

高等学校教材

电 路

(修 订 本)

下 册

邱关源 主编

人民教育出版社

高等学校教材

电 路

(修 订 本)

下 册

邱关源 主编

人民教育出版社

目 录

第九章 拉普拉斯变换	1
§ 9-1 拉普拉斯变换的定义	1
§ 9-2 拉普拉斯变换的基本性质	4
§ 9-3 拉普拉斯反变换	14
§ 9-4 电路定律的运算形式	22
§ 9-5 利用拉普拉斯变换分析线性电路	27
§ 9-6 网络函数	36
§ 9-7 复频率平面·极点和零点	40
§ 9-8 卷积	49
习题	59
第十章 网络图论和网络方程	66
§ 10-1 网络的图	66
§ 10-2 回路·树·割集	69
§ 10-3 关联矩阵·回路矩阵·割集矩阵	76
* § 10-4 矩阵 A 、 B_f 、 Q_f 之间关系	83
§ 10-5 节点法	84
§ 10-6 具有受控源的电路的节点分析	95
§ 10-7 改进的节点法	98
* § 10-8 回路法	102
* § 10-9 割集法	104
§ 10-10 状态方程	107
§ 10-11 特勒根定理	115
习题	120
第十一章 二端口网络	126
§ 11-1 二端口网络	126
§ 11-2 二端口网络的方程和参数	128
§ 11-3 二端口网络的转移(传递)函数	138

§ 11-4	二端口网络的特性阻抗	141
§ 11-5	二端口网络的等效电路	143
§ 11-6	二端口网络的联接	145
	习题	148
第十二章	多端元件	151
§ 12-1	多端元件	151
§ 12-2	运算放大器	153
§ 12-3	具有运算放大器的电路的分析	156
§ 12-4	回转器	162
* § 12-5	负阻抗变换器	165
* § 12-6	RC有源滤波器的概念	167
	习题	170
第十三章	非线性电路	174
§ 13-1	非线性元件的概述	174
§ 13-2	非线性电路方程的编写	182
§ 13-3	小信号分析法·折线法	188
* § 13-4	非线性电路平衡状态的稳定性	193
* § 13-5	张弛振荡	196
§ 13-6	相平面	199
§ 13-7	等倾线法	207
	习题	209
*第十四章	网络的计算机辅助分析简介	212
* § 14-1	引言	212
* § 14-2	建立节点电压方程的关联矩阵法	214
* § 14-3	建立节点电压方程的直接法	219
* § 14-4	牛顿-拉夫逊法	225
* § 14-5	用友网络模型法求解非线性电阻电路	231
* § 14-6	线性电路时域分析的离散友网络	236
	习题	248
附录	均匀传输线	250
§ 附-1	均匀传输线及其方程	250

§ 附-2	均匀传输线方程的正弦稳态解.....	254
§ 附-3	均匀传输线的行波.....	258
§ 附-4	均匀传输线的原参数和副参数.....	263
§ 附-5	终端接特性阻抗的传输线.....	268
§ 附-6	终端接任意阻抗的传输线.....	269
§ 附-7	无损耗传输线.....	274
§ 附-8	无损耗线方程的通解.....	282
§ 附-9	无损耗线的波过程.....	287
	习题.....	292

第九章 拉普拉斯变换

内 容 提 要

本章介绍拉普拉斯变换在网络分析中的应用。主要内容有：拉普拉斯变换的基础知识，元件的电压、电流关系和电路定律的运算（或复频域）形式，运算阻抗和运算导纳，运算电路，网络函数，复频率平面，极点和零点及其应用。最后引出卷积和卷积定理，并在此基础上介绍电路时域分析的两个叠加积分公式。

§ 9-1 拉普拉斯变换的定义

一个定义在 $0 \leq t < \infty$ 区间的函数 $f(t)$ ①，它的拉普拉斯变换式定义为：

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9-1)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$ 为复变数。 $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数，而 $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数。注意，我们把积分下限规定为 $t = 0-$ ，其理由将在后面加以说明。拉普拉斯变换简称为拉氏变换，通常可写为

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

这里用记号“ $L[]$ ”表示对方括号里的函数作拉氏变换。

对于一个函数 $f(t)$ ，如果它的拉氏变换存在，应当有

① 从物理意义上来说，这要求 $f(t)$ 的作用是从 $t=0$ 开始，至于 t 在 $-\infty$ 到 0 的区间内是什么，我们并不关心。

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

式中的 $e^{-\sigma t}$ 称为收敛因子。

如果已知象函数 $F(s)$, 要求出它所对应的原函数 $f(t)$, 则由 $F(s)$ 到 $f(t)$ 的变换称为拉普拉斯反变换。 $F(s)$ 的拉氏反变换用 $L^{-1}[F(s)]$ 来表示。拉氏反变换将在 § 9-3 中讨论。

原函数 $f(t)$ 是以时间 t 为自变量的实函数, 象函数 $F(s)$ 是以参数 s 为自变量的函数; 通常 s 是复数, 所以 $F(s)$ 是复变函数, 变量 s 有时称为复数频率或复频率①。

不同的原函数 $f(t)$ 对应着不同的象函数 $F(s)$; 反过来, 不同的象函数对应着不同的原函数, 它们之间有着一一对应的关系。要注意, 不能把这种对应关系误解成相等关系。今后我们用小写字母来记原函数, 用大写的相同字母记对应的象函数; 如对应于电流 $i(t)$ 的象函数写为 $I(s)$ 。还可用“ $\doteq$ ”来表示 $i(t)$ 和 $I(s)$ 的对应关系, 例如 $i(t) \doteq I(s)$ 或 $I(s) \doteq i(t)$ 。

例 9-1 计算下列原函数的象函数:

(a) $f(t) = 1(t)$;

(b) $f(t) = \delta(t)$;

(c) $f(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$ 。

解

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad L[1(t)] &= \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

式中 s 的实部 σ 应大于零, 这样积分上限值 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{s} e^{-st} \right\}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{s} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \right\}$ 将趋于零。

① 在傅氏变换中, “ $j\omega$ ”中的 ω 相当于“频率”, 而这里 s 的虚部为“ ω ”。

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } L[\delta(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{s \cdot 0} dt = 1
 \end{aligned}$$

可以看出，冲激函数 $\delta(t)$ 的象函数为 1，这是我们将拉氏变换式的下限取为 0_- 的结果，因为这样的积分区间把 $\delta(t)$ 包括在内，从而给计算存在冲激函数的电路带来方便。

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } L[e^{-\alpha t} 1(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt \\
 &= -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}
 \end{aligned}$$

式中应有 $\sigma + \alpha > 0$ 。

从 (a), (c) 的例子可以看出， s 的实部起了收敛因子的作用，就是说，只要 s 具有足够大的正实部，以致使 $e^{-\sigma t}$ 能充分快地趋于零，式 (9-1) 的积分就为有限值。

把拉氏变换公式 (9-1) 与傅氏变换公式 (8-9) 作比较，有两点不同，一是指数项不同，就是用复数 s 代替了式 (8-9) 中的 $j\omega$ 。由于 s 的实部起了收敛因子的作用，拉氏变换的适用范围可以广一些。二是拉氏变换的积分下限取为零，这样就可以把初始条件考虑进去。

在拉氏变换中，时间函数经过变换后成为复频率 s 的复变函数，因此利用拉氏变换来进行电路的分析称为电路的复频域分析。由于在这种方法中要将时间函数经过一定的运算（实际上是一个积分变换）变换为一个复变函数后再进行研究或求解，因此这种方法又称为运算法。

拉氏变换是研究和分析线性电路的一个极为重要的工具。应

用这种方法分析电路的过渡过程问题时，能直接计算符合初始条件的具体解。根据拉氏变换可以引入网络函数 (§ 9-6) 的概念，而通过后者来考虑和研究电路问题具有一定的优越性。在 § 9-7 中还将应用拉氏变换来显示网络的时域响应性质与正弦稳态特性之间的紧密联系。

§ 9-2 拉普拉斯变换的基本性质

本节将根据拉氏变换的定义，得出几个最常用的拉氏变换的性质。利用这些性质可以帮助我们来求一些较复杂的原函数的象函数，同时通过这些基本性质可以使原函数的微分方程变为象函数的代数方程。

性质 1 两个原函数之和或差的象函数等于其象函数之和或差，即如果 $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, 则

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

证

$$\begin{aligned} L[f_1(t) \pm f_2(t)] &= \int_{0_-}^{\infty} [f_1(t) \pm f_2(t)] e^{-st} dt \\ &= \int_{0_-}^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt \pm \int_{0_-}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt \\ &= F_1(s) \pm F_2(s) \end{aligned}$$

性质 2 原函数乘以任意常数后的象函数等于该常数乘其象函数，即如果 $L[f_1(t)] = F_1(s)$, 则

$$L[Af_1(t)] = AF_1(s)$$

其中 A 为任意常数。从式 (9-1) 不难证明此点。

性质 3 $L[A_1 f_1(t) \pm A_2 f_2(t)] = A_1 F_1(s) \pm A_2 F_2(s)$

此性质可由性质 1 与性质 2 得到。

例 9-2 求(a)常数 U ; (b) $A(1-e^{-\alpha t})$; (c) $\sin \omega t I(t)$ 的象函数。

解

(a) 利用例 9-1 的结果及性质 2, 得出

$$L[U] = \frac{U}{s}$$

就是说常数 U 的象函数为 U 除以 s 。

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad L[A(1-e^{-\alpha t})] &= L[A] - L[Ae^{-\alpha t}] \\ &= AL[1] - AL[e^{-\alpha t}] \\ &= \frac{A}{s} - \frac{A}{s+\alpha} = \frac{A\alpha}{s(s+\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad L[\sin \omega t I(t)] &= L\left[\frac{1}{2j}e^{j\omega t}I(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}I(t)\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{s+j\omega-s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

性质 4 (时域导数性质) 原函数 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$ 的象函数与 $f(t)$ 的象函数之间有如下关系:

$$L[f'(t)] = sF(s) - f(0_-)$$

式中 $f(0_-)$ 为原函数 $f(t)$ 在 $t=0_-$ 时的值。

证

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

利用定积分的分部积分公式, 设 $e^{-st}=u$, $f'(t)dt=dv$, 则 $du=-se^{-st}dt$, $v=f(t)$, 由于 $\int u dv = uv - \int v du$, 所以

$$\int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st} \Big|_{0-}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

当 s 的实部 σ 充分大时, 上式右边第一项在 $t = \infty$ 时为零, $t = 0-$ 时为 $f(0-)$, 因此有

$$\begin{aligned} L[f'(t)] &= -f(0-) + s \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0-) \end{aligned}$$

导数性质表明拉氏变换把原函数求导数的运算转换为“象函数乘 s 后减初值”的代数运算。如果 $f(0-) = 0$, 则

$$L[f'(t)] = sF(s)$$

在相量法中, 正弦量用相量表示后, 正弦量加减的运算转换为相应相量的加减运算, 正弦量的求导数的运算转换为相应相量乘以 $j\omega$ 的运算, 这与拉氏变换的线性性质及导数性质十分相似。

例 9-3 (a) 求 $\cos\omega t 1(t)$ 的象函数; (b) 根据导数性质来求 $\cos\omega t 1(t)$ 的导数的象函数。

解

(a) 由于对所有时间 t , 有 $\frac{d}{dt}(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t$; 若设 $f(t) = \sin\omega t 1(t)$, 则得

$$\begin{aligned} L[\cos\omega t 1(t)] &= L\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}f(t)\right] \\ &= \frac{1}{\omega}(sF(s) - f(0-)) \end{aligned}$$

据例 9-2(c), 有 $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, 而 $f(0-) = 0$, 由此得

$$L[\cos\omega t 1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

(b) 直接利用导数性质, 再利用(a)所得结果, 有

$$L\left[\frac{d}{dt}(\cos\omega t 1(t))\right] = s \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} - [\cos\omega t 1(t)]_{t=0-}$$

$$= \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2}$$

此题还可以用下述方法来求解。由于

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos \omega t l(t)) &= \frac{d}{dt} l(t) \cos \omega t + (-\omega \sin \omega t) l(t) \\ &= \delta(t) - (\omega \sin \omega t) l(t) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d}{dt}(\cos \omega t l(t))\right] &= L[\delta(t) - (\omega \sin \omega t) l(t)] \\ &= 1 - \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

所得结果是一样的。

从这个例子可以进一步领会在拉氏变换中规定积分下限为 $t = 0_-$ 的用意及其处理方法。图 9-1a、b 分别为 $\cos \omega t l(t)$ 及其导数的波形。由于 $\cos \omega t l(t)$ 在 $t = 0$ 处, 从 $t = 0_-$ 的零值跃变为 $t = 0_+$ 的 1, 因此其导数在 $t = 0$ 处出现了单位冲激函数。

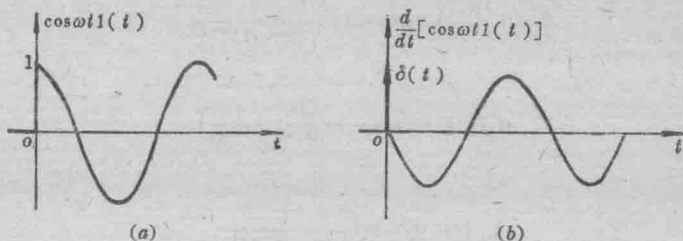


图 9-1 例 9-3 用图

不难推得, $f(t)$ 的二阶、直至 n 阶的高阶导数的象函数为

$$L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

.....

$$\begin{aligned} L[f^n(t)] &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f'(0_-) - \dots \\ &\quad - f^{n-1}(0_-) \end{aligned}$$

性质 5 (频域导数性质) 象函数 $F(s)$ 对 s 的导数与原函数 $f(t)$ 之间具有如下关系:

若
$$L[f(t)] = F(s)$$

则

$$L[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

证 根据拉氏变换的定义

$$\begin{aligned}\frac{dF}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [-tf(t)] e^{-st} dt \\ &= -L[tf(t)]\end{aligned}$$

不难推得

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

例 9-4 设 $f(t) = e^{-\alpha t}$, 则

$$L[f(t)] = \frac{1}{s + \alpha}$$

试求 $L[t^n e^{-\alpha t}]$ 。

解 由于

$$\frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s + \alpha} \right) = n! (-1)^n \frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

而

$$L[t^n e^{-\alpha t}] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s + \alpha} \right)$$

故得

$$L[t^n e^{-\alpha t}] = n! \frac{1}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

在 $n=1, 2, 3$ 情况下, 有

$$L[te^{-\alpha t}] = \frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

$$L[t^2 e^{-\alpha t}] = \frac{2}{(s + \alpha)^3}$$

$$L[t^3 e^{-\alpha t}] = \frac{6}{(s + \alpha)^4}$$

例 9-5 计算 R 、 L 串联电路接通直流电压 U 后的响应电流，设电感的初始电流为零。

解 先列微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U$$

对方程两边取拉氏变换

$$\mathcal{L}\left[L \frac{di}{dt} + Ri\right] = \mathcal{L}[U]$$

应用线性性质和导数性质，并且代入 $i(0_-) = 0$ 的条件，即得关于象函数的代数方程：

$$sLI(s) + RI(s) = \frac{U}{s}$$

由此求得

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{U}{s(sL + R)} = \frac{U/L}{s(s + R/L)} = \frac{U}{R} \cdot \frac{R/L}{s(s + R/L)} \\ &= \frac{U}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \end{aligned}$$

按例 9-2 的结果，可以求得 $I(s)$ 的原函数为

$$i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

这与 § 3-6 中的结果是一致的。

性质 6 (时域积分性质) 原函数 $f(t)$ 的积分的象函数与 $f(t)$ 的象函数之间有如下关系：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi) d\xi\right] = \frac{F(s)}{s}$$

证

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi) d\xi\right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(\xi) d\xi\right] dt$$

上式右方可按分部积分公式来求。令 $u = \int f(t) dt, dv = e^{-st} dt, du$

$= f(t) dt, v = -\frac{1}{s} e^{-st}$, 这样有

$$\begin{aligned} L\left[\int_{0-}^t f(\xi) d\xi\right] &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0-}^t f(\xi) d\xi\right]_{0-}^{\infty} \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

所以函数 $f(t)$ 由 $0-$ 到 t 的积分的象函数等于 $f(t)$ 的象函数除以 s 。

例 9-6 利用积分性质求单位斜坡函数 $r_a(t) = t 1(t)$ 的象函数。

解 设 $f(t) = 1(t)$ 为单位阶跃函数, 则 $F(s) = \frac{1}{s}$, 而

$$\int_{0-}^t f(\xi) d\xi = \int_{0-}^t 1(\xi) d\xi = \int_{0-}^t d\xi = t 1(t) = r_a(t)$$

根据积分性质, 应有

$$L[r_a(t)] = L[t 1(t)] = \frac{L[1(t)]}{s} = \frac{1}{s^2}$$

性质 7 (频域平移性质) 如果 $L[f(t)] = F(s)$, 则

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$$

证

$$\begin{aligned} L[e^{-\alpha t} f(t)] &= \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-(s+\alpha)t} dt \\ &= F(s + \alpha) \end{aligned}$$

也就是 $f(t)$ 乘以 $e^{-\alpha t}$ 后, 其拉氏变换相当于把 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 的 s 改为 $s+\alpha$ 。

例 9-7 求 $e^{-\alpha t} \sin \omega t 1(t)$ 的象函数。

解 由于

$$L[\sin \omega t 1(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

因此根据频域平移性质, 有

$$L[e^{-\alpha t} \sin \omega t 1(t)] = \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

性质 8 (时域平移性质) 如果 $L[f(t)] = F(s)$, 则

$$L[f(t-t_0) 1(t-t_0)] = e^{-s t_0} F(s)$$

证

$$\begin{aligned} L[f(t-t_0) 1(t-t_0)] &= \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0) 1(t-t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0) e^{-s(t-t_0)} e^{-s t_0} d(t-t_0) \\ &\quad - t_0) \end{aligned}$$

作变量置换, 令 $\tau = t - t_0$, 则上式成为

$$\begin{aligned} L[f(t-t_0) 1(t-t_0)] &= \int_{0_-}^{\infty} e^{-s t_0} f(\tau) e^{-s \tau} d\tau \\ &= e^{-s t_0} \int_{0_-}^{\infty} f(\tau) e^{-s \tau} d\tau = e^{-s t_0} F(s) \end{aligned}$$

由于一些特殊波形通常可看作若干个在不同时间起始的简单的已知 $F(s)$ 的原函数的叠加, 因此利用时域平移性质可直接写出这些波形的象函数。

例 9-8 求图 9-2 a 所示波形的象函数。

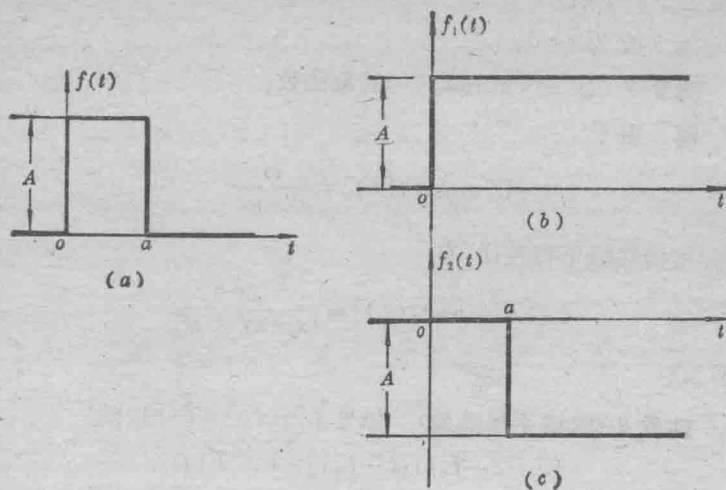


图9-2 例9-8 用图

解 图a中,

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 < t < a \\ 0 & a < t \end{cases}$$

可将 $f(t)$ 看作同图 b、c 中 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的叠加, 即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A1(t) - A1(t-a)$$

利用时域位移性质, 有 $L[f_2(t)] = e^{-sa}A/s$, 故

$$L[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s} - \frac{Ae^{-sa}}{s} = \frac{A}{s}(1 - e^{-sa})$$

例9-9 求图9-3 a 所示单个正弦波的象函数。

解 将单个正弦波看为二个不同时间起始的正弦波的叠加, 如图 b 所示, 即

$$f(t) = \sin \omega t 1(t) - \sin[\omega(t-T)]1(t-T)$$

故

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega e^{-sT}}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}(1 - e^{-sT})$$