Semigroup with Transversal

含断面的半群

罗敏霞　著

中国科学技术出版社

含断面的半群

罗敏霞　著

中国科学技术出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

含断面的半群/罗敏霞著. —北京:中国科学技术出版社,2004. 6

ISBN 7—5046—3822—6

Ⅰ.含… Ⅱ.罗… Ⅲ.半群—研究 Ⅳ.O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 051328 号

责任编辑 孙卫华
责任印制 安利平
责任校对 林 华
封面设计 王 鹏

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码:100081
电话:010—62103168 传真:010—62175982
科学普及出版社发行部发行
北京长宁印刷有限公司印刷
*
开本:787 毫米×960 毫米 1/16 印张:10.625 字数:160 千字
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—600 册 定价:25.00 元

前　　言

逆断面的概念是由 T.S.Blyth 和 R.B.McFadden 于 1982 年提出的。自引入逆断面的概念以来，对半群的各种断面的研究，成为半群代数理论研究领域的一个较为活跃的课题。由于半群的一个断面是该半群的一个子半群，因此这一课题的思路就是通过半群的某一性质比较好的子半群去把握整个半群，从而达到由局部把握整体的目的。

本书共分九章。第一章介绍了阅读本书所需要的预备知识；第二章定义了一种新的等价关系，0 – 格林关系。第三章利用 0 – 格林关系，对含逆断面的半群作了深刻的讨论；第四章研究了含拟理想逆断面的正则半群；第五章讨论了含纯正断面的半群；第六章研究了含拟理想恰当断面的富足半群；第七章讨论了具有恰当断面的左恰当半群；最后两章介绍了含逆断面和含拟理想逆断面的正则半群上的同余关系。

本书在写作过程中，得到云南大学郭聿琦教授和陕西师范大学魏暹荪教授的大力支持和鼓励，他们对本书的初稿进行了审查，提出了宝贵的修改意见和建议。笔者在此一并表示衷心的感谢。

本书作者是在 20 世纪 90 年代中期开始从事半群研究的，本书中不少内容是作者近年的研究成果。在本书的写作过程中，参阅了大量的参考资料，限于作者学识浅陋，本书中的疏漏、不妥之处，望广大读者不吝赐教。

罗敏霞

2003 年 8 月

目 录

第一章　预备知识

本章介绍阅读本书所需要的预备知识. 在 §1.1 中介绍半群的一些基本定义； §1.2 介绍偏序集、半格与格的概念； §1.3 介绍了等价关系与同余关系的概念，这些基本的定义与概念在后面章节中要用到.

§ 1.1　基本定义

定义 1.1.1　设 S 是一个非空集合， μ 是 S 上的一个二元运算，即存在一个影射 μ: $S\times S\longrightarrow S$, 我们称 (S,μ) 是一个广群. 如果 μ 满足结合律，即

$$((x,y)\mu,z)\mu=(x,(y,z)\mu)\mu\quad(\forall x,y,z\in S)$$

我们称 (S,μ) 是一个半群. 以下为了简便，我们把 $(x,y)\mu$ 记为 xy 且称半群的运算为乘法运算，上式变为

$$(xy)z=x(yz)$$

我们将记乘法半群为 $(S,\cdot)$ 或者简单记为 S. 半群 S 所含元素的个数称为半群 S 的阶数，记为 $|S|$.

如果 S 或 $(S,\cdot)$ 还满足

$$xy=yx\quad(\forall x,y\in S),$$

我们称 S 是交换半群.

如果存在元素 $1\in S$ 使得

$$x1=1x=x\quad(\forall x\in S),$$

我们称 1 是 S 的单位元, 此时称 S 是具有单位元的半群或者独异点. 一个半群至多有一个单位元. 设 $1'\in S$ 也具有性质

$$x1'=1'x=x\quad(\forall x\in S)$$

则

$$1^{'}=11^{'}=1.$$

如果 S 没有单位元，我们添加一个元素 1, 定义

$$1s=s1=s,\quad (\forall s\in S)$$

$$11=1,$$

则 $S\cup\{1\}$ 就是一个具有单位元 1 的半群.

如果一个半群至少含有两个元素，且包含一个元素 0 满足

$$x0=0x=0\quad (\forall x\in S),$$

我们说 0 是 S 的零元，此时称 S 是一个具有零元的半群. 同理，一个半群至多有一个零元. 设 $0'\in S$ 也满足性质

$$x0^{'}=0^{'}x=0^{'}\quad (\forall x\in S)$$

则

$$0^{'}=00^{'}=0.$$

一个半群如果不含零元，同理，我们可以添加一个元素使它成为一个含有零元的半群.

定义 1.1.2 如果 S 是一个非空集， S 上的乘法定义如下

$$xy=x\quad (\forall x,y\in S)$$

容易验证，上面的乘法满足结合律. 此时称半群 S 是一个左零半群. 类似的，可给出右零半群的定义.

既是左零又是右零的半群是一种特殊的半群. 设 I 与 Λ 是任意的非空集合，在 $I\times\Lambda$ 上定义乘法

$$(i,\lambda)(j,\mu)=(i,\mu)\quad (i,j\in I,\ \lambda,\mu\in\Lambda)$$

我们称 $I\times\Lambda$ 是一个矩形带. 如果 $|\Lambda|=1$, $I\times\Lambda$ 是一个左零半群; 如果 $|I|=1$, $I\times\Lambda$ 是一个右零半群.

如果 A,B 都是半群 S 的子集, 我们记 $AB=\{ab: a\in A, b\in B\}$. 容易证明

$$(AB)C=A(BC)\quad(\forall A,B,C\subseteq S).$$

简记 $S\{a\}$ 为 Sa.

设半群 S 不含单位元, 如果 a 是半群 S 的一个元素, 则 Sa 一般不含 a. 我们记

$$S^1a=Sa\cup\{a\},$$

$$aS^1=aS\cup\{a\},$$

$$S^1aS^1=SaS\cup Sa\cup aS\cup\{a\}.$$

S^1a, aS^1 与 S^1aS^1 都是半群 S 的子集.

定义 1.1.3　设 $(S,\cdot)$ 是一个半群, T 是 S 的一个非空子集, 如果 T 关于 S 的乘法是封闭的, 即

$$xy\in T\quad(\forall x,y\in T)$$

则称 T 是半群 S 的一个子半群. 或者如果 $T^2\subseteq T$, 则称 T 是 S 的子半群. 如果 $|T|$ 是一个有限数, 称 T 是 S 的有限子半群. 特别 S, $\{0\}$, $\{1\}$ 都是半群 S 的子半群, 称为 S 的平凡子半群. 设 $e\in S$, 如果 $ee=e$, 则称 e 是半群 S 的幂等元.

定义 1.1.4　设 A 是半群 S 的一个非空子集, 如果 $SA\subseteq A$, 称 A 是半群 S 的一个左理想; 如果 $AS\subseteq A$, 称 A 是半群 S 的一个右理想. 如果 A 既是左理想, 又是右理想, 称 A 是半群 S 的一个理想.

显然, 每个理想都是子半群, 反之不然.

定义 1.1.5　设 ϕ 是半群 $(S,\cdot)$ 到半群 $(T,\cdot)$ 的一个映射, 如果满足

$$(xy)\phi=(x\phi)(y\phi)\quad(\forall x,y\in S)$$

称 ϕ 是一个同态. 如果 ϕ 是一一映射, 称 ϕ 是单射; 如果 ϕ 既是单射, 又是满射, 称 ϕ 是同构映射; 此时称半群 S 与半群 T 是同构的.

定义 1.1.6 设 S 是一个半群, $a\in S$, 我们记 $\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, \cdots\}$, 则 $\langle a\rangle$ 是 S 的由元素 a 生成的子半群. 元素 a 的阶定义为子半群 $\langle a\rangle$ 的阶. 如果元素 $a, a^2, a^3, \cdots$ 没有重复, 即

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n$$

则半群 $\langle a\rangle$ 是无限阶的, 此时元素 a 也是无限阶的. 如果集合

$$\{x\in N : (\exists y\in N) a^x = a^y,\ x\neq y\}$$

是非空集, 则存在最小元素记为 m, 称 m 为元素 a 的指数. 则集合

$$\{x\in N : a^{m+x} = a^m\}$$

是非空集, 它也有最小元素 r, 称 r 为元素 a 的周期.

设元素 a 的指数为 m, 周期为 r, 则我们有

$$a^m = a^{m+r}$$

因此, $\langle a\rangle = \{a, a^2, a^3, \cdots, a^{m+r-1}\}$, 则 $|\langle a\rangle| = m + r - 1$. 我们说元素 a 是有限阶的.

如果半群 S 的所有元素都是有限阶的, 则称半群 S 是一个周期半群.

§ 1.2 偏序集 半格与格

定义 1.2.1 设 ρ 是集合 X 上的一个二元关系 (即 $X\times X$ 的一个子集), 若满足下列条件:

(1) $(x, x)\in\rho$(自反性),

(2) $(\forall x, y\in X)$ $(x, y)\in\rho$ 且 $(y, x)\in\rho$, 则 $x = y$ (反对称性),

(3) $(\forall x,y,z\in X)$ $(x,y)\in\rho$ 且 $(y,z)\in\rho$, 则 $(x,z)\in\rho$ (传递性), 则称 ρ 是集合 X 的一个偏序；称 (X,ρ) 为一个偏序集.

一个偏序如果还满足

(4) $(\forall x,y\in X)$ $(x,y)\in\rho$ 或者 $(y,x)\in\rho$,

则称 ρ 是集合 X 的全序；称 (X,ρ) 为一个全序集.

定义 1.2.2 设 Y 是偏序集 $(X,\leq)$ 的一个子集，$c\in X$, 若任意 $y\in Y$, 满足 $c\leq y$, 则称 c 是 Y 的一个下界；若集合 Y 的所有下界集合是非空的，且存在最大元 d, 则称 d 是最大的下界. 如果 $Y=\{a,b\}$, 我们记为 $d=a\wedge b$. 设 $(X,\leq)$ 是一个偏序集，若对于任意 $a,b\in X$, $a\wedge b$ 都存在，则称 $(X,\leq)$ 是一个下半格. 类似地，可给出上半格的定义. 一个偏序集既是上半格又是下半格，称为一个格.

§ 1.3 二元关系 等价关系与同余关系

定义 1.3.1 设 X 是一个非空集合， $X\times X$ 的一个子集 ρ 称为集合 X 上的一个二元关系. 如果二元关系满足下列条件:

(1) $(x,x)\in\rho$(自反性),

(2) $(\forall x,y\in X)$ $(x,y)\in\rho$, 则 $(y,x)\in\rho$ (对称性),

(3) $(\forall x,y,z\in X)$ $(x,y)\in\rho$ 且 $(y,z)\in\rho$, 则 $(x,z)\in\rho$ (传递性),

称 ρ 是集合 X 上的一个等价关系.

定义 1.3.2 设 $(S,\cdot)$ 是一个半群， ρ 是半群 S 上的一个二元关系，如果满足

$$(s,t)\in\rho\Rightarrow(as,at)\in\rho \quad (\forall s,t,a\in S)$$

称关系 ρ 是左相容的；如果二元关系 ρ 满足

$$(s,t)\in\rho\Rightarrow(sa,ta)\in\rho \quad (\forall s,t,a\in S)$$

称关系 ρ 是右相容的. 如果二元关系 ρ 满足

$$(s,s')\in\rho \ \ (t,t')\in\rho\Rightarrow(st,s't')\in\rho \quad (\forall s,t,s',t'\in S)$$

则称关系 ρ 是相容的.

一个左相容的等价关系称为左同余关系；一个右相容的等价关系称为右同余关系；一个相容的等价关系称为同余关系.

第二章　0 – 格林关系

§ 2.1　引　言

格林关系是研究半群的一个工具, 格林关系是由 J.A.Green 于 1951 年提出来，它在半群理论的发展中起到了非常重要的作用. 对 0 – 单半群、完全正则半群、逆半群等都作了深入的研究，特别是对逆半群的研究，证明了一个半群是逆半群等价于该半群的每个 $\mathcal{L}$– 类和每个 $\mathcal{R}$– 类只含唯一的幂等元.

$*$– 格林关系是 John.Fountain 于 1979 年提出的. S 是一个半群, $a,b\in S$, $a\mathcal{L}^*b$ 当且仅当 $(\forall x,y\in S^1)\ ax=ay\Longleftrightarrow bx=by$. 利用 $*$– 格林关系，对富足半群、恰当半群、含恰当断面的富足半群等作了深刻细致的研究. 本章将给出另一种新的等价关系，称为 0 – 格林关系. 讨论了 0 – 格林关系与格林关系、 $*$– 格林关系的关系，研究了 0 – 格林关系的一系列性质，给出了左 0 – 理想、右 0 – 理想以及 0 – 正则半群的定义. 讨论了它们的一系列性质，为逆断面的研究提供一种工具.

§ 2.2　关系 $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}^0$, $\mathcal{H}^0$, $\mathcal{D}^0$ 和 $\mathcal{J}^0$

Howie 在文献 [16] 中定义了半群上的格林关系. 设 a 是半群 S 的元素，由 a 生成的最小左理想是 $Sa\bigcup\{a\}$, 称为由元素 a 生成的主左理想，记为 S^1a. 设 a,b 是半群 S 的元素，如果 a,b 生成相同的主左理想，即 $S^1a=S^1b$, 称 a,b 满足关系 $\mathcal{L}$, 记为 $a\mathcal{L}b$ 或 $(a,b)\in\mathcal{L}$. 相似地，我们定义 $a\mathcal{R}b$ 当且仅当 $aS^1=bS^1$. $\mathcal{D}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}=\mathcal{L}\bigvee\mathcal{R}$. 定义 $a\mathcal{J}b$ 当且仅当 $S^1aS^1=S^1bS^1$. $\mathcal{H}=\mathcal{L}\bigcap\mathcal{R}$. 关系 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{H}$ 称为格林关系.

设 S 是一个半群， S^0 是 S 的子半群，半群 S 的任意元素 a,b, 如果 a,b 在子半群 S^0 上满足格林关系 $\mathcal{L}$, 即 $(S^0)^1a=(S^0)^1b$, 称 a,b

满足关系 $\mathcal{L}^0$, 记为 $(a,b)\in\mathcal{L}^0$. 对偶地，我们可定义 $(a,b)\in\mathcal{R}^0$ 当且仅当 $a(S^0)^1=b(S^0)^1$.

显然，$\mathcal{L}^0, \mathcal{R}^0$ 是 S 上的两个等价关系，我们记 a 所在的 $\mathcal{L}^0$– 等价类为 L_a^0, 记 a 所在的 $\mathcal{R}^0$– 等价类为 R_a^0.

命题 2.2.1 设 S^0 是半群 S 的子半群，则下列结论成立:

(1) $(a,b)\in\mathcal{L}^0$ 当且仅当存在 $u,v\in(S^0)^1$ 使得 $ua=b$, $vb=a$, $(a,b)\in\mathcal{R}^0$ 当且仅当存在 $x,y\in(S^0)^1$ 使得 $ax=b$, $by=a$;

(2) $\mathcal{L}^0$ 是右同余，$\mathcal{R}^0$ 是左同余;

(3) 幂等元 e 是 L_e^0 的右单位元，是 R_e^0 的左单位元.

两个等价关系的交仍是一个等价关系, 所以 $\mathcal{L}^0\cap\mathcal{R}^0$ 是一个等价关系，我们记为 $\mathcal{H}^0$.

命题 2.2.2 等价关系 $\mathcal{L}^0$ 与 $\mathcal{R}^0$ 可交换，即 $\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0=\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0$.

证明 设 S 是一个半群, S^0 是 S 的子半群, $\forall a,b\in S$, 设 $(a,b)\in\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0$, 则存在 $c\in S$ 使得 $(a,c)\in\mathcal{L}^0,(c,b)\in\mathcal{R}^0$, 即存在 $x,y,u,v\in(S^0)^1$ 使得

$$xa=c,\quad yc=a,\quad cu=b,\quad bv=c.$$

设 $ycu=d$, 则

$$au=ycu=d,\quad dv=ycuv=ybv=yc=a.$$

因此，$(a,d)\in\mathcal{R}^0$.

又因为 $yb=ycu=d$, $xd=xycu=xau=cu=b$, 从而 $(d,b)\in\mathcal{L}^0$, 所以 $(a,b)\in\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0$. 这样 $\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0\subseteq\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0$. 同理可证 $\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0\subseteq\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0$. 因此 $\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0=\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0$.

引理 2.2.3[1] 设 ρ,σ 是半群 S 上的等价关系，如果 $\rho\circ\sigma=\sigma\circ\rho$, 则 $\rho\vee\sigma=\rho\circ\sigma$.

由命题 2.2.2 和引理 2.2.3 可知，$\mathcal{L}^0\vee\mathcal{R}^0=\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0$. 我们记为 $\mathcal{D}^0=\mathcal{L}^0\circ\mathcal{R}^0=\mathcal{R}^0\circ\mathcal{L}^0=\mathcal{L}^0\vee\mathcal{R}^0$.

最后引入一个等价关系 $\mathcal{J}^0$, 定义 $(a,b)\in\mathcal{J}^0$ 当且仅当 $(S^0)^1a(S^0)^1=(S^0)^1b(S^0)^1$, 也就是 $(a,b)\in\mathcal{J}^0$ 当且仅当存在 $x,y,u,v\in(S^0)^1$ 使得 $xay=b$, $ubv=a$.

显然有， $\mathcal{L}^0\subseteq\mathcal{J}^0, \mathcal{R}^0\subseteq\mathcal{J}^0, \mathcal{D}^0\subseteq\mathcal{J}^0$. 以上定义的几种关系 $\mathcal{L}^0, \mathcal{R}^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{H}^0, \mathcal{J}^0$ 称为 0 – 格林关系. 特别当 S^0 是半群 S 的中心时，我们有下面等式： $\mathcal{L}^0 = \mathcal{R}^0 = \mathcal{D}^0 = \mathcal{H}^0 = \mathcal{J}^0$.

命题 2.2.4 如果 S^0 是半群 S 的周期子半群，则 $\mathcal{D}^0 = \mathcal{J}^0$.

证明 设 $a, b\in S$, $(a, b)\in\mathcal{J}^0$, 则存在 $x, y, u, v\in(S^0)^1$ 使得 $xay = b$, $ubv = a$. 从而有，

$$a = ubv = (ux)a(yv) = (ux)^2a(yv)^2 = (ux)^3a(yv)^3 = \cdots,$$

$$b = xay = (xu)b(vy) = (xu)^2b(vy)^2 = (xu)^3b(vy)^3 = \cdots$$

因为 S^0 是周期子半群，所以总存在正整数 m 使得 $(ux)^m$ 是幂等元. 设 $c = xa$, 则

$$a = (ux)^m a(yv)^m = (ux)^m(ux)^m a(yv)^m = (ux)^m a = (ux)^{m-1}uc$$

所以， $a\mathcal{L}^0c$. 又因为 $cy = xay = b$, 同理，存在正整数 n 使得 $(vy)^n$ 是幂等元，则

$$\begin{aligned} c &= xa \\ &= x(ux)^{n+1}a(yv)^{n+1} \\ &= (xu)^{n+1}xay(vy)^n v \\ &= (xu)^{n+1}b(vy)^{2n}v \\ &= (xu)^{n+1}b(vy)^{n+1}(vy)^{n-1}v \\ &= b(vy)^{n-1}v \end{aligned}$$

从而 $c\mathcal{R}^0b$, 因此 $a\mathcal{D}^0b$.

推论 2.2.5 (1) 如果半群 S 是一个周期半群， S^0 是 S 的子半群，则 $\mathcal{D}^0 = \mathcal{J}^0$;

(2) 如果 S^0 是半群 S 的一个有限子半群，则 $\mathcal{D}^0 = \mathcal{J}^0$;

(3) 如果半群 S 是一个有限半群， S^0 是 S 的子半群，则 $\mathcal{D}^0 = \mathcal{J}^0$.

§ 2.3 0 – 理想

设 S 是一个半群， S^0 是 S 的子半群，我们记半群 S 上的 $\mathcal{L}^0$– 关系为 $\mathcal{L}^0(S)$. 如果 U 是半群 S 的一个子半群，且 S^0 是 U 与 S 的子半群，则显然有 $\mathcal{L}^0(S)\cap(U\times U)=\mathcal{L}^0(U)$, $\mathcal{R}^0(S)\cap(U\times U)=\mathcal{R}^0(U)$.

定义 2.3.1 设 S 是一个半群， S^0 是 S 的一个子半群， I 是 S 的一个子集，如果 $S^0I\subseteq I$ ($IS^0\subseteq I$), 则称 I 是 S 的左 0 – 理想 (右 0 – 理想). 如果 I 既是 S 的一个左 0 – 理想，又是一个右 0 – 理想，则称 I 是 S 的一个 0 – 理想.

注 半群 S 的任一左理想一定是一个左 0 – 理想，反之不然. 当 $I\subseteq S^0$ 时, 则 I 是 S^0 的左 (右) 理想当且仅当 I 是 S 的左 (右)0 – 理想.

例如

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}\right\}$$

关于变换合成做成一个半群.

$$S^0=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

做成 S 的子半群,

$$I=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$

是 S 的一个 0 – 理想，但不是 S 的一个理想.

命题 2.3.2 设 S^0 是半群 S 的子半群， $\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$ 是半群 S 的 0 – 理想， $I\in\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$, 则下列结论成立：

(1) $\forall a\in I$, 则 $L_a^0\subseteq I$;

(2) $\bigcap\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$ 是 S 的一个左 0 – 理想;

(3) $\bigcup\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$ 是 S 的一个左 0 – 理想;

(4) 如果 $(a,b)\in\mathcal{L}^0$, 则 $\forall x\in S^1$ 都有 $ax\in I$ 当且仅当 $bx\in I$;

(5) 如果 I_1 为 I 的左 0 – 理想且 $I_1^2 = I_1$, 则 I_1 也是 S 的左 0 – 理想.

证明 (1) $\forall a \in I$, $\forall b \in L_a^0$, 则存在 $u \in (S^0)^1$ 使 $b = ua \in S^0 I \subseteq I$, 即 $L_a^0 \subseteq I$.

(2) $\forall \alpha \in \Lambda$, 由于 I_α 都是 S 的左 0 – 理想, 则 $S^0 I_\alpha \subseteq I_\alpha$, 因此

$$S^0(\cap\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\})\subseteq\cap\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}.$$

即 $\bigcap\{I_\alpha;\ \alpha\in\Lambda\}$ 是 S 的一个左 0 – 理想.

(3) 类似于 (2) 可证明.

(4) 如果 $(a,b)\in\mathcal{L}^0$, 由于 $\mathcal{L}^0$ 是右同余, 则 $\forall x\in S^1$, 有 $(ax,bx)\in\mathcal{L}^0$. 又由于 I 是 S 的左 0 – 理想, 由 (1) 可知 $bx\in L_{ax}^0$, 因此 $ax\in I$ 当且仅当 $bx\in I$.

(5) 因为 $I_1^2 = I_1$, 则 $S^0 I_1 = S^0 I_1^2$, 又由于 I_1 是 I 的左 0 – 理想, 从而 $S^0 I_1 = S^0 I_1^2 \subseteq S^0 I I_1 = (S^0 I) I_1 \subseteq I I_1 \subseteq I_1$, 所以 I_1 是 S 的一个左 0 – 理想.

注 关于右 0 – 理想也有与命题 2.3.2 相应的结论. 如果命题 2.3.2 中的左 0 – 理想改为 0 – 理想, 则 (1). $\forall a\in I$, $H_a^0\subseteq I$, 且 (2), (3), (5) 均成立.

由命题 2.3.2 可知, 半群 S 是它自己的一个 0 – 理想. 包含元素 a 的最小左 0 – 理想记为 $L^0(a)$, 包含元素 a 的最小右 0 – 理想记为 $R^0(a)$, 包含元素 a 的最小 0 – 理想记为 $J^0(a)$. 分别称为由 a 生成的主左 0 – 理想, 主右 0 – 理想, 主 0 – 理想.

推论 2.3.3 设 S^0 是 S 的子半群, $a,b\in S$, 则

(1) $a\mathcal{L}^0 b$ 当且仅当 $L^0(a) = L^0(b)$;

(2) $a\mathcal{R}^0 b$ 当且仅当 $R^0(a) = R^0(b)$;

(3) $a\mathcal{J}^0 b$ 当且仅当 $J^0(a) = J^0(b)$.

由前面 $\mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}^0$, $\mathcal{J}^0$ 的定义, 它完全依据半群的主左 0 – 理想, 主右 0 – 理想和主 0 – 理想, 由这些理想的包含关系可诱导这些等价类的一个偏序.