金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2015

李永乐 · 王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学复习全书

数学二

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

最佳搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

超值赠送 《分阶习题同步训练》便携本
基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。三维一体化巩固、练习、提高

超级服务 使用李永乐 · 王式安考研数学系列图书可全程获免费网络答疑服务
文字、视频双模式讲解。详情请访问新浪微博@金榜图书官方微博

国家行政学院出版社

图书

SINCE 1997

2015

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

考研数学复习全书

数学二

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书. 数学二/李永乐,王式安,季文铎编著. —2版. —北京:国家行政学院出版社,2013.12
ISBN 978-7-5150-1056-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第290022号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

考研数学复习全书. 数学二

主　　编:李永乐　王式安　季文铎
责任编辑:姚敏华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:国家行政学院出版社
　　　　(北京市海淀区长春桥路6号 100089)
电　　话:(010)68920640　68929037
编 辑 部:(010)68928761　68929009
印　　刷:大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:19.25
字　　数:456千字
版　　次:2014年2月第2版
印　　次:2014年2月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5150-1056-4
定　　价:52.80元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)51906740

前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容，全面提高解题能力和应试水平，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合10多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

全书分二篇，分别是高等数学、线性代数，各篇按大纲设置章节，每章的编排如下：

1. **考点与要求**　设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点。

2. **内容精讲**　本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. **例题分析**　本部分对历年考题所涉及的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法，注重对所学知识的应用，以便能够开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对有难度的例题给出解题思路的分析，以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. **习题分阶**　只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心优化设计了一定数量的练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，本书对精选的练习题，进行了难度分阶，从基础概念，到综合应用，层层递进，实现练习、巩固、提高三维一体。

二、本书的主要特色

1. **权威打造**　命题专家和阅卷专家联袂打造，站在命题专家的角度命题，站在阅卷专家的角度解题，为考生提供最权威的复习指导。

2. **综合提升**　与其他同类图书相比，本书加强了考查知识点交叉出题的综合性，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. **分析透彻**　本书既从宏观上把握考研对知识的要求，又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析，让考生思路清晰、顺畅。

4. **一题多解**　对于常考热点题型，均给出巧妙、新颖、简便的几种解法，拓展考生思维，

锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. **贴心服务** 本书赠送《分阶习题同步训练》，以便于考生迅速检验学习效果，巩固所学内容。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@金榜图书官方微博。

最后，本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师和中国人民大学师潭老师在编校过程中所付出的努力。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编 者

2014 年 2 月

目录

第一篇　高等数学

第三章　一元函数积分学 ……………… (69)

第四章　多元函数微积分学 ……… (114)

第五章 常微分方程 ………………… (168)

第二篇 线性代数

第一章 行列式 ………………………… (183)

第二章 矩 阵 ………………………… (197)

第三章 向 量 ………………………… (222)

第一章　函数　极限　连续

考点与要求

理解　掌握　函数的概念及其表示法，复合函数与分段函数，基本初等函数的性质及其图形，极限的概念与左、右极限的概念以及它们之间的关系，极限的性质及其运算法则，极限存在的两个准则并用它们判别极限的存在性，两个重要极限，无穷小与无穷大的概念以及它们之间的关系，无穷小的比较的概念并会用等价无穷小替换定理求极限，几个重要的等价无穷小，洛必达法则，佩亚诺余项泰勒公式并用它求某些极限，函数的连续与左、右连续，闭区间上连续函数的性质（有界性，最大最小值定理，介值定理，零点定理）.

了解　会用　函数的单调性、奇偶性、周期性与有界性，建立简单应用问题的函数关系，反函数与隐函数的概念，参数方程所表示的函数，初等函数的概念，判别函数的间断点及其类型，基本初等函数的连续性及初等函数的连续性，利用积分和式求某些极限.

☞1　函　　数

内容精讲

一、定义

定义 1.1.1（邻域）　设 $\delta>0$，实数集 $U_\delta(x_0)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域，如果不必说及邻域半径 δ 的大小，则简记为 $U(x_0)$，称为 x_0 的某邻域，$\mathring{U}_\delta(x_0)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的去心 δ 邻域，类似地有记号 $\mathring{U}(x_0)$ 及相应的名称.

此外还有 x_0 的左（右）半 δ 邻域与 x_0 的左（右）半去心 δ 邻域等概念.

引入 ∞ 的（去心）邻域一词在今后的叙述上会带来一些方便，这是指 $U=\{x \mid |x|>X\}$，其中 X 为充分大的正数.

定义 1.1.2(函数) 设有两个变量 x 与 y,X 是一个非空的实数集.若存在一个对应规则 f,使得对于每一个 $x\in X$,按照这个规则,y 有唯一确定的实数值与之对应,则称 f 是定义在 X 上的一个函数,x 称为自变量,X 称为函数 f 的定义域,y 称因变量.函数 f 在 $x\in X$ 对应的 $y=f(x)$,$x\in X$ 的函数值所成的集合,常记为 Y,$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$,称为函数的值域,以后"实数"的"实"字常省去,习惯上,也称 y 或 $f(x)$ 为 x 的函数.

在定义域的不同部分用不同的解析式子表示的函数称为分段函数.

【注】 分段函数是一个函数,不能认为每一段是一个函数、是多个函数.

常见的几种分段函数:

绝对值函数(其图像如图 1-1)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -x, & x<0\end{cases}$$

符号函数(其图像如图 1-2)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它表示 x 的符号.显然有 $|x|=x\operatorname{sgn}x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

取整函数 $[x]$,它表示不超过 x 的最大整数.例如,$[3.2]=3$,$[4]=4$,$[-\pi]=-4$.一般地,$[x]=n$,当 $n\leqslant x<n+1$,$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$.

$y=[x]$ 的图像如图 1-3,显然有性质:对于 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $[x]\leqslant x<[x]+1$,且 $[x+1]=[x]+1$.

狄里克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 为无理数时}\end{cases}$.

狄里克雷函数无法描出它的图像.

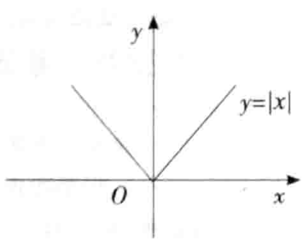

图 1-1

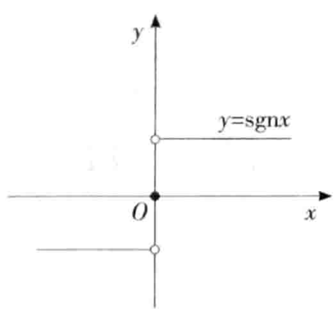

图 1-2

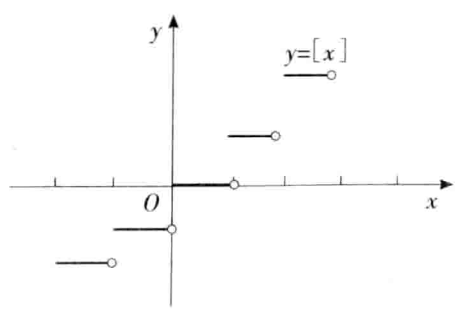

图 1-3

定义 1.1.3(隐函数) 设 x 在某数集 X 内每取一个值时,由方程 $F(x,y)=0$ 可唯一确定一个 y 的值,则称由 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 y,虽然不一定能将 y 明显地解出来.

定义 1.1.4(参数式表示的函数) 设 $x=x(t)$,$y=y(t)$.若 x 在某数集 X 内每取一个值时,由 $x=x(t)$ 可唯一确定一个 t 的值,并且对于此 t,由 $y=y(t)$ 可确定唯一的一个 y 的值,则称由参数式 $x=x(t)$,$y=y(t)$ 确定了 y 为 x 的函数.

定义 1.1.5(函数的单调性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果对于任意的 $x_1\in X$,$x_2\in X$,$x_1<x_2$,就一定有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$ 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加(减少)的.如果一定有 $f(x_1)<f(x_2)$, $(f(x_1)>f(x_2))$ 则称 $f(x)$ 在 X 上

是严格单调增加(减少)的.

定义 1.1.6(函数的奇、偶性) 设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某数集 X 上有定义,并且对于任意 $x \in X$,必有 $f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x))$,则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

在直角坐标系 xOy 中,偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点 O 对称.

定义 1.1.7(函数的周期性) 设 $f(x)$ 的定义域是数集 X,如果存在常数 $T > 0$,当 $x \in X$ 时,有 $x \pm T \in X$,并且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T) = f(x)$ 成立的最小正数 T(如果存在的话).

定义 1.1.8(函数的有界性) 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,如果存在常数 M,当 $x \in X$ 时 $f(x) \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有上界;如果存在 m,当 $x \in X$ 时 $f(x) \geqslant m$,则称 $f(x)$ 在 X 上有下界;如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

定义中的 m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 X 上的下界与上界. 显然,如果 $m(M)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界,则比 m 小(比 M 大)的任何数,都是 $f(x)$ 在 X 上的下(上)界.

如果不论 M 多么大,总有 $x \in X$ 使 $f(x) > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无上界;类似地可以定义无下界.

定义 1.1.9(反函数) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X,值域是 Y. 如果对于 Y 内的每一个 y,由 $y = f(x)$ 可以确定唯一的 $x \in X$. 这样在 Y 上定义了一个函数,称为 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $x = f^{-1}(y)$ 或 $x = \varphi(y)$,$y \in Y$.

由反函数的定义,有 $y \equiv f(f^{-1}(y)), \quad y \in Y; x \equiv f^{-1}(f(x)), \quad x \in X$

有时,也常将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

在同一坐标系中,$y = f(x)$ 与它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是一致的,而 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

定义 1.1.10(复合函数) 设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域是 D_φ,值域是 R_φ. 若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$($\varnothing$ 表示空集),则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数,它的定义域是 $\{x \mid x \in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x) \in D_f\}$. u 称为中间变量,x 称为自变量.

定义 1.1.11(基本初等函数) 下列一些函数称为基本初等函数:

① 常值函数:C(C 为常数),$x \in \mathbf{R}$.

② 幂函数:x^a(a 为常数),其定义域由 a 确定,但不论 a 如何,在 $(0, +\infty)$ 内总有定义.

③ 指数函数:a^x(常数 $a > 0, a \neq 1$),$x \in \mathbf{R}$.

④ 对数函数:$\log_a x$(常数 $a > 0, a \neq 1$),$x \in (0, +\infty)$.

⑤ 三角函数:$\sin x, x \in (-\infty, +\infty)$;$\cos x, x \in (-\infty, +\infty)$;

$$\tan x, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}; \cot x, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

⑥ 反三角函数:$\arcsin x, x \in [-1, 1]$;$\arccos x, x \in [-1, 1]$;

$\arctan x, x \in \mathbf{R}$;$\operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}$.

定义 1.1.12(初等函数) 由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及复合而成并用一个式子表示的函数称初等函数.

二、重要性质、定理、公式

1. 关于奇偶性

定理 1.1.1(关于函数的奇偶性)

(1) 奇 × 奇为偶函数; (2) 奇 × 偶为奇函数;

(3) 偶×偶为偶函数；

(4) 奇函数与奇函数复合为奇函数；

(5) 偶函数与偶函数复合为偶函数；

(6) 偶函数与奇函数复合为偶函数；

(7) 任一定义在对称于原点的数集 X 上的函数 $f(x)$，必可分解成一奇一偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

2. 关于有界性、无界性的若干充分条件

定理 1.1.2(关于有界、无界的充分条件)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在，则存在 $\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$f(x)$ 有界；对 $x\to x_0^+$，$x\to x_0$ 有类似的结论.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界；对 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 有类似的结论.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(4) 设 $f(x)$ 在数集 U 上有最大值(最小值)，则 $f(x)$ 在 U 上有上(下)界.

(5) 有界函数与有界函数之和、积均为有界函数.

以上均为充分条件，其逆均不成立.

(6) 设 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $\square$ 的去心邻域内无界. 但其逆不成立. 这里的 $\square$ 可以是 $x_0,x_0^-,x_0^+,\infty,-\infty,+\infty$ 中 6 种情形的任一种.

例题分析

一、求分段函数的复合函数

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|<1\\ 0, & \text{当 } |x|\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } |x|\leqslant 2\\ 1, & \text{当 } |x|>2\end{cases}$.

则 $f(g(x))=$ ______，$g(f(x))=$ ______.

解题思路 求 $f(g(x))$ 时，由外层函数 f，写出复合函数的表达式，并同时写出中间变量(即内层函数 g)的取值范围；然后按内层函数，即 $g(x)$ 的分段表达式，过渡到自变量的变化范围，得到分段表达式. 对于求 $g(f(x))$ 亦类似.

【解】 应填 $f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|\leqslant 2\\ 0, & \text{当 } |x|>2\end{cases}$.　$g(f(x))\equiv 0, x\in(-\infty,+\infty)$.

由 $f(x)$ 的表达式，有 $f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |g(x)|<1\\ 0, & \text{当 } |g(x)|\geqslant 1\end{cases}$.

再由 $g(x)$ 的表达式知，$|g(x)|<1\Leftrightarrow|x|\leqslant 2$；$|g(x)|\geqslant 1\Leftrightarrow|x|>2$. 从而得到

$$f(g(x))=\begin{cases}2, & \text{当 } |x|\leqslant 2\\ 0, & \text{当 } |x|>2\end{cases}.$$

由 $g(x)$ 的表达式，有 $g(f(x))=\begin{cases}0, & \text{当 } |f(x)|\leqslant 2\\ 1, & \text{当 } |f(x)|>2\end{cases}$.

再由 $f(x)$ 的表达式知，$|f(x)|\leqslant 2\Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$；$|f(x)|>2\Leftrightarrow x\in\varnothing$. 所以

$$g(f(x))\equiv 0, \text{当 } x\in(-\infty,+\infty).$$

【评注】 这个例子中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义，分别有间断点

$x=\pm 1$ 与 $x=\pm 2$，但复合函数 $g(f(x))\equiv 0$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上却是连续的.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & \text{当 } x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{当 } x>1\end{cases}$，则 $f(f(x))=$ ______.

解题思路 按例 1 的方法处理.

【解】 应填 $f(f(x))=\begin{cases}(x^2+2x+2)^2, & \text{当 } -2\leqslant x\leqslant 0\\ \left(\dfrac{2-x}{1-x}\right)^2, & \text{当 } x>1\\ -\dfrac{1}{x^2+2x}, & \text{当 } x<-2 \text{ 或 } 0<x\leqslant 1\end{cases}$.

由 $f(x)$ 的表达式，有

$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)+1)^2, & \text{当 } f(x)\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & \text{当 } f(x)>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}((x+1)^2+1)^2, & \text{当}(x+1)^2\leqslant 1, x\leqslant 1\\ \left(\dfrac{1}{1-x}+1\right)^2, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1, x>1\\ \dfrac{1}{1-(x+1)^2}, & \text{当}(x+1)^2>1, x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}>1, x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x^2+2x+2)^2, & \text{当 } x^2+2x\leqslant 0, x\leqslant 1\\ \left(\dfrac{2-x}{1-x}\right)^2, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1, x>1\\ -\dfrac{1}{x^2+2x}, & \text{当 } x^2+2x>0, x\leqslant 1\\ -\dfrac{1-x}{x}, & \text{当}\dfrac{1}{1-x}>1, x>1\end{cases}.$$

分别写出各段自变量的取值范围，易见第 4 式中 $\dfrac{1}{1-x}>1$ 与 $x>1$ 的交集为空集. 最后化简如上所填.

二、由函数的奇偶性与周期性构造函数

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且是周期为 2 的奇函数. 已知 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2+x+1$，则当 $x\in[-2,0]$ 时 $f(x)=$ ______.

解题思路 从几何图形可以得到如下解题途径. 由周期 2，将 $x\in(2,3)$ 时的 $f(x)$ 的图形向左分别移 2 个单位与 4 个单位便可分别得到 $x\in(0,1)$ 与 $x\in(-2,-1)$ 时的 $f(x)$ 的图形；再由 $x\in(0,1)$ 时的 $f(x)$ 及奇函数的性质，便得 $x\in(-1,0)$ 时的 $f(x)$. 从而便得到 $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$ 时的 $f(x)$. 再计算出 $f(0)$，$f(-1)$，$f(-2)$ 的值即可. 实际操作时按下述步骤进行.

【解】 应填 $f(x)=\begin{cases}x^2+9x+21, & 当 x\in(-2,-1)\\ 0, & 当 x=-2,-1,0\\ -x^2+5x-7, & 当 x\in(-1,0)\end{cases}$.

设 $x\in(0,1)$,有 $x+2\in(2,3)$,由周期性,有

$$f(x)=f(x+2)=(x+2)^2+(x+2)+1=x^2+5x+7;$$

设 $x\in(-2,-1)$,有 $x+4\in(2,3)$,由周期性,有

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+(x+4)+1=x^2+9x+21;$$

设 $x\in(-1,0)$,有 $-x\in(0,1)$,由奇函数性质,有

$$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+5(-x)+7]=-x^2+5x-7.$$

最后得 $f(x)=\begin{cases}x^2+9x+21, & 当 x\in(-2,-1)\\ -x^2+5x-7, & 当 x\in(-1,0)\end{cases}$.

题设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义且为奇函数,故 $f(0)=0$. 又因周期为 2,从而 $f(-2)=f(0)=0$. 并且 $f(-1)=-f(1)=-[f(1-2)]=-f(-1)$,所以 $f(-1)=0$. 结论如上所填.

三、求反函数的表达式

【例 4】 求函数 $y=f(x)=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 及其定义域.

解题思路 由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$. 在具体操作上,有一些技术上的问题及一些细节,请看解法.

【解】 因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

由 $y=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}$,易见,当 $x>0$ 时 $y<0$,当 $x<0$ 时 $y>0$. 为了解出 x,两边平方,得

$$\begin{aligned}y^2&=x^2-x+1+x^2+x+1-2\sqrt{(x^2+1)^2-x^2}\\&=2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

移项,得 $$2\sqrt{x^4+x^2+1}=2(x^2+1)-y^2,$$

两边再平方,化简,得 $x^2(4-4y^2)=4y^2-y^4,x^2=\dfrac{y^2}{4}\left(\dfrac{4-y^2}{1-y^2}\right)$.

解出 x,并注意到 x 与 y 反号,得 $$x=-\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}}.\tag{1.2}$$

为了确定反函数(1.2)的定义域,为此要讨论直接函数的值域. 由(1.1)去证 $y^2<1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}y^2=1$. 若确实如此,则说明直接函数的值域为 $\{y\mid |y|<1\}$.

设 $y^2\geqslant 1$,即设 $2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1}\geqslant 1$,移项得 $2x^2+1\geqslant 2\sqrt{x^4+x^2+1}$,两边平方得 $4x^4+4x^2+1\geqslant 4(x^4+x^2+1)$,这是个矛盾. 所以 $y^2<1$. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}y^2&=\lim_{x\to\infty}(2(x^2+1)-2\sqrt{x^4+x^2+1})\\&=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1-(x^4+x^2+1)}{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}=1.\end{aligned}$$

所以直接函数的值域为 $\{y\mid |y|<1\}$,因此反函数(1.2)的定义域为 $\{y\mid |y|<1\}$. 改写记号,所以反函数为

$$y=-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}}\text{，定义域为}\{x \mid |x|<1\}.$$

【评注】 仅由(1.2)式还无法推知反函数(1.2)的定义域，而应该由"直接函数的值域为反函数的定义域"来确定反函数的定义域.

四、关于函数有界(无界)的讨论

【例 5】 当 $x\neq 0$ 时设 $f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$. 下述命题

① 对任意 $X>0$，在 $0<|x|<X$ 上 $f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)(x\neq 0)$ 上 $f(x)$ 无界.

② 在 $(-\infty,+\infty)(x\neq 0)$ 上 $f(x)$ 有界.

③ $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界，但 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$.

④ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\infty$.

正确的是

(A)①、③.　　(B)①、④.　　(C)②、③.　　(D)②、④.

解题思路　由定理 1.1.2 中关于有界性、无界性的若干充分条件来考虑 ①、②、③、④.

【解】 应选(C).

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，所以存在 $\delta>0$，在 $0<|x|<\delta$ 上 $f(x)$ 有界. 又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)x}=1$，所以存在 $X>0$，在 $|x|>X$ 上 $\dfrac{x^3-1}{(x^2+1)x}$ 有界. 而函数 $\sin x$ 是有界的，所以在 $|x|>X$ 上 $f(x)$ 有界. 而在区间 $[-X,-\delta]$，$[\delta,X]$ 上 $f(x)$ 是连续的，所以是有界的，于是知在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 是有界的. ② 正确.

以下证明 ③ 也是正确的. 对于任给的 $M>0$，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，有

$$g(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2},$$

当 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$ 时，$g(x_n)>M$. 即对于任给的 $M>0$，总存在 x_n，其中 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$(这种 n 总是有的)，使 $g(x_n)>M$，说明 $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界. 但另一方面，若取 $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则有 $g(x'_n)=0$. 此说明 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\neq\infty$. 所以 ③ 正确. 选(C).

【评注】 将来到第二章还会见到用导数讨论函数的有界(无界)问题.

☞2　极　限

内容精讲

一、定义

定义 1.2.1(数列的极限)　数列 $\{u_n\}$ 与常数 A，如果它们之间满足下列关系："对于任

意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N>0$,当(序号)$n>N$ 时,就有 $|u_n-A|<\varepsilon$",则称数列 $\{u_n\}$ 收敛,且收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$,也称"当 $n\to\infty$ 时 u_n 的极限为 A".

定义 1.2.2(函数的极限) 函数极限的定义有下述一些形式:

序号与记号	定义表述			
	对于任给	存在	当…时	就有
① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$
② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$	$\varepsilon>0$	$\delta>0$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$

以上 ① 中 ∞ 改为 $+\infty$ 或 $-\infty$,$|x|>X$ 分别改为 $x>X$ 或 $-x>X$(即 $x<-X$),就分别得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

以上 ② 中 $x\to x_0$ 改为 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$,$0<|x-x_0|<\delta$ 分别改为 $0<x-x_0<\delta$ 或 $-\delta<x-x_0<0$,就分别得到 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 的定义. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 分别称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的右、左极限,这两个极限也可简记为 $f(x_0^+)$ 与 $f(x_0^-)$.

【注】 对于 $\varepsilon>0$,X,$\delta>0$ 等等,有类似于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 中关于 $\varepsilon>0$,N 等等的说明.

定义 1.2.3(无穷小) 若 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$,则称 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 为无穷小.

这里的 $\square$ 可以是 x_0 或 x_0^+,x_0^-,或 ∞,$+\infty$,$-\infty$ 中的某一个(下同).

定义 1.2.4(无穷大) $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$ 的定义有下述一些形式:

序号与记号	定义表述			
	对于任给	存在	当…时	就有
③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$	$M>0$	$\delta>0$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|>M$
④ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$	$M>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)\|>M$

以上 ③ 中又可分为 $x\to x_0^+$ 与 $x\to x_0^-$;④ 中 $x\to\infty$ 又可细分为 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$,不再赘述.

【注】 虽然有时也将 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=\infty$ 说成 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 趋于无穷大,但它并不表示 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 存在极限.它属于极限不存在的范畴.

定义 1.2.5(无穷小的比较) 设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为两个无穷小,$\beta(x)\neq0$,$\alpha(x)$ 不恒等于 0. 设 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$,

(1) 若 $A\neq0$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小.

(2) 若 $A=1$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小,记成 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(3) 若 $A=0$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小,记成 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(4) 如果 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.