影响。

本书可作为高等学校经济类专业、管理类专业或其他一些专业的习题课教材，也可作为教师教学参考书和学生学习高等数学及考研的指导书。

编写过程中，在内容的安排上我们主要基于下述几点：

一、教学目的与要求和知识概要 通过各章的教学目的与要求、知识概要，用很短的时间了解教学要求和主要内容，以便于理解、记忆、掌握、巩固所学知识及各知识点间的联系。

二、题型分析和典型例题 通过题型分析和典型例题的精解，弄清分析问题和解决问题的过程，了解重点和难点，解决疑难问题，培养学生用数学的思想和方法分析问题、解决问题的能力。

三、自测题 每章都配有自测题，所选题型全面、分类合理、题量适中，以检测对知识的掌握情况，发现不足，进一步巩固和提

高所学知识。

四、习题解答 对原教材中的习题作了详细解答，有助于学生的学习。

参加本书编写工作的是具有丰富教学经验的一线教师，其中第一章由杨丽英编写，第二章由吴国荣编写，第三章由戴云仙编写，第四章和第八章由朱艳霞编写，第五章由吕雄编写，第六章由白树叶编写，第七章由姚贵平编写，第九章和第十章由高莲编写。全书编写大纲及统稿由吕雄完成。

由于编者水平有限，不足、疏漏、错谬之处在所难免，敬请专家、同行和读者批评指正。

编　者

2009 年 5 月

目 录

第六章

向量代数与空间解析几何

第一节　教学目的与要求

1. 了解向量概念及线性运算，掌握空间直角坐标系，利用坐标作向量的线性运算，理解向量的模、方向角．

2. 了解数量积、向量积的概念．掌握数量积、向量积的计算．了解向量混合积的概念和计算．

3. 了解平面方程的定义．掌握平面的点法式方程、一般方程，两平面的夹角，理解平面的其他方程．

4. 了解空间直线方程的定义．掌握空间直线的对称式方程及参数方程，两直线的夹角，直线与平面的夹角．理解空间直线的其他方程．

5. 了解曲面的概念．掌握方程 $F(x, y, z)=0$ 所确定的曲面图形．理解建立曲面方程．

6. 了解曲线的概念．掌握空间曲线在坐标面上的投影．理解建立曲线方程.

第二节　本章概要

一、向量及其线性运算

1. 空间直角坐标系　过空间一定点 O，作三条相互垂直的数轴，依次记为 x **轴**(**横轴**)、y **轴**(**纵轴**)、z **轴**(**竖轴**)，统称为**坐标轴**．它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$，空间直角坐标系有右手系和左手系两种．我们通常采用右手系．

2. 空间两点间的距离　已知点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

3. 向量的定义

(1) 向量：既有大小，又有方向的量称为向量，表示方法有$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\vec{a}$

或 $\boldsymbol{a}$.

(2) 向量的模：向量的大小或向量的长度，记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$|\vec{a}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

(3) 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量.

(4) 零向量：模为 0 的向量称为零向量，通常记作 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$(注：零向量的方向是任意的).

(5) 负向量：与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反，模相等的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

(6) 向量相等：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且模相等即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$. 在此意义下，通常的向量都是自由向量.

4. 向量的线性运算

(1) 加减法：向量的加、减法遵循平行四边形法则或三角形法则.

规定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 数乘(数乘向量)：数量 λ，向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 仍然是向量，且当 $\lambda\neq0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{a}$，

$$\lambda\boldsymbol{a}=\begin{cases}\text{与 }\boldsymbol{a}\text{ 同向}, & \lambda>0,\\ \boldsymbol{0}, & \lambda=0,\\ \text{与 }\boldsymbol{a}\text{ 反向}, & \lambda<0,\end{cases}\quad |\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\begin{cases}\lambda|\boldsymbol{a}|, & \lambda\geqslant0,\\ -\lambda|\boldsymbol{a}|, & \lambda<0.\end{cases}$$

(3) 向量线性运算的规律：

交换律与结合律(加法)：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

结合律与分配律(数乘)：

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};\ (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

5. 向量的坐标运算 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),\ \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z);$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z;$$

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda.$$

注：如果 $a_x=0$，则应理解为也有 $b_x=0$.

6. 向量的模、方向余弦的计算 设向量为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$，且 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量的模即为 M_1 与 M_2 两点之间的距离，故

$$|\boldsymbol{a}|=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

或当向量写为 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$时，则

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\ \cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由此可知 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

7. 向量的数量积(点积、内积)

(1) 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，其夹角为 θ，称数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$,也称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积，读作 $\boldsymbol{a}$ 点乘 $\boldsymbol{b}$.

(2) 性质：

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

② 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

③ 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

④ 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

⑤ 点积的坐标运算：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

⑥ 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

8. 向量的向量积(叉积，外积)

(1) 设有向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，定义一个新的向量 $\boldsymbol{c}$，使其满足

① $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

② $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的方向从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 按右手系确定，称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作 $\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$.

(2) 性质：

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

② $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.(这说明交换律对向量积不成立)

③ 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

④ 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

⑤ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的坐标计算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

⑥ 设 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$与 $\boldsymbol{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$均为非零向量，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z},$$

即 $a_yb_z-a_zb_y=0$，$a_xb_z-a_zb_x=0$，$a_xb_y-a_yb_x=0$，整理得$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

9. 向量的混合积

(1) 设有向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，称数量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积 .

(2) 向量的混合积坐标计算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z)$，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面$\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$.

二、平面方程

1. 平面的点法式方程 与平面垂直的向量称为平面的法向量，记作 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

已知过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$的平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\cdots\cdots\cdots\cdots \text{平面 } \Pi \text{ 的点法式方程}.$$

2. 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0\cdots\cdots\cdots\cdots \text{平面 } \Pi \text{ 的一般方程}.$$

(1) $Ax+By+Cz+D=0$ 中 x，y，z 的系数恰好是平面法向量的坐标 A，B，C；

(2) 平面方程的特点是三元一次线性方程，而且任何一个三元一次线性方程表示的均是平面；

(3) 在平面的一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，A，B，C，D 四个数只有三个是独立的 . 法向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标不可能同时为零 . 不妨设 $A\neq0$，则可将方程改写为 $x+\dfrac{B}{A}y+\dfrac{C}{A}z+\dfrac{D}{A}=0$，或记为 $x+B^*y+C^*z+D^*=0$. 因此建立平面的一般方程只需要三个独立的条件 .

3. 几类特殊位置的平面方程

(1) 过原点的平面：

$$Ax+By+Cz=0.$$

(2) 平行于坐标轴的平面：

平行于 x 轴的平面　$By+Cz+D=0$；

平行于 y 轴的平面　$Ax+Cz+D=0$；

平行于 z 轴的平面　$Ax+By+D=0$.

(3) 经过坐标轴的平面：

过 x 轴的平面 $By+Cz=0$；过 y 轴的平面 $Ax+Cz=0$；过 z 轴的平面 $Ax+By=0$.

(4) 平行于坐标面的平面：

平行于 yOz 坐标面的平面方程为 $x=a$，$x=0$ 为 yOz 坐标面的方程；

平行于 xOz 面的平面 $y=b$，xOz 面 $y=0$；

平行于 xOy 面的平面 $z=c$，xOy 面 $z=0$.

4. 平面的三点式方程　已知平面过不共线三点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，则此平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{平面的三点式方程}.$$

5. 平面的截距式方程　已知平面过三点 $M_1(a, 0, 0)$，$M_2(0, b, 0)$，$M_3(0, 0, c)$，则此平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots \text{平面的截距式方程},$$

其中 a，b，c 依次为平面在 x，y，z 轴上的截距.

6. 平面之间的夹角

(1) 设 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

$$\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

(2) $\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

(3) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

7. 点到平面的距离公式　设平面为 Π：$Ax+By+Cz+D=0$，$P_0(x_0, y_0, z_0)$是平面外的一点，P_0 到平面 Π 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

三、直线方程

1. 直线的点向式方程　与已知直线平行的向量 $\boldsymbol{s}$ 称为直线的方向向量，

通常记作 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$. 设空间有一定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，过 M_0 平行于向量$\boldsymbol{s}=(m, n, p)$的直线方程

$$L: \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{直线的点向式或对称式方程}.$$

注：(1) 若 m, n, p 中有一个为零，如 $p=0$，则

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}, \\ z-z_0=0, \end{cases} \text{或} L: \begin{cases} nx-my-nx_0+my_0=0, \\ z-z_0=0. \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{两个平面的交线};$$

(2) 若 m, n, p 中有两个为零，如 $n=0, p=0$，则

$$L: \begin{cases} y-y_0=0, \\ z-z_0=0. \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{平面 } y=y_0 \text{ 与 } z=z_0 \text{ 的交线}.$$

2. 直线的参数式方程

$$L: \begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{直线的参数式方程，} t \text{ 为参数}.$$

3. 直线的一般方程(两平面的交线)　直线 L 可以视为两张不平行平面的交线，故直线的一般方程为

$$L: \begin{cases} \Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} (\boldsymbol{n}_1 \not\parallel \boldsymbol{n}_2).$$

4. 直线的两点式方程　已知直线过两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则此直线的方程为

$$L: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \cdots\cdots\cdots\cdots \text{直线的两点式方程}.$$

5. 两条直线的夹角 $\theta\left(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) 设直线 L_1 与 L_2 的夹角为 θ

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

由此不难得出以下结论：

(2) $L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

(3) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

6. 直线与平面的位置关系

(1) 直线与平面的夹角 $\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}};$$

(2) $L /\!/ \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$;

(3) $L \perp \Pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$.

四、空间的曲面以及方程

1. 球面　动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离恒为常数 R，此动点的轨迹称为球面，其方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 称为球心，R 称为球的半径．

特例：(1) 以原点为球心，R 为半径的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

(2) 球面的一般方程：$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$，特点是方程中没有交叉项 xy、yz、zx，与平行于坐标轴的平面的截面均为圆，三个平方项 x^2，y^2，z^2 的系数一定相同．

2. 旋转曲面　设在 yOz 平面上有一条平面曲线为 C：$f(y, z)=0$，将此曲线绕 z 轴旋转一周，所得的曲面称为旋转面，z 轴称为旋转轴，C 称为母线. 所得的旋转曲面方程为

$$\Sigma: f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0.$$

注意到此时，z 不变，而 $y\to\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 或 $y^2\to x^2+y^2$；

同理，若将上面的曲线绕 y 轴旋转一周，则旋转面的方程为

$$\Sigma: f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

此时，y 不变，而 $z\to\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 或 $z^2\to x^2+z^2$.

特点：(1) 总有两个平方项系数相同；(2) 垂直于旋转轴的平面与曲面的截口均为圆．

3. 柱面(母线平行于坐标轴的柱面)　平行于定直线并沿定曲线 C 移动的动直线 L 形成的轨迹称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线．

注：一般，给定一柱面后，其母线是确定的，但其准线是不唯一的，即柱面的任意一条曲线都可能成为柱面的准线．

准线为 xOy 平面上的曲线 L：$f(x, y)=0$，母线平行于 z 轴的柱面 Σ 的方程

$$f(x, y)=0.$$