现代数学译丛 25

算子理论的Banach代数方法

(原书第二版)

〔美〕Ronald G. Douglas 著

颜 军 徐胜芝 舒永录 蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

科学出版社

现代数学译丛 25

算子理论的 Banach 代数方法

(原书第二版)

〔美〕 Ronald G. Douglas 著

颜 军 徐胜芝 舒永录
蒋卫生 郑德超 孙顺华 译

科学出版社
北京

图字：01-2013-2618 号

内 容 简 介

本书是著者在(美国)密歇根大学 1968 年一门春季课程和(美国)纽约州立大学石溪分校 1969—1970 学年课程的讲稿基础上形成的，全书分七章．第 1 章介绍 Banach 空间及其对偶理论，其中基本结果有 Hahn-Banach 定理和开映射定理等．第 2 章涉及交换 Banach 代数的初等理论及其应用，如 Gelfand 变换及其对于 Fourier 级数收敛性的一个应用，其方法对于本书以后各章中算子理论的研究是极为本质的．第 3 章简单介绍了 Hilbert 空间与其几何理论，这包括 Pythagoras 定理和正交基方法．第 4 章介绍 Hilbert 空间上算子和正规算子的谱定理，引入了 C^*-代数概念并将此贯穿地用于该章的后半部分．第 5 章讨论了紧算子与 Fredholm 算子以及相关 C^*-代数．第 6 章讨论了 Hardy 空间理论中若干论题，如 Beurling 定理和内外因子分解方法．第 7 章研究了 Toeplitz 算子理论，其中包括了谱包含定理和本质谱连通性的 Widom 定理．

全书层次分明、论述严谨，具有较强的系统性和思想性，可作为高等学校数学专业高年级本科生和基础数学研究生的参考书，也可作为泛函分析方向研究生的教材．

Translation from English language edition: *Banach Algebra Techniques in Operator Theory* by Ronald G. Douglas
Copyright©1998 Springer New York Springer
New York is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

图书在版编目（CIP）数据

算子理论的 Banach 代数方法(原书第二版)/(美) 道格拉斯(Douglas, R. G.)著；颜军等译．—北京：科学出版社，2014.3
(现代数学译丛；25)
书名原文：Banach Algebra Techniques in Operator Theory (Second Edition)
ISBN 978-7-03-039887-1

Ⅰ. ①算… Ⅱ. ①道… ②颜… Ⅲ. ①巴拿赫空间-线性算子理论
Ⅳ. ①O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 037057 号

责任编辑：徐园园 赵彦超／责任校对：郑金红
责任印制：赵德静／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 3 月第一次印刷 印张：13
字数：237 000

定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

谨以此中文译本献给著者的太太 Bunny,

她随著者几次访问了中国

Preface to the Chinese Edition

Mathematics has been discovered and created over the millennia through the contributions of many different cultures, which are woven into one fabric. Although the origins of operator theory and functional analysis lie in Europe and America, researchers from China and other countries have joined the effort to understand these key areas of analysis. I am gratified by whatever role my book has played in this development and hope the translation will facilitate the entry of new generations of students into this field.

During one of my earlier visits to China, I was flattered that several young mathematicians asked me to autograph their copies of my book. May this note serve as an autograph for the owners of this copy and convey my best wishes to them for their study of mathematics.

During the translating of this book, several additional lapses were noted and corrected. The author wants to thank the translators and Dr. Xu Shengzhi for their meticulous efforts.

Ronald G. Douglas

Written during my visit to Fudan University,
Shanghai, July 2013

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

中文版序言

在几千年不断发现数学真谛和创建数学王国的历史中，多个不同的文明都做出了贡献，是它们共同编织了数学这幅瑰丽彩锦．尽管算子理论和泛函分析起源于欧洲和美国，但来自中国和其他国家的研究者也参与了分析中这些关键领域的探索．倘若拙著在这个发展过程中曾起到些许促进作用，我将深感欣慰，同时希望该中文译本能对初涉此领域的学习者们有所帮助．

在我较早一次对中国的访问中，几位中国年轻数学家曾请我在他们持有的拙著复印本上签名留念，这使我感到很荣幸．但愿这中文版序言能作为我给这个中译本所有持有者的签名，并借此转达我对于他们从事数学研究的美好祝愿．

在翻译过程中，本书中多处错误和疏忽被发现并得以纠正．几位翻译者和徐胜芝博士的工作认真细致，我在此想对他们表示感谢．

Ronald G. Douglas

写于访问上海复旦大学期间

2013 年 7 月

序　　言

算子理论是数学的一个重要分支, 它对于微分方程、调和分析和控制理论, 以及对于微分几何、理论物理和其他一些学科都有深刻应用.

Ronald G. Douglas 是当今算子理论界的领袖人物. 他的代表作是与 L. G. Brown 和 P. A. Fillmore 关于本质正规算子的 BDF 理论, 这一理论不但解决了本质正规算子的分类问题而且建立了 K- 同调理论, 这也是 Alain Connes 的非交换几何的奠基石之一. Douglas 的工作还建立了算子理论和其他数学领域的多方面联系, 这些数学领域包括函数论、几何、拓扑和微分算子的指标理论. 他的这些工作对算子理论产生了革命性的影响.

Ronald G. Douglas 对于中国算子理论界有深远影响. 他于 20 世纪 80 年代中期访问了成都、天津和北京, 并作了一系列讲座; 近年来他多次来上海, 也作了系列讲座.

Douglas 的书 *Banach Algebra Techniques in Operator Algebra* 是算子理论的经典著作. 这本书强调了算子代数和算子理论是相辅相成的, 它用算子代数方法将 Fredholm 算子理论和 Toeplitz 算子理论写得漂亮之极, 应是每位学习算子理论的学生的必读之物. 孙顺华教授、郑德超教授、舒永录教授、徐胜芝副教授、蒋卫生副教授和颜军老师把这本经典著作翻译成中文, 使更多读者领略到这本著作之优美, 这对于中国算子理论界是一大贡献.

郁国樑
上海数学中心
2013 年 1 月

第二版序言

自本书第一版问世后的四分之一世纪里, 在算子理论领域及本书涉及的这些论题方面已取得惊人的进展. 然而这次新版除了更正几处失误和打印错误外仍保持原样不变动. 虽然如此, 本版为读者提供了关于本书中以双星号标注的公开问题的现状的一个简要报告以及相关文献. 本版既未尝试概述在 Toepliz 算子及相关论题的研究中已取得的其他进展, 也未更新文献.

然而, 著者依然期望新一代大学生会从本书提供的算子理论引论中获益.

Ronald G. Douglas
德克萨斯, 卡城
1997 年 7 月

第一版序言

算子理论是数学科学中一个多姿多彩的领域, 它能从多个源头发掘出所考察对象的诸多启示和研究动力. 如同现代分析所经历的一样, 算子理论开始于上世纪①末对积分方程的研究. 它研究了来自物理、力学以及数学其他分支等多个领域中产生的算子和算子族, 并且它事实上已获得相当充分的发展而为自身提供了逻辑体系. 算子理论近期研究中若干专著的问世也验证了这一领域本身的力量和广度.

本书旨在讨论算子理论中某些前沿论题并为此提供必要的背景知识, 我们仅假设读者具备本科高年级和研究生一年级在点集拓扑、测度论和代数学方面的课程知识. 我们不期望论题面面俱到, 因而许多初等论题或者省略或者只在习题中提及. 我们旨在尽快得到主要结果.

本书开篇介绍 Banach 空间理论的基本结果以及众多相关例子. 第 2 章涉及交换 Banach 代数的初等理论, 其方法对于本书以后各章中算子理论的研究是极为本质的. 在以短篇介绍 Hilbert 空间几何之后, 算子理论的研究才算正式开始. 第 4 章研究 Hilbert 空间上算子并得到了谱定理的一个相当精巧的形式, 本章还引入了 C*- 代数概念并将此贯穿地用于该章的后半部分. 紧算子与 Fredholm 算子的研究以及相关 C*- 代数理想的某些辅助结果则在第 5 章中展开, 这章的处理方式有点反常规, 但它是现代算子理论发展过程所启示的.

最后两章与前面几章稍微有些不同, 这两章系统地介绍了 Toeplitz 算子理论的发展过程及近期研究成果. 近来这类算子已经吸引了不少数学家的注意, 并且出现于若干相当活跃的领域.

第 6 章对于 Hardy 空间理论中若干论题展开了研究, 它的选材是基于最后一章的需要, 而相关证明则是基于本书中前几章所得到的方法. 对于 Toeplitz 算子的研究在第 7 章展开. 人们熟知的大部分结果的标量情形均呈现于本章中, 其中有谱连通性的 Widom 定理.

在每章结尾都配有原始资料注记, 它提供了进一步阅读的材料并且标明了何时由谁证明了什么结果. 尽管在后面诸章中尽可能给出了一些重要结果的出处, 一些省略还是不可避免的. 同时, 缺乏参考文献的结果不能理解为著者所有.

另外, 在每章后面附有大量各种难度的习题, 这样做的目的是多方面的：让读者检验自己的理解程度; 提示现在容易理解理论的某些延伸内容; 提醒读者注意某

① 译注: 著者指 19 世纪

些相关结果, 带有提示或文献的证明应使读者意识到结果的重要性. 同时指出了一些尚未有解的问题, 这样的问题由双星号标注; 单星号标注的是有难度的习题.

Ronald G. Douglas
纽约, 石溪
1971 年 8 月

致 谢

本书源于密歇根大学 1968 年一门春季课程的一套讲稿, 该讲稿又于纽约州立大学石溪分校的 1969—1970 学年中再次使用过.

在本书写作过程中, 我得到许多人的帮助. 首先我要感谢 Bruce Abrahamse, 他做了原始笔记并且一直提出各种建议, 以及对于后面版本的写作部分进行了建设性批评. 此外, 我要感谢很多朋友和同事的诸多建议, 尤其是 Paul Halmos, Carl Pearcy, Pasquale Porcelli, Donald Sarason 和 Allen Shields, 我从他们那里学到了本书中提到的很多内容知识. 我要特别感谢 Berrien Moore III, 他阅读并指正了整个手稿, 同样要感谢 Joyce Lemen, Dorothy Lentz 和 Carole Alberghine 为打印这份手稿的各种版本所付出的劳动. 最后我要感谢美国科学基金会和 Alfred E. Sloan 基金会在本书写作过程中提供的各种资助.

Ronald G. Douglas
纽约, 石溪
1971 年 8 月

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　Banach 空 间

1.1　我们首先介绍一例最具代表性的 Banach 空间. 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间, 以 $C(X)$ 记 X 上所有连续复值函数构成的集合. 对于 $C(X)$ 中 f_1 和 f_2 及复数 λ, 我们定义:

(1) $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$;

(2) $(\lambda f_1)(x)=\lambda f_1(x)$;

(3) $(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$.

在这些运算下, $C(X)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上有单位元的交换代数.

因 X 是紧的, 其上每个连续函数 f 的值域都是 $\mathbb{C}$ 的一个紧集, 故 f 是有界的, 而 $|f|$ 的上确界便是有限的. 我们称该上确界为 f 的范数, 并且将它记为

$$\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in X\}.$$

易证该范数有下述性质:

(1) $\|f\|_\infty=0$ 当且仅当 $f=0$;

(2) $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty$;

(3) $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$;

(4) $\|fg\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|g\|_\infty$.

我们在 $C(X)$ 上定义一个度量$\rho:(f,g)\mapsto\|f-g\|_\infty$. 根据范数的上述性质 (1)—(3), 可直接得到 ρ 作为度量的如下特征性质:

(1) $\rho(f,g)=0$ 当且仅当 $f=g$;

(2) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$;

(3) $\rho(f,h)\leqslant\rho(f,g)+\rho(g,h)$.

易知相对于该度量的收敛恰是一致收敛. 该度量的一个重要性质是 $C(X)$ 依此度量完备.

1.2 命题　若 X 是紧 Hausdorff 空间, 则 $C(X)$ 是完备度量空间.

证明　设 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $C(X)$ 中一个 Cauchy 序列. 诸 $x\in X$ 使

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|_\infty=\rho(f_n,f_m),$$

因而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 是 Cauchy 复数序列, 如此可命 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. 我们需要证明 f 属于 $C(X)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_\infty=0$. 为此任给 $\varepsilon>0$, 取 N 使得 $n,m\geqslant$

N 蕴涵 $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. 任取 X 中一点 x_0, 有其邻域 U 使诸点 $x \in U$ 满足 $|f_N(x_0) - f_N(x)| < \varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned}|f(x_0) - f(x)| \leqslant & \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0) - f_N(x_0)| \\ & + |f_N(x_0) - f_N(x)| \\ & + \lim_{n\to\infty} |f_N(x) - f_n(x)| \leqslant 3\varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 f 在 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知 f 属于 $C(X)$. 进而对于 $n \geqslant N$ 和 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)| \\ &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leqslant \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. 于是 $C(X)$ 是完备的. ■

接下来我们定义 Banach 空间概念, 这将上述例子的典型性质进行了抽象. 在本章后面我们会明白每个 Banach 空间都同构于某个 $C(X)$ 的一个线性子空间.

1.3 定义 复线性空间 $\mathscr{X}$ 为 Banach 空间指其上有范数 $\|\cdot\|$ 使得

(1) $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$,

(2) $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$, 此处 λ 是复数而 f 属于 $\mathscr{X}$,

(3) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$, 此处 f 和 g 属于 $\mathscr{X}$,

且 $\mathscr{X}$ 按该范数导出的度量 $\rho : (f, g) \mapsto \|f - g\|$ 是完备的.

1.4 命题 设 $\mathscr{X}$ 是 Banach 空间, 则

由 $a(f, g) = f + g$ 定义的函数 $a : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是连续的;

由 $s(\lambda, f) = \lambda f$ 定义的函数 $s : \mathbb{C} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是连续的;

由 $n(f) = \|f\|$ 定义的函数 $n : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^+$ 是连续的.

证明 显然. ■

1.5 定向集与网 度量空间的拓扑可以用其中收敛序列的语言来描述. 对于更一般拓扑空间, 有必要引入广义序列的概念. 以后用收敛广义序列来描述拓扑将会带来很多方便, 因此我们有必要为读者回顾网的概念.

定向集 A 是具有下述性质的偏序集: 对于 A 中任意一对元素 α 与 β, 都有 A 中元素 γ 使 $\gamma \geqslant \alpha$ 且 $\gamma \geqslant \beta$. 网就是某个定向集 A 上一个函数 $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$. 若 λ_α 都落于某个拓扑空间 X, 则称这网在 X 中收敛至 λ 指对于 λ 的诸邻域 U, 都有 $\alpha_U \in A$ 使得当 $\alpha \geqslant \alpha_U$ 时, λ_α 落于 U. 空间 X 上两个拓扑相等当且仅当它们有相同收敛网. 最后, 空间 X 上拓扑也可通过事先规定收敛网来定义. 关于网和子网的更多知识, 读者可参阅文献 [71].

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com