图的理论算法和应用

（第三册）

王介生

中国科学院计算技术服务社讲习班

一九八一年十月

目

㈢

第十章．信号流图和流图

10-1 信号流图

信号流图是二十世纪五十年代由Mason引进的一种图。在线性系统的分析方面，它是一种很流行的、有用的工具。在信号流图中，顶点表示物理方程，边表示顶点间的函数关系。这种图可以用来描述从系统的一点到另一个点间的信号流。

所谓系统，就是一些彼此关联的部件组成的集合，这集合有一些确定的输入变量和输出变量。我们假设这些部件是在一些端点处互相关联的，有一些是输入端和输出端，还有一些是内部端点，这样，一个系统可表示如下：

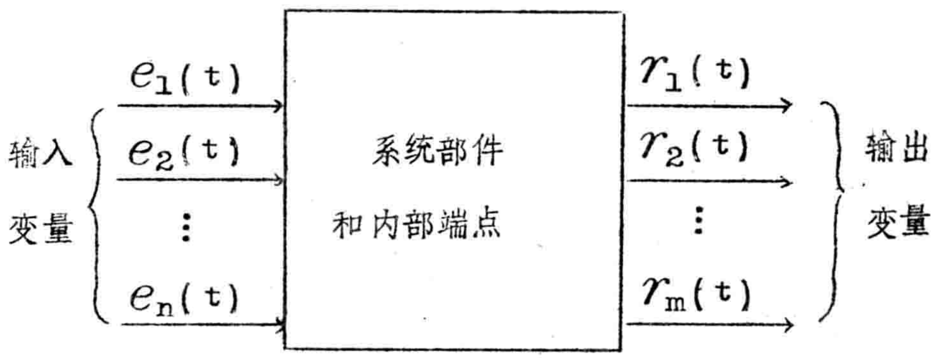

Fig 10.1

输入、输出都是t的函数，t可以是时间，也可以是由系统本身决定的其它物理量。

一个系统也可以通过一个分析表达式来描述，Fig10.1中的系

统可描述为：

$$r(t)=He(t) \qquad (10.1)$$

其中，$e(t)$、$r(t)$ 可以是单个的输入或输出，也可以是输入或输出向量。H是用来确定这一系统的一个关系，它可以是算子，也可以是把 $e(t)$ 映射到 $r(t)$ 的函数关系。

我们先来考虑一种简单的情况，即系统元件 E_1，E_2，… E_e 都是两端器件，对每个 E_i，有两个变量 X_i、Y_i 与之相关联，X_i、Y_i 都称作端变量，其中，X_i 又称作跨接变量，Y_i 称作通过变量，两个变量通过某个由 E_i 确定的已知算子 f_i 联系起来：

$$Y_i=f_i X_i \qquad i=1,2,\dots e \qquad (10.2)$$

这一方程称作关于 E_i 的端点关系，这一关系也可以用 Fig10.2 来表示：

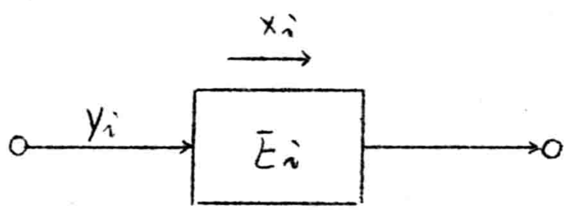

Fig 10.2

我们用两个顶点分别表示变量 X_i、Y_i，用边表示函数关系 f_i，则得 Fig10.3 中给出的图：

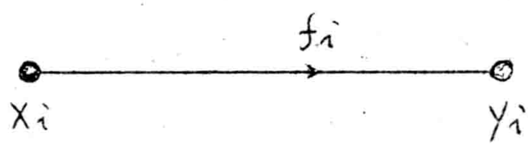

Fig 10.3

在某种条件下（如在频率域中工作），（10.2）是个代数方程，f_i 表示乘法运算，此时，f_i 是传递函数或系统的增益。f_i 也被称作边的透射比，表示某个信号被传输，或从一个点流到另一个点。图中的箭头总是从输入指向输出。

在一般情况下，顶点不一定非得是端变量或通过变量，而可能是与系统有关的任意变量，两个顶点间的函数关系也不一定只用一条边表示，终端关系（10.2）也可推广至一般的因果关系：

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} X_j \qquad i = 1,2,\cdots m \tag{10.3}$$

在用图表示方程组（10.3）时，对每个 X_i，当且仅当 $t_{ij} \neq 0$ 时，在顶点 i、j 间连一条边（$j = 1,2,\cdots n$），这些边的增益为 $t_{ij} \neq 0$，边的方向总是从 10.3 右端的变量指向左端的变量，即从 X_j 指向 X_i。

作为例子，我们考虑如下的方程组：

$$\begin{aligned} X_1 &= X_2 - X_3 \\ X_2 &= 2X_1 + 3X_2 + X_3 \\ X_3 &= X_1 + X_2 + X_4 \end{aligned} \tag{10.4}$$

对应的如图 Fig10.4 所示。

后面我们将看到，信号流图还可以对微分方程组来定义。现在，我们结合（10.4）中的代数方程组，把信号流图定义如下：

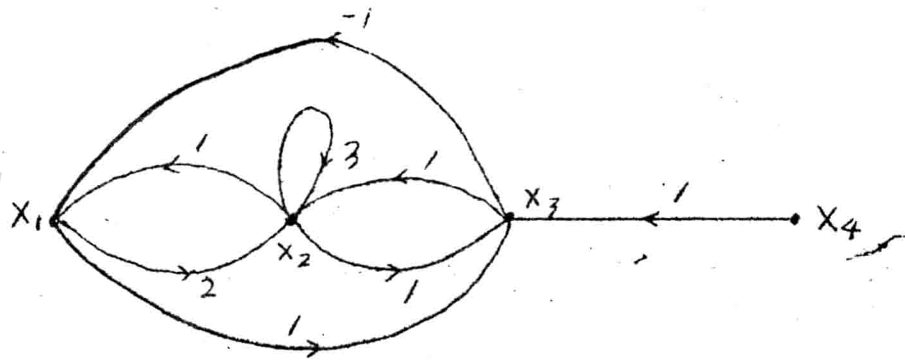

Fig 10.4

定义10.1 信号流图

信号流图是这样一个有向图，它的m个顶点表示m个系统变量X_i ($i = 1, 2, \cdots m$)，这些变量由某个方程组（例如10.3）确定，对给定的i、j当且仅当第i个方程中的系数$t_{ij} \neq 0$时，(X_j, X_i)是一个弧，t_{ij}称作弧(X_j, X_i)的增益。信号流图的顶点通常称作节点。

注意，在这里，我们不再用n、m分别表示图的顶点数和边数，还将看到，G也不再代表某个图。

显然，信号流图可以被看作是一个加权的有向图，每个弧(X_j, X_i)的权就是它的增益t_{ij}。

在（10.4）给出的方程组中，如果再加上一个新方程$X_0 = X_1$，那么对此新方程组，有Fig10.5中所示的信号流图。

在Fig10.5中，X_0是唯一一个内向度数为1的节点，X_4是唯一一个外向度数为1的节点。X_4称作源，X_0称作收点，解这个

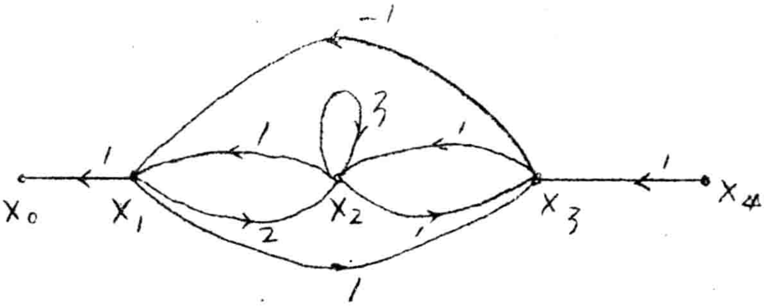

Fig 10.5

新方程组，有

$$X_0 = X_1 = -\frac{1}{2}X_4 \qquad (10.5)$$

我们把系统的增益看作是以源作输入，收点作为输出时的增益，在这里它是$-\frac{1}{2}$，描述形如(10.5)的关于源和收点的方程的信号流图是与原来系统的信号流图等价的信号流图(见Fig10.6)。

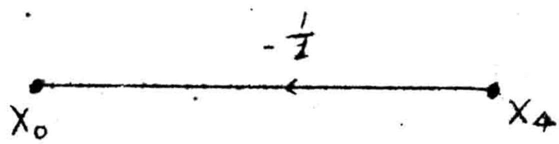

Fig 10.6

10-2 Mason公式

为了从一般的信号流图得到Fig10.6那样的等价的信号流图，需要经过一系列复杂的化简过程。我们不准备讨论这些化简的方法，而希望用Mason公式来达到这一目的，这一公式是要从线性系统的

信号流图来得到它的传递函数。在给出Mason公式前，我们先讨论一下描述系统的方程组 没有给成（10.3）中那种形式时，如何构造信号流图的问题，并给出一些讨论信号流图时常用的术语。

设系统只有一个输入节点，如有多个输入节点，可以作为若干个单输入情况的叠加，我们先来看（10.4）中的方程组。如果我们想用矩阵形式来给出这一方程组，则可对（10.4）作如下变换：

$$
\begin{aligned}
&-X_1+X_2-X_3=0 \\
&2X_1+2X_2+X_3=0 \\
&X_1+X_2-X_3-X_4=0
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

若令

$$
A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

则（10.6）成为：

$$
A\vec{X}=\vec{b}\cdot X_4 \tag{10.7}
$$

在一般情况下，X_4 可以是一个任意给定的纯量，我们把它记作q，则以上方程成为：

$$
A\vec{X}=q\vec{b} \tag{10.8}
$$

其中，A是一个m × m阶矩阵，$\vec{X}$和$\vec{b}$都是m维向量，q是给定纯量。

系统方程通常都给作（10.8）的形式。这种形式与（10.3）那种类型的方程组主要不同之点有二。一是在（10.8）中，X只出现于方程的一端；一是（10.8）中的X只有m个分量（m是方程个数），此外还恰好有一个输入变量q（在（10.3）中，可能有多个输入变量，如前所述。这可以看作单输入情况的叠加）。我们需要先把（10.8）化成（10.3）的形式，然后再用前面讲过的那种方法来构造对应的信号流图。

把（10.8）式化成（10.3）式的过程就是从（10.4）得到（10.7）式的逆过程。这一过程可表述如下：

由（10.7），有：

$$\vec{X} = (I+A)\vec{X} - q\vec{b}$$

其中，I是m×m单位矩阵，此式又可写作如下形式：

$$\vec{X} = \left(I+A,\ -\vec{b} \right) \begin{pmatrix} \vec{X} \\ q \end{pmatrix} \qquad (10.9)$$

我们把$(I+A,\ -\vec{b})$记作C，$C=(C_{ij})$，则C_{ij}可如下确定：先把（10.9）写成分量形式：

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_j + C_{i,\ n+1}\,q \qquad i=1,2,\cdots n \qquad (10.10)$$

我们再引进常用的克罗里德记号δ_{ij}，它的意义是：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } i=j\\ 0 & \text{若 } i\neq j\end{cases}$$

使用这一记号，从(10.10)，我们有：

$$c_{ij}=\delta_{ij}+a_{ij} \qquad i,\ j=1,2,\cdots n$$

$$c_{i,\ n+1}=-b_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots n$$

若令 $q=x_{n+1}$，则(10.10)成为：

$$x_i=\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}\,x_j \qquad i=1,2,\cdots n \qquad (10.11)$$

这样，就把(10.8)化成了(10.3)的形式。

定义 10.2 信号流图的连接矩阵

矩阵 $C=(I+A,\ -\vec{b})$ 称作与(10.9)对应的信号流图的连接矩阵。

我们对(10.11)来构造信号流图。如 $c_{ij}\neq 0$，在图中就有一条从 x_j 到 x_i 的弧（$j=1,2,\cdots n+1$）。如 $c_{ij}=0$，则不存在这样的弧，矩阵 C 给出了信号流图中的关联关系和各个弧的权。

现在，我们再回到(10.4)中的例子上来。我们已经求出了 A 与 $\vec{b}$，且 $q=x_4$，所以：

$$I+A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$C = (I+A, -\vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据这样的矩阵C构造信号流图，所得结果与Fig10.4完全相同。

我们已经说过，在信号流图中，通常把顶点称作节点，现在我们再指出，弧，有时也称作枝；图中的有向回路通常称作圈；从一个输入节点到一个输出节点的有向路称作是向前的路，这样一条路的增益被定义为它的各个弧的增益的乘积，类似地，一个圈的增益被定义为其各个弧的增益的乘积，一组彼此没有公共节点的圈也称作彼此分离的圈。

在用几何图形来给出信号流图时，习惯上把输入节点画在左端，输出节点画在右端。我们把Fig10.5的图重画如下：

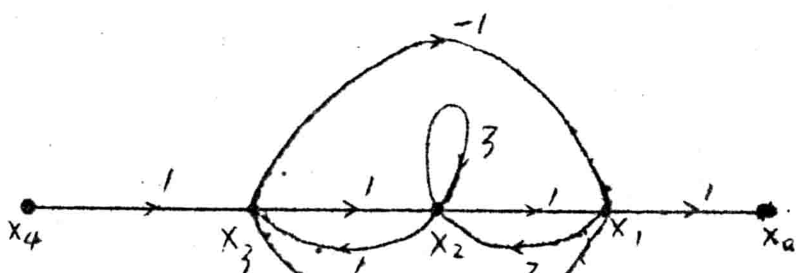

Fig 10.7

在Fig10.7中，共有六个圈L_1，L_2，…，L_6，如Fig10.

8 所示。

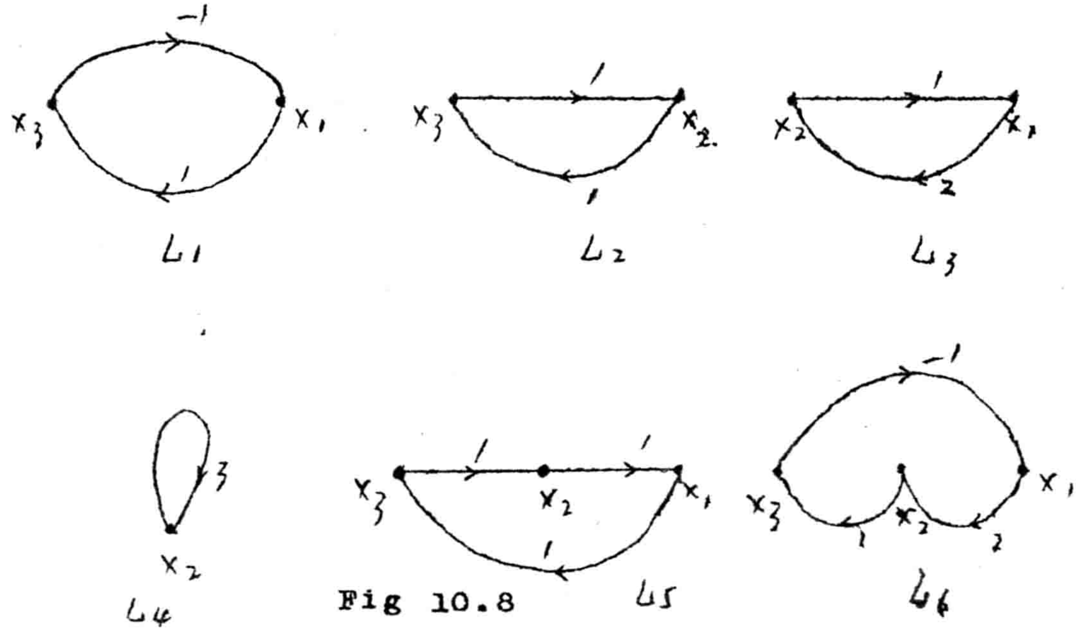

Fig 10.8

各个圈的增益如下：

$$g_1 = (-1)\cdot 1 = -1$$

$$g_2 = (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$g_3 = 1\cdot(2) = 2$$

$$g_4 = 3$$

$$g_5 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$g_6 = (-1)\cdot 2\cdot 1 = -2$$

图中有两个向前的路 F_1 和 F_2，如 Fig10.9 所示：

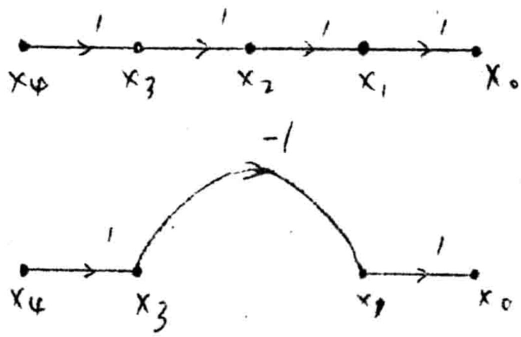

Fig 10.9

它们的增益是：

$$G_1 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$G_2 = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1$$

为了便于列举出信号流图中的向前路，在画图时通常都遵循这样的规则：确定一个水平位置（如Fig10.7中从X_4到X_0的直线），把向前的弧都画在水平线上或高于水平线，把反馈线（即以左面的端点为头的弧）都画在水平线的下面，自回路画在上方还是下方，则依其是顺时针还是逆时针方向而定。

现在，我们引进如下定义：

定义10.3 信号流图的增益

设X_0是信号流图的输出节点变量，X_i是信号流图的输入节点变量，则称$G = \dfrac{X_0}{X_i}$为信号流图的增益。

我们把这一概念与系统的传递函数作一比较。传递函数定义为某个输出变量与某个给定的输入变量之比，而其它输入都取作零，所以，一个信号流图如果只有一个输入节点，那么，信号流图的增益就是系

统的传递函数。

定义10.4 图行列式

设G_{i1}是信号流图中第i个圈的增益，G_{i2}是第i个由两个分离回路构成的集合的增益（定义为这两个回路的增益的乘积），G_{i3}是第i个由三个分离回路构成的集合的增益（定义为这三个回路的增益的乘积）。……。则$\triangle=1-\sum_{i}^{n_1}G_{i1}+\sum_{i}^{n_2}G_{i2}-\sum_{i}^{n_3}G_{i3}+\cdots\cdots$被定义为这一信号流图的图行列式。

同样，我们可以定义子图的行列式。设原来的信号流图中去掉第m个向前路所包含的弧，再去掉同这一向前路有公共节点的所有的弧，我们就得到一个子图，记这一子图的行列式为$\triangle_m$。

利用图行列式，我们可以给出如下重要定理。这一定理中的结果称作Mason公式，这一定理我们不准备证明了。

定理10.1 一个单输入变量的信号流图从输入到输出的增益（即信号流图的增益）G可由下式确定：

$$G=\frac{\sum_{m}G_m\triangle_m}{\triangle} \qquad (10.16)$$

其中，G_m为第m个向前路的增益，$\triangle$、$\triangle_m$分别为前面给出的图行列式和子图行列式。

作为例子，我们用Mason公式来计算一下Fig10.7中所给信号流图的增益，该图中的输入为X_4，输出为X_0，图中共有六个圈（见Fig10.8），而只有L_1和L_4两个圈是分离的，另外有两个向

前路 F_1，F_2，我们来计算：

$$\sum_{i=1}^{6} G_{i1} = -1+1+2+3+1-2 = 4$$

$$\sum_{i=1}^{1} G_{i2} = (-1)\cdot 3 = -3$$

$$\Delta = 1-4+(-3) = -6$$

此外.

$$g_1 = -1$$

$$g_4 = 3$$

$$G_1 = 1$$

$$G_2 = -1$$

$$\Delta_1 = 1-0 = 1$$

$$\Delta_2 = 1-3 = -2$$

故有

$$G = \frac{G_1\Delta_1 + G_2\Delta_2}{\Delta}$$

$$= \frac{1\cdot 1+(-1)\cdot(-2)}{-6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

10.3 状态转移图和Shannon-Happ公式

如果系统方程是形如（10.8）的代数方程，我们已经讨论过与之对应的信号流图，这一节我们来讨论，当用微分方程组给出系统的状态方程时，应当如何使用信号流图方法，在这种情况下，我们把所得的图称作状态转移图。

我们先来考虑一个最简单的情况，设系统方程为：

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 q \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 q
\end{aligned}
\qquad (10.12)
$$

其中，“·”代表对时间t的导数，即 $\dot{x} = \frac{dX}{dt}$。我们用 p 来表示微分算子 $\frac{d}{dt}$，则（10.12）式成为：

$$
\begin{aligned}
p x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 q \\
p x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 q
\end{aligned}
\qquad (10.13)
$$

且有：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p^{-1} p x_1 \\
x_2 &= p^{-1} p x_2
\end{aligned}
\qquad (10.14)
$$

要使这一微分方程组有唯一解，需给出初始条件

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1\Big|_{t=0} &= x_1(0) \\
\dot{x}_2\Big|_{t=0} &= x_2(0)
\end{aligned}
\qquad (10.15)
$$