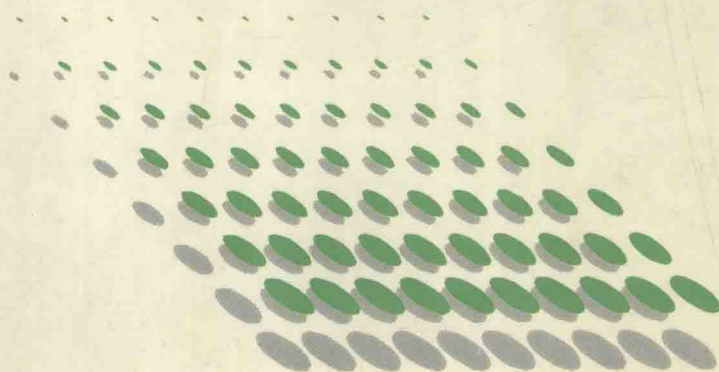


新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

上

高等数学基础

王喜斌 李占光 高兴 田智 主编
屈宏香 鲁印伦 主审



中国林业出版社
China Forestry Publishing House
www.cfph.com.cn



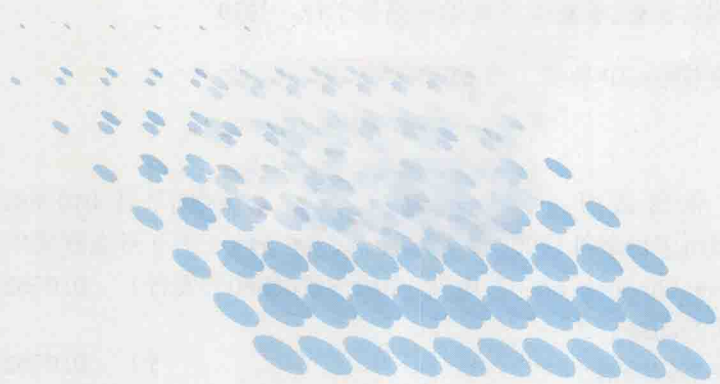
北京希望电子出版社
Beijing Hope Electronic Press
www.bhp.com.cn

新编21世纪高职高专公共课系列规划教材

上

高等数学基础

王喜斌 李占光 高兴 田智 主编
屈宏香 鲁印伦 主审



中国林业出版社
China Forestry Publishing House
www.cfph.com.cn



北京希望电子出版社
Beijing Hope Electronic Press
www.bhp.com.cn

内 容 简 介

本书共有 11 章, 内容包括函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 微分方程, 多元函数微积分, 无穷级数, 拉普拉斯变换, 矩阵及其应用, 概率与统计。每节后附有习题, 书后附有参考答案, 供读者查阅。

本书适合高职高专院校作为公共课的教材或参考书, 也可供有关人员参考。

需要本书或技术支持的读者, 请与北京清河 6 号信箱(邮编: 100085)发行部联系, 电话: 010-82702660 010-82702658 010-62978181 转 103, 传真: 010-82702698, E-mail: tbd@bhp.com.cn。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础 / 王喜斌, 李占光, 高兴, 田智主编. — 北京: 中国林业出版社; 北京希望电子出版社, 2006.7

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材

ISBN 7-5038-4530-9

I. 高... II. ①王... ②李... ③高... ④田...

III. 高等数学—高等学校: 技术学校—教材 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 083176 号

出版: 中国林业出版社 (100009 北京市西城区刘海胡同 7 号 010-66184477)

北京希望电子出版社 (100085 北京市海淀区上地 3 街 9 号金隅嘉华大厦 C 座 611)

网址: www.bhp.com.cn 电话: 010-82702660 (发行) 010-62541992 (门市)

印刷: 北京市东升印刷厂

发行: 全国新华书店经销

版次: 2006 年 7 月第 1 版

印次: 2006 年 7 月第 1 次

开本: 787mm×1092mm 1/16

印张: 21.25

字数: 486 千字

印数: 0001~4000 册

总定价: 45.00 元 (上下两册)

新编 21 世纪高职高专公共课系列规划教材编委会

主 任： 沈复兴 全国高等师范学校计算机教育研究会副理事长

北京师范大学信息科学学院院长

副主任： 熊伟建 广西职业技术学院副院长

唐汝元 湖南张家界航空职业技术学院副院长

刘小芹 湖北武汉职业技术学院副院长

刘南平 天津职业大学电子信息工程学院副院长

陆卫民 中国科学出版集团北京希望电子出版社社长

委 员： （按姓氏笔画为序）

邓泽银	田健龙	刘光明	刘晓魁	向长喜	朱国军	余俭敏
李节阳	杨大圣	周 平	周承华	欧阳广	罗文华	罗立红
胡红宇	胡远萍	赵征桥	徐刚强	彭 勇	曾凡秩	曾永和
曾庆柏	蔡朝曦	黎晓明	魏道德			

秘 书： 李节阳

本书编委会成员

主编：王喜斌 李占光 高兴 田智

主审：屈宏香 鲁印伦

编委：曾德军 吴磐献 周厚云 陈丽佳 周文洁 高兴

吴家强 成奋华 李宏萍 梁先宇 林生智 陈晓霞

朱焕桃 朱勇 李海军 张剑 黄任重 黄鹏辉

总 序

一本好书，是人生前进的阶梯；一套好教材，就是教学成功的保证。为满足培养应用型人才的需要，我们成立了本编委会。在明确高职高专应用型人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系的框架下，我们组织编写了本套规划教材。

为了使本套教材能够达成目标，编委会做了大量的前期调研工作，在广泛了解各高职高专的教学现状、学生水平、培养目标的情况下，认真探讨了课程设置，研究了课程体系。为了编写出符合教学需求的好教材，我们除了聘请一批有关方面的知名专家、教授作为本套教材的主审和编委外，还组织了一批具备较高的学术水平、丰富的教学经验、较强的管理实践能力的学术带头人和骨干教师来承担具体编写工作，从而编写出特色鲜明、适用性强的教材，以真正满足目前高职高专应用型人才培养的需要。教材编写采用整体规划、分步实施、在实践中检验提高的方式，分期分批地启动编写计划。编写大纲以及教材编写方式的确定均经过编委会多次认真讨论，以确保该套教材的高质量和实用性。

本套规划教材的主要特点是：

(1) 以服务教学为最高宗旨，认真做好教学内容的取舍、教学方法的选取、教学成果的检验工作。本套教材在教学过程中的有益反馈，都将及时体现在后续版本。

(2) 充分考虑高职高专的人才培养目标，充分吸取已有教材的优点，并注意有所创新。在阐述好基本理论的基础上，突出务实；努力做到内容新颖，科学规范，结构严谨，理论联系实际。

(3) 教材中注意结合当前的具体问题做出分析，使学生能比较熟练地应用所学知识解决实际问题；从而努力做到既注重培养学生分析问题的能力，更注重培养学生解决问题的能力。

(4) 教材在内容编排上，力求由浅入深，循序渐进；举一反三，突出重点；语言简练，通俗易懂。采用模块化结构，兼顾不同层次的需求，在具体授课时可根据具体教学计划适当取舍内容。

(5) 大部分教材配有电子教案，从而更好地服务教学。

为编写本套教材，作者们付出了艰辛的劳动，编委会的各位专家进行了悉心的指导和认真的审定。丛书中参考、借鉴了国内外同类的优秀教材和专著，在此一并表示感谢。

我们衷心希望更多的优秀教师参与到教材建设中来，真诚希望广大教师、学生与读者朋友在使用本丛书过程中提出宝贵意见和建议。

若有投稿或建议，请发电子邮件到 textbook@bhp.com.cn。谢谢！

前 言

近年来,我国高职高专教育得到迅速发展。高等职业教育的出现是我国高等教育改革发展中的大事。高职应该办好,办出特色,真正培养出高素质的复合型、应用型人才。我国目前高级技工的比例严重偏低,这一现象已经严重地影响了国民经济的发展。高职院校虽然不是培养高级技工的场所,但它培养的各类技术人才,将会弥补这个不足,使“高学历”入才与“应用型”人才的比例趋向合理。

一般来说,进入高职院校学生的录取分数线比较低,这也引起人们的疑惑:入学分数较低的学生质量是不是一定就差?教育的功能在于,能用有限的资源把更多的学生提高到更高的水平。因此,我们提出这样一个问题:怎样根据高职教育的性质与实际可能将高等职业教育搞得更好、更有特色?怎样利用我们的有限的资源,培养出更多的合格人才?做到了这一点就是高质量的教育。从这点出发,高等数学教材要满足“必需、够用”和“易教易学”两个标准;同时要培养学生对高等数学的兴趣。既在满足以后学习专业知识、数学知识时够用,也不能提出不合理的过高的要求;学生们接受不了,也就更谈不上再学习后续内容。这是很不容易达到的标准。

为适应我国高职高专教育迅速发展的形式需要,由湖南各高职院校联合编写了这本《高等数学基础》。数学是研究数量关系与空间形式的科学,是科学技术人才科技素质的重要组成部分。随着计算机技术等高科技的普及和发展,数学的重要性日益显现。为了提高学生的数学素质,结合高职高专学生的特点,针对高职高专教育的目标——培养高层次、复合型、实用型人才,本教材保持传统体系,简略理论推导,强调实际应用,渗透建模思想,突出思路分析,强化综合训练;在叙述中注重文字简练,概念准确,由浅入深,引人入胜;力求使学生掌握所学知识,提高应用数学知识的能力,为将来的激烈竞争插上“坚强的翅膀”。

本书共有11章,内容包括函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程,多元函数微积分,无穷级数,拉普拉斯变换,矩阵及其应用,概率与统计。每节后附有习题,书后附有参考答案,供读者查阅。

本书由王喜斌、李占光、高兴、田智担任主编,屈宏香、鲁印伦担任主审,参加编写工作的还有曾德军、吴磐献、周厚云、陈丽佳、周文洁、高兴、吴家

强、成奋华、李宏萍、梁先宇、林生智、陈晓霞、朱焕桃、朱勇、李海军、张剑、黄任重、黄鹏辉，他们为本书付出了辛勤的劳动。本教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢。

湖南铁道职业技术学院、湖南经济管理干部学院、湖南机电职业技术学院、长沙民政职业技术学院、湖南交通职业技术学院、湖南商务职业技术学院、株洲职业技术学院、湖南科技职业学院、长沙南方职业学院、长沙女子职业大学、长沙商贸旅游职院、湖南信息职业技术学院、湖南同德职业学院、湘潭职业技术学院、岳阳职业技术学院等单位对本教材的出版发行给予了积极的支持，在此表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者批评指正，以便再版时修订，使本书日臻完善。

编 者

目 录

第 1 章 函数、极限与连续.....1	2.2.2 复合函数求导法.....42
1.1 函数.....1	2.2.3 隐函数的求导.....43
1.1.1 函数的概念.....1	2.2.4 由参数方程确定的函数的 求导方法.....45
1.1.2 函数的几种简单特性.....4	2.2.5 高阶导数.....46
1.1.3 反函数.....6	习题 2-2.....49
1.1.4 初等函数.....6	2.3 微分.....50
1.1.5 建立函数关系式.....9	2.3.1 微分的概念.....50
习题 1-1.....10	2.3.2 基本初等函数的微分公式 及微分的运算法则.....51
1.2 极限.....11	2.3.3 微分形式的不变性.....52
1.2.1 数列的极限.....11	2.3.4 微分在近似计算中的应用.....52
1.2.2 函数的极限.....13	习题 2-3.....53
1.2.3 无穷小与无穷大.....15	参考答案.....54
习题 1-2.....17	习题 2-1.....54
1.3 极限运算.....18	习题 2-2.....54
1.3.1 极限的四则运算.....18	习题 2-3.....55
1.3.2 两个重要极限.....19	第 3 章 导数的应用.....56
习题 1-3.....22	3.1 拉格朗日中值定理.....56
1.4 函数的连续性.....23	3.1.1 罗尔定理.....56
1.4.1 函数的连续性的概念.....23	3.1.2 拉格朗日中值定理.....56
1.4.2 函数的间断点.....25	3.1.3 柯西定理.....57
1.4.3 闭区间上连续函数的性质.....26	习题 3-1.....57
习题 1-4.....26	3.2 函数的单调性与极值.....57
参考答案.....27	3.2.1 函数单调性的判别法.....57
习题 1-1.....27	3.2.2 函数的极值及其求法.....58
习题 1-2.....28	3.2.3 函数的最大值与最小值.....60
习题 1-3.....29	习题 3-2.....63
习题 1-4.....30	3.3 曲线的凹凸与拐点.....63
第 2 章 导数与微分.....31	3.3.1 曲线的凹凸.....63
2.1 导数及其定义.....31	3.3.2 曲线的拐点.....64
2.1.1 导数的定义.....31	习题 3-3.....65
2.1.2 可导与连续的关系.....34	3.4 洛比达法则.....65
2.1.3 导数的实际意义.....35	3.4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式.....65
习题 2-1.....35	3.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.....66
2.2 导数的运算法则与导数的基本公式.....35	
2.2.1 基本初等函数的导数与四则 运算.....36	

习题 3-4	67	5.2.1 变上限定积分	98
3.5 曲率	68	5.2.2 牛顿—莱布尼茨公式	99
3.5.1 曲率的概念	68	习题 5-2	100
3.5.2 曲率的计算	69	5.3 定积分的换元法与分部积分法	101
3.5.3 曲率圆与曲率半径	70	5.3.1 定积分的换元法	101
习题 3-5	71	5.3.2 定积分的分部积分法	103
参考答案	71	习题 5-3	103
习题 3-1 (略)	71	5.4 广义积分	104
习题 3-2	71	5.4.1 无穷区间上的广义积分	104
习题 3-3	71	5.4.2 无界函数的广义积分	106
习题 3-4	72	习题 5-4	107
习题 3-5	72	5.5 定积分的应用	107
第 4 章 不定积分	73	5.5.1 定积分的微元法	108
4.1 不定积分的概念	73	5.5.2 定积分在几何中的应用	108
4.1.1 原函数的概念	73	5.5.3 定积分在物理中的应用	114
4.1.2 不定积分的定义与意义	74	习题 5-5	115
习题 4-1	77	参考答案	116
4.2 不定积分的性质与直接积分法	78	习题 5-1	116
4.2.1 不定积分的性质	78	习题 5-2	116
4.2.2 直接积分法	78	习题 5-3	117
习题 4-2	80	习题 5-4	117
4.3 换元积分法	80	习题 5-5	117
4.3.1 第一类换元积分法	80	第 6 章 微分方程	118
4.3.2 第二类换元积分法	83	6.1 常微分方程的基本概念与分离	
习题 4-3	86	变量法	118
4.4 分部积分法	87	6.1.1 微分方程的基本概念	118
习题 4-4	90	6.1.2 分离变量法	119
参考答案	90	习题 6-1	121
习题 4-1	90	6.2 一阶线性微分方程与可降阶的	
习题 4-2	91	高阶微分方程	121
习题 4-3	91	6.2.1 一阶线性微分方程	121
习题 4-4	92	6.2.2 可降阶的高阶微分方程	123
第 5 章 定积分及其应用	93	习题 6-2	125
5.1 定积分的概念	93	6.3 二阶常系数线性微分方程	126
5.1.1 定积分的定义	93	6.3.1 二阶常系数线性微分方程	
5.1.2 定积分的几何意义和性质	95	解的性质	126
习题 5-1	97	6.3.2 二阶常系数齐次线性微分	
5.2 定积分的基本公式 (牛顿—莱布		方程的求解方法	126
尼兹公式)	98	6.3.3 二阶常系数非齐次线性	

微分方程的求解方法	128	习题 7-4	169
习题 6-3	132	习题 7-5	170
6.4 微分方程应用举例	132	习题 7-6	170
习题 6-4	134	习题 7-7	170
参考答案	136	第 8 章 级数	172
习题 6-1	136	8.1 数项级数	172
习题 6-2	136	8.1.1 数项级数的概念	172
习题 6-3	136	8.1.2 收敛级数的基本性质	174
习题 6-4	137	8.1.3 正项级数及其审敛法	176
第 7 章 多元函数微积分	138	8.1.4 交错级数及其审敛法	181
7.1 空间解析几何简介	138	8.1.5 绝对收敛与条件收敛	182
7.1.1 空间直角坐标系	138	习题 8-1	183
7.1.2 空间曲面与方程	139	8.2 幂级数	185
习题 7-1	142	8.2.1 函数项级数的概念	185
7.2 多元函数的概念	142	8.2.2 幂级数及其收敛性	186
习题 7-2	146	8.2.3 幂级数的运算及和函数	189
7.3 偏导数	147	8.2.4 泰勒级数和麦克劳林级数	192
7.3.1 偏导数的概念	147	8.2.5 函数展开成幂级数	193
7.3.2 高阶偏导数	149	习题 8-2	194
习题 7-3	151	8.3 傅立叶级数	195
7.4 全微分	151	8.3.1 三角函数系及其正交性	195
习题 7-4	153	8.3.2 周期为 2π 的周期函数展开	
7.5 多元函数的求导法则	153	成傅立叶级数	196
7.5.1 多元复合函数的求导法则	153	8.3.3 定义在有限区间上的函数	
7.5.2 隐函数的求导法则	156	展开成傅立叶级数	198
习题 7-5	157	8.3.4 周期为 $2l$ 的周期函数展开	
7.6 多元函数的极值	158	成傅立叶级数	202
7.6.1 二元函数的极值	158	习题 8-3	203
7.6.2 最大值和最小值	159	参考答案	204
7.6.3 条件极值	160	习题 8-1	204
习题 7-6	161	习题 8-2	204
7.7 二重积分	161	习题 8-3	206
7.7.1 二重积分的概念与性质	161	第 9 章 拉普拉斯变换	207
7.7.2 二重积分的计算	163	9.1 拉普拉斯变换的概念	207
习题 7-7	167	习题 9-1	209
参考答案	168	9.2 拉普拉斯变换的性质	209
习题 7-1	168	习题 9-2	214
习题 7-2	168	9.3 拉普拉斯变换的逆变换	214
习题 7-3	169		

习题 9-3	215	第 11 章 概率与统计	254
9.4 拉普拉斯变换的应用	215	11.1 随机事件与概率	254
习题 9-4	217	11.1.1 随机事件	254
参考答案	218	11.1.2 随机事件的运算	258
习题 9-1	218	11.1.3 概率的定义	259
习题 9-2	218	习题 11-1	261
习题 9-3	218	11.2 概率的基本公式	262
习题 9-4	218	11.2.1 概率的加法公式	262
第 10 章 矩阵及其应用	219	11.2.2 条件概率与概率的乘法 公式	263
10.1 n 阶行列式的概念	219	11.2.3 全概率公式	265
10.1.1 二阶和三阶行列式	219	习题 11-2	266
10.1.2 n 阶行列式	221	11.3 事件的独立性	267
10.1.3 行列式的性质	225	习题 11-3	269
10.1.4 克莱姆法则	227	11.4 随机变量及其分布	269
习题 10-1	228	11.4.1 随机变量与分布函数	269
10.2 矩阵	229	11.4.2 离散型随机变量及其概率 分布	270
10.2.1 矩阵的概念	229	11.4.3 连续型随机变量的分布	275
10.2.2 矩阵的线性运算	231	习题 11-4	279
10.2.3 矩阵的乘法运算	232	11.5 随机变量的数字特征	281
10.2.4 矩阵的转置运算	233	11.5.1 数学期望与方差的概念	281
10.2.5 逆矩阵的概念	235	11.5.1 数学期望与方差的性质	283
10.2.6 逆矩阵的存在性及其求法	235	11.5.3 常用随机变量的数学 期望与方差	284
10.2.7 用逆矩阵解线性方程组	237	习题 11-5	285
习题 10-2	238	11.6 数理统计基础	287
10.3 矩阵的初等变换与矩阵的秩	240	11.6.1 数理统计中的几个概念	287
10.3.1 矩阵的初等变换	240	11.6.2 数理统计的几个分布	289
10.3.2 矩阵的秩	241	习题 11-6	293
习题 10-3	244	11.7 参数估计	294
10.4 线性方程组	244	11.7.1 参数的点估计	294
10.4.1 消元法	244	11.7.2 估计量的评价标准	294
10.4.2 一般线性方程组的求解 问题	248	11.7.3 参数的区间估计	297
习题 10-4	250	习题 11-7	300
参考答案	251	11.8 假设检验	301
习题 10-1	251	11.8.1 假设检验的基本概念	301
习题 10-2	251	11.8.2 一个正态总体均值的假设 检验	302
习题 10-3	253		
习题 10-4	253		

11.8.3 一个正态总体方差的假设	习题 11-6.....	308
检验.....	习题 11-7.....	309
习题 11-8.....	习题 11-8.....	309
参考答案	附录 1 随机数表.....	310
习题 11-1.....	附录 2 标准正态分布表.....	314
习题 11-2.....	附录 3 几种常用的曲线.....	315
习题 11-3.....	附录 4 积分表.....	318
习题 11-4.....	参考文献.....	327
习题 11-5.....		

第1章 函数、极限与连续

【基本要求】

1. 理解函数、复合函数的概念, 会求函数的定义域; 了解反函数的概念; 了解函数的特性.
2. 掌握基本初等函数的性质及其图形, 会建立简单实际问题中的函数关系式.
3. 理解极限的概念, 掌握极限四则运算法则, 会用各种基本方法, 以及两个重要极限来求数列和函数的极限.
4. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念, 会用等价无穷小来求极限.
5. 理解函数在一点连续的概念, 了解间断点的概念, 并会判断间断点的类型.
6. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

1. 引例

一般来说, 在一个问题的考察过程中, 通常会遇到许多变量. 这些变量之间并不是独立变化的, 它们之间存在着依赖关系. 先看两个实际例子.

【例1】 自由落体的运动规律为

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 h ——下降距离;

t ——时间;

g ——重力加速度.

这个公式提出了物体自由降落的过程中, 距离 h 和时间 t 之间的依赖关系.

【例2】 圆的面积公式为

$$A = \pi r^2$$

式中 A ——圆的面积;

r ——圆的半径.

r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 变量 A 都有惟一确定的值与之对应.

由以上两个实例, 我们抽象出函数的概念.

2. 函数的定义

定义1 设 x 、 y 是某一变化过程中的两个变量, 如果对于非空实数集 D 中的每个值 x , 变量 y 依照某一对应规则 f 总有惟一确定的值与之对应, 则称变量 y 是定义在 D 上的变量 x 的函

数, 记作 $y = f(x)$. 其中 x 称为自变量, y 称为因变量或函数, 数集 D 称为函数的定义域.

当 x 取定义域 D 中的某一个值 x_0 时, 对应的 y 值叫作函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作 $f(x_0)$, 或 $y|_{x=x_0}$. 当自变量在定义域内取每一个数值时, 对应的函数值的全体叫作函数的值域, 记作 M . 即 $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$.

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则. 对应法则也常用 g 、 h 、 φ 、 ψ 、 F 等符号表示, 那么函数也就记作 $g(x)$ 、 $h(x)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 、 $F(x)$ 等, 有时为了简化符号, 函数关系也可记作 $y = y(x)$.

由函数的定义可知, 定义域与对应规则是函数的两个要素. 因此, 如果两个函数具有相同的定义域和对应规则, 则它们是相同的函数.

3. 函数的定义域

函数的定义域的确定可分两种情况来讨论:

(1) 在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的实际意义来确定. 例如, 例 2 中的定义域即自变量 (半径 r) 的取值范围应为 $(0, +\infty)$.

(2) 对于用数学式子表示的函数, 确定函数的定义域的原则就是使此数学式子的运算有意义. 本书没有说明实际背景的函数, 其定义域都按第二种情况进行取值.

【例 3】 判断以下各对函数是否相同:

(1) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$;

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 与 $g(x) = x - 1$;

(3) $f(x) = 2 \lg x$ 与 $g(x) = \lg x^2$;

(4) $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$.

解 (1) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同. 虽然 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 但在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) \neq g(x)$, 这说明对应规则不相同, 故不是同一函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 这说明定义域不相同, 故不是同一函数.

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同. $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 这说明定义域不相同, 故不是同一函数.

(4) $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 这也说明定义域不相同, 故不是同一函数.

【例 4】 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$;

(2) $y = \frac{1}{4-x^2}$.

解 (1) 要使 y 有意义, x 必须满足下列条件:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x-1 \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

解得

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -1,$$

所以, 所求定义域为

$$(-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

(2) 要使 y 有意义, x 必须满足下列条件:

$$4-x^2 \neq 0$$

解得

$$x \neq \pm 2$$

所以, 所求定义域为

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +2) \cup (2, +\infty)$$

4. 函数的图像

函数关系 $y=f(x)(x \in D)$ 可以在平面 xOy 上表示出来, 函数 $y=f(x)$ 的图像是指平面点集:

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

例如图 1-1 就表示函数 $y=x+1$ 的图像.

用图像的几何特征解释函数的相关概念或性质常说成是几何解释.

【例 5】绝对值函数

$$y=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$. 其图形关于 y 轴对称 (见图 1-2).

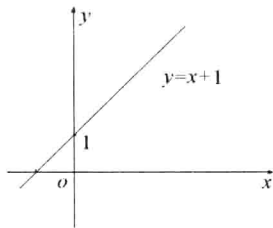


图 1-1

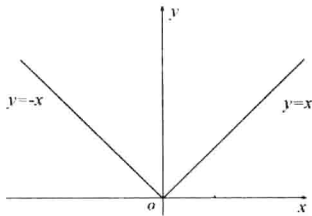


图 1-2

【例 6】符号函数

$$y = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

这个函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是 $\{-1, 0, 1\}$ 。其图形关于原点对称（见图 1-3）。

【例 7】取整函数：对于任意实数 x ，记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数。

例如 $[\sqrt{3}] = 1$ ， $[-\pi] = -4$ ， $[-5.8] = -6$ ， $[0] = 0$ ，称 $f(x) = [x]$ 为取整函数，它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域是整数集（见图 1-4）。

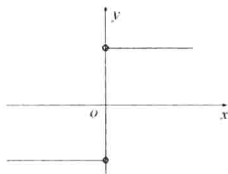


图 1-3

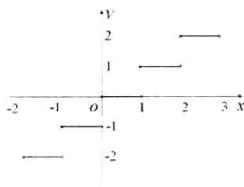


图 1-4

【例 8】分段函数：在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数。

例如函数

$$y = \begin{cases} 1+x, & 0 \leq x \\ 1-x, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

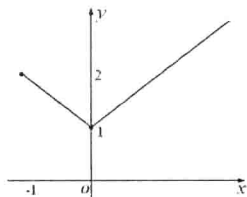


图 1-5

其定义域 $D = [-1, 0) \cup [0, +\infty) = [-1, +\infty)$ 。

当 $[-1, 0)$ 时，对应的函数值表达式为 $f(x) = 1 - x$ ；

当 $[0, +\infty)$ 时，对应的函数值表达式为 $f(x) = 1 + x$ 。

其图像见图 1-5。

1.1.2 函数的几种简单特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，区间 $I \subseteq D$ ，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的（图 1-6）；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的（图 1-7）。单调增加和单调减少统称为函数的单调性，区间 I 称为单调区间。

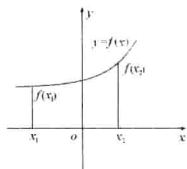


图 1-6

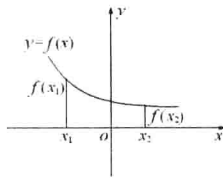


图 1-7