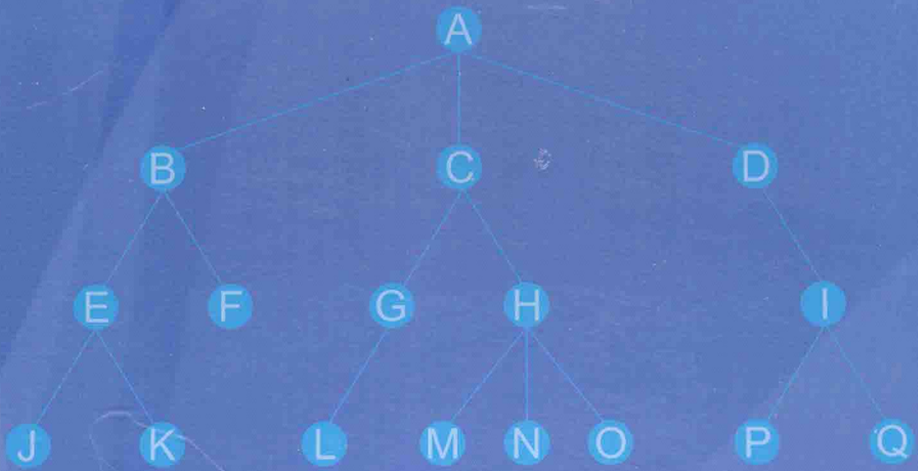

Operations Research

运筹学基础及应用

李敏 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

Operations Research

运筹学基础及应用

李敏　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础及应用/李敏编著.—武汉:武汉大学出版社,2014.5
ISBN 978-7-307-13138-5

Ⅰ.运… Ⅱ.李… Ⅲ.运筹学 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 072185 号

责任编辑:谢文涛　　责任校对:鄢春梅　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本:787×1092　1/16　印张:18.25　字数:428 千字　插页:1
版次:2014 年 5 月第 1 版　　2014 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-13138-5　　定价:36.00 元

前　　言

运筹学是20世纪40年代开始形成的一门新的学科。它用定性与定量分析的方法研究各种系统的优化途径和方案，为管理者提供各种决策方案的科学依据，因此运筹学是现代化管理必不可少的工具。

本书着重介绍了运筹学的几个分支：线性规划及其灵敏度分析、运输问题、整数规划、目标规划、图与网络分析和决策论。讨论了这几个分支所解决的问题及解决问题的思路和常用算法。

本书有以下特色：在理论叙述与论证方面尽量简洁清晰，避免冗长的证明；理论和算法注重了实用性，大部分章节都给出了一定量的应用举例；在内容的深度上尽量使只具有高等数学、线性代数和概率论基础知识的读者能顺利地理解；注重了数学模型的建立分析；注重了计算机软件求解方法的介绍和结果分析；注重了学生“学以致用”能力的培养，在每章都给出了一定量的讨论、思考题和案例习题。因此，本书能培养学生的“优化”意识、思考能力和决策能力，特别是建模能力和用计算机软件求解实际问题的能力。

本书可作为高等学校理工科本科或大专院校的教材，也可作为从事实际工作的管理人员，工程技术人员等的学习参考书。

本书是由多人合作完成的，其中绪论、第1–3章及每章的软件操作由李敏执笔，第4、5、7章由赵秀菊执笔，第6章由周伟刚执笔。

在本书的编写过程中，参考了大量的国内外有关文献，但由于编者的能力有限，书中的不妥与错误之处，欢迎广大读者和专家学者批评指正并提出宝贝意见。

编　　者

2014年3月

目　录

绪　论……………………………………………………………………………… 1

第 1 章　线性规划 ……………………………………………………………… 5

1.1　线性规划问题的引入与数学模型 ………………………………………… 5

1.1.1　问题的引入 ………………………………………………………… 5

1.1.2　线性规划数学模型的几种形式 …………………………………… 7

1.2　线性规划解的概念及图解法 ……………………………………………… 9

1.2.1　解的概念 …………………………………………………………… 9

1.2.2　图解法……………………………………………………………… 11

1.3　线性规划问题的解的性质………………………………………………… 12

1.3.1　基本概念…………………………………………………………… 12

1.3.2　解的性质…………………………………………………………… 13

1.4　单纯形法…………………………………………………………………… 14

1.4.1　引例………………………………………………………………… 14

1.4.2　单纯形法的一般描述……………………………………………… 16

1.4.3　单纯形法的表格计算法…………………………………………… 19

1.5　人工变量法………………………………………………………………… 25

1.5.1　大 M 法 ………………………………………………………… 26

1.5.2　两阶段法…………………………………………………………… 28

1.6　退化与循环的处理 ………………………………………………………… 32

1.7　单纯形法的矩阵描述及改进 ……………………………………………… 33

1.7.1　矩阵描述…………………………………………………………… 33

1.7.2　单纯形法的改进…………………………………………………… 34

1.8　线性规划应用建模举例…………………………………………………… 36

1.8.1　人力资源分配问题………………………………………………… 37

1.8.2　生产计划问题……………………………………………………… 38

1.8.3　合理下料问题……………………………………………………… 39

1.8.4　合理配料问题……………………………………………………… 39

1.8.5　连续投资问题……………………………………………………… 40

1.8.6　运输问题…………………………………………………………… 40

1.8.7 最大流问题 …… 41
1.9 软件操作实践及案例建模分析 …… 42
1.9.1 “管理运筹学”2.0 求解线性规划问题 …… 42
1.9.2 Excel 求解线性规划问题 …… 46
1.9.3 Lindo 软件求解线性规划问题 …… 51
1.9.4 Matlab 求解线性规划问题 …… 54
讨论、思考题 …… 56
本章小结 …… 56
习　题 …… 57
案　例 …… 61

第 2 章　线性规划的对偶理论与灵敏度分析 …… 66
2.1 线性规划对偶问题的引入与数学模型 …… 66
2.1.1 问题的提出 …… 66
2.1.2 对偶问题的数学模型 …… 68
2.2 线性规划的对偶理论 …… 71
2.3 对偶问题的最优解的经济含义——影子价格 …… 76
2.3.1 影子价格的定义 …… 76
2.3.2 影子价格的经济意义 …… 76
2.4 对偶单纯形法 …… 77
2.4.1 对偶单纯形法的基本思路 …… 77
2.4.2 对偶单纯形法的计算步骤 …… 78
2.4.3 对偶单纯形法的进一步说明 …… 80
2.5 灵敏度分析 …… 80
2.5.1 单个价值系数 c_j 的变化分析 …… 81
2.5.2 单个资源系数 b_i 的变化分析 …… 83
2.5.3 多个价值系数或资源系数的变化分析 …… 85
2.5.4 技术系数 a_{ij} 的变化分析 …… 86
2.5.5 增加新变量的灵敏度分析 …… 88
2.5.6 增加新约束条件的灵敏度分析 …… 89
2.6 软件求解结果分析 …… 91
2.6.1 “管理运筹学”2.0 软件求解结果分析 …… 91
2.6.2 Excel 求解结果分析 …… 92
2.6.3 Lindo 软件求解结果分析 …… 93
讨论、思考题 …… 94
本章小结 …… 95
习　题 …… 95

第 3 章　运输问题……101
3.1　运输问题的数学模型及特征……101
3.1.1　运输问题的数学模型……101
3.1.2　运输问题的特征……103
3.2　表上作业法……104
3.2.1　初始可行方案(即初始基可行解)的确定……105
3.2.2　最优性检验……110
3.2.3　调运方案的调整(即基可行解的改进)……112
3.2.4　表上作业法计算过程中需注意的问题……115
3.3　运输问题的扩展……116
3.3.1　目标极大化的运输问题……116
3.3.2　产销不平衡运输问题……117
3.3.3　无运输线路的运输问题……118
3.3.4　需求量不确定的运输问题……120
3.3.5　转运问题……121
3.4　运输模型的应用举例……123
3.5　软件操作实践及案例建模分析……126
3.5.1　“管理运筹学”2.0 软件求解运输问题……126
3.5.2　Excel 求解运输问题……128
3.5.3　Lindo 软件求解运输问题……129
3.5.4　Matlab 软件求解运输问题……131
讨论、思考题……132
本章小结……133
习　题……133
案　例……138

第 4 章　整数规划……142
4.1　整数规划问题……142
4.1.1　整数规划数学模型的一般形式……142
4.1.2　整数规划的分类及建模举例……143
4.2　整数规划的常用解法……145
4.2.1　整数规划与其松弛问题……145
4.2.2　分枝定界法……146
4.2.3　割平面法……151
4.3　0-1 规划……155
4.3.1　需要定义 0-1 变量的问题示例……156
4.3.2　0-1 规划的解法……157
4.4　指派问题与匈牙利法……159

4.4.1 指派问题的数学模型 …… 160
4.4.2 匈牙利法的基本原理 …… 160
4.4.3 匈牙利法的求解步骤 …… 162
4.4.4 匈牙利法求解示例 …… 163
4.4.5 非标准形式的指派问题 …… 166
4.5 软件操作实践及案例建模分析 …… 168
4.5.1 “管理运筹学”2.0 求解整数规划问题 …… 168
4.5.2 Excel 求解整数规划问题 …… 171
4.5.3 Lindo 软件求解整数规划问题 …… 172
4.5.4 Matlab 求解整数规划问题 …… 174
讨论、思考题 …… 177
本章小结 …… 177
习 题 …… 177
案 例 …… 181

第 5 章 目标规划 …… 184
5.1 目标规划概述 …… 184
5.1.1 目标规划的提出 …… 184
5.1.2 线性规划的不足 …… 186
5.1.3 目标规划的基本概念 …… 186
5.1.4 目标规划与线性规划的比较 …… 189
5.2 目标规划的数学模型 …… 189
5.2.1 目标规划的一般模型 …… 189
5.2.2 目标规划建模的步骤 …… 190
5.3 目标规划的解法 …… 190
5.3.1 图解法 …… 190
5.3.2 序贯式法 …… 192
5.3.3 单纯形法 …… 193
5.4 目标规划应用建模举例 …… 196
5.5 软件操作实践及案例建模分析 …… 201
5.5.1 “管理运筹学”2.0 求解目标规划问题 …… 201
5.5.2 Excel 求解目标规划问题 …… 201
5.5.3 Lindo 软件求解目标规划问题 …… 203
5.5.4 用 Matlab 求解目标规划问题 …… 205
讨论、思考题 …… 206
本章小结 …… 206
习 题 …… 206
案 例 …… 210

第 6 章 图与网络分析 ······ 213

6.1 图的基本概念 ······ 214

6.1.1 图的基本概念 ······ 214

6.1.2 图的模型应用举例 ······ 215

6.1.3 图的基本性质 ······ 216

6.1.4 图的矩阵描述 ······ 216

6.2 树 ······ 218

6.2.1 树及其性质 ······ 218

6.2.2 图的最小部分树(支撑树) ······ 219

6.2.3 图的最小支撑树的应用举例 ······ 221

6.3 最短路问题 ······ 221

6.3.1 引例 ······ 221

6.3.2 最短路算法 ······ 222

6.3.3 最短路问题的应用建模举例 ······ 224

6.4 网络最大流问题 ······ 226

6.4.1 基本概念与基本定理 ······ 226

6.4.2 求最大流的标号算法 ······ 230

6.5 中国邮递员问题 ······ 233

6.5.1 一笔画问题 ······ 233

6.5.2 奇偶点图上作业法 ······ 234

6.6 软件操作实践及案例建模分析 ······ 236

6.6.1 最小支撑树的软件求解 ······ 236

6.6.2 最短路问题的软件求解 ······ 237

6.6.3 最大流问题的软件求解 ······ 239

讨论、思考题 ······ 239

本章小结 ······ 240

习 题 ······ 240

第 7 章 决策分析 ······ 242

7.1 决策分析的概论 ······ 242

7.1.1 决策的发展历史及流派 ······ 242

7.1.2 决策的定义 ······ 243

7.1.3 决策问题的要素 ······ 244

7.1.4 决策的分类 ······ 245

7.1.5 决策的基本步骤 ······ 246

7.1.6 决策的原则 ······ 247

7.2 不确定型决策 ······ 247

7.2.1 悲观主义准则 ······ 248

7.2.2　乐观主义准则(最大最大法则) ………………………………………… 249
7.2.3　折中主义准则(乐观系数准则) ………………………………………… 250
7.2.4　等可能性准则(平均收益最大的原则) ………………………………… 251
7.2.5　最小后悔值准则 ………………………………………………………… 252
7.3　风险型决策 ……………………………………………………………… 254
7.3.1　最大可能准则 …………………………………………………………… 254
7.3.2　期望值准则 ……………………………………………………………… 255
7.3.3　贝叶斯决策法(后验概率方法) ………………………………………… 260
7.4　层次分析法 ……………………………………………………………… 264
7.5　决策分析的应用举例 …………………………………………………… 270
7.6　软件操作实践及案例分析 ……………………………………………… 273
讨论、思考题 ………………………………………………………………… 274
本章小结……………………………………………………………………… 274
习　　题……………………………………………………………………… 275
案　　例……………………………………………………………………… 278

参考文献……………………………………………………………………… 281

绪　论

1. 运筹学简述

运筹学是用数学方法研究各种系统优化问题的学科，它是现代管理科学系统工程的基础理论之一。运筹学在英国称为 Operational Research ，在美国叫做 Operations Research ，中国学者参照《史记·汉高祖本纪》中的词句“运筹帷幄之中，决胜千里之外”译为运筹学(以下简称 OR)。

(1)产生：运筹学作为科学名字出现在20世纪30年代末。当时英国和美国为了对付德国的空袭，采用雷达作为防空系统的一部分，虽然技术上是可行的，但实际运用时效果却并不好。为此一些科学家研究如何合理运用雷达，开创了一类新问题的研究，因为它与研究技术问题不同，就称之为“运用研究”。

(2)发展：第二次世界大战期间，英国和美国在军队中成立了一些专门小组，开展有关运筹学问题的研究。例如，研究反潜深水炸弹的合理爆炸深度问题的结果使得德国潜艇被摧毁数量增加300%；研究船只在受敌机攻击时如何转向问题的结果使得船只在受敌机攻击时，中弹数由47%降到29%。当时研究和解决的问题都是短期的和战术性的。第二次世界大战后在英、美军队中相继成立了更为正式的运筹研究组织，到20世纪50年代后，运筹学的理论进一步得到了完善，随着电子计算机的问世，运筹学除军事方面的应用研究以外，相继在工业、农业、经济和社会问题等各领域都有了广泛的应用。

(3)运筹学的分支：如数学规划(线性规划、非线性规则、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论(随机服务系统理论)、存储论、对策论、决策论、维修更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等。

(4)我国运筹学的发展史：我国古代很早就有运筹学的思想和理念，如齐王赛马、丁渭修皇宫、沈括运军粮等故事就充分地体现了朴素的运筹思想。在20世纪50年代中期钱学森、许国志等教授将运筹学作为一门学科由西方引入我国，并结合我国的特点在国内推广应用。在经济数学方面，特别是投入产出表的研究和应用开展较早。质量控制(后改为质量管理)的应用也有特色。但是，至今运筹学在我国的发展情况与世界其他国家相比还有一定的差距，特别是在如何运用运筹学思想指导实际问题方面。

2. 运筹学的定义和应用原则

(1)运筹学的定义：运筹学至今还没有统一且确切的定义。如莫斯(P. M. Morse)和金博尔(G. E. Kimball)曾对运筹学下的定义是：“为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。”它首先强调的是科学方法，这含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而是可用于整个一类问题上，并能传授和有组织地活动。它强调以量化为基础，必然要用数学。但任何决策都包含定量和定性两方面，而定性方面

又不能简单地用数学表示，如政治、社会等因素，只有综合多种因素的决策才是全面的。还有人认为：运筹学是一门应用科学，它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供决策依据。这个定义说明了运筹学具有多学科交叉的特点。

运筹学的不同定义，虽然强调的侧重点不同，但总的含义是一致的。即运筹学的研究对象是各种有组织的系统；研究的问题是能用数量表示与系统各项活动有关又带有运用、筹划、安排、控制和规划方面的问题；研究的任务是在现有的条件下，根据问题的要求，对活动中的复杂数据进行研究，归纳成模型，在运用有关的原理和方法求出解决问题的最优方案，以实现预定的目标。

(2)运筹学的六条原则：为了有效地应用运筹学，前英国运筹学学会会长托姆林森提出六条原则：

①合伙原则。是指运筹学工作者要和各方面人员，尤其是同实际部门工作者合作。

② 催化原则。在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法。

③ 互相渗透原则。要求多部门彼此渗透地考虑问题，而不是只局限于本部门。

④ 独立原则。在研究问题时，不应受某人或某部门的特殊政策所左右，应独立从事工作。

⑤ 宽容原则。解决问题的思路要宽，方法要多，而不是局限于某种特定的方法。

⑥ 平衡原则。要考虑各种矛盾和关系的平衡。

3. 运筹学的工作步骤

运筹学在解决大量实际问题过程中形成了自己的工作步骤。

(1) 提出并形成问题。即首先要提出问题，弄清问题的目标、可能的约束、可控变量以及有关参数等。

(2) 建立模型。即把问题中可控变量、参数和目标与约束之间的关系用数学语言及合适的方法建立成一定的模型。

(3)分析并求解。根据所建立模型的性质和数学特征，采用各种手段(主要是数学方法，也可用其他方法) 求解模型。解可以是最优解、次优解、满意解。复杂模型的求解需用计算机，解的精度要求可由决策者提出。

(4) 解的检验。首先检查求解步骤和程序有无错误，然后检查解是否能反映现实问题。

(5)模型的评价。通过一定的方法，如灵敏度分析法、相关分析法、参数规划法等对模型的结构和蚕食进行评价，以考虑是否要修改模型。

(6) 解的实施。是指将解用到实际中必须考虑到实施的问题，如向实际部门讲清解的用法，在实施中可能产生的问题和修改。

以上过程应反复进行。

4. 运筹学的模型

运筹学在解决实际问题时，按研究对象的不同可构造不同的模型。模型是研究者对实际问题经过思考后用符号、文字、图表、关系式以及实体模样描述所认识到的客观对象。模型的有关参数和关系式要比较容易改变，使之有助于问题的分析和研究。同时利用模型

还可以进行一定预测、灵敏度分析等。

模型有三种基本形式：形象模型、模拟模型和符号或数学模型。目前用得最多的是符号或数学模型。

(1)建模的常用方法和思路。

① 直接分析法。按研究者对问题内在机理的认识直接构造出模型。运筹学中已有不少现存的模型，如线性规划模型、投入产出模型、排队模型、存储模型、决策和对策模型等。这些模型都有很好的求解方法及求解的软件，但用这些现存的模型研究问题时，要注意不能生搬硬套。

② 类比方法。有些问题可以用不同方法构造出模型，而这些模型的结构性质是类同的，这就可以互相类比。

③ 试验分析法。当有些问题的机理不清，又不能做大量试验来获得数据时，只能通过做局部试验的数据加上分析来构造模型。

④ 数据分析法。根据搜集到的与问题密切相关的大量数据，或通过某些试验获得大量数据，这就可以用统计分析法建模。

⑤构想法。当有些问题的机理不清，又缺少数据，更不能做试验来获得数据时，如一些社会、经济、军事问题等。此时人们只能根据已有的知识、经验和某些研究的基础，对于将来可能发生的情况给出逻辑上合理的设想和描述。然后用已有的方法构造模型，并不断修正完善，直至比较满意为止。

(2)模型的一般数学形式。

目标的评价准则　　$Z=f(x_i, y_j, \xi_k)$

约束条件　　$g(x_i, y_j, \xi_k) \geqslant (\leqslant, =) 0$

式中：x_i——可控变量；

y_k——已知参数；

ξ_k——随机因素。

目标的评价准则一般要求达到最佳(最大或最小)、适中、满意等。准则可以是单一的，也可是多个的。约束条件可以没有，也可有多个。当模型中无随机因素时，称它为确定性模型，否则为随机模型。

5. 运筹学的应用

运筹学早期的应用主要在军事领域，第二次世界大战后运筹学的应用转向民用，这里只列出一些常见的应用领域：生产计划；市场销售；库存管理；人事管理；运输问题；财政和会计；设备维修、更新和可靠性、项目选择和评价；工程的优化设计；城市管理；城市垃圾的清扫、搬运和处理；城市供水和污水处理系统的规划……

6. 运筹学的发展趋势

美国前运筹学会主席邦特(S. Bonder)认为，运筹学应在三个领域发展：运筹学应用、运筹科学和运筹数学。

从20世纪70年代末至20世纪80年代初不少运筹学家提出：要大家注意研究大系统，注意与系统分析相结合。

20世纪90年代和21世纪初期，出现了两个很重要的趋势：一个是软运筹学崛起；

另一个是与优化有关的，即软计算。这种方法不追求严格最优，具有启发式思路，并借用来自生物学、物理学和其他学科的思想来解寻优方法。

总之运筹学还在不断发展中，新的思想、观点和方法不断地出现。本书只介绍了一些基本的运筹学思想和方法，是作为学习运筹学的读者需要掌握的知识。

第 1 章　线性规划

线性规划是运筹学众多分支中的一个重要分支。线性规划理论是运筹学许多分支——包含整数规划、目标规划、网络流、几何规划、凸规划和非线性规划等的基础。它通常解决两类问题：一是当给定任务后，怎样合理安排，统筹兼顾，用最小的费用(如原材料、设备、资金、人工及时间等)完成任务；二是在资源条件一定的限制下，怎样组织和安排生产获得最优的效益(如产品数量最多 、利润最大等)。

自美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig) 于 1947 年提出解决一般线性规划问题的方法——单纯形法以来，在理论上线性规划趋向成熟，在计算方法、实际应用中都有了巨大的进步。特别是随着计算机技术的进步，当应用电子计算机能处理含有成千上万个约束和变量的线性规划问题后，线性规划在应用领域上有了更大的发展。涉及的领域主要有：军事、商业、工业、农业、交通运输业、经济计划和管理决策等。

【关键词汇】

线性规划	(Linear Programming)	目标函数	(Objective Function)
约束集合	(Constraint Set)	可行域	(Feasible Region)
可行解	(Feasible Solution)	右端项	(Right-hand Side)
图解法	(Graphical Solution)	基	(Basis)
基变量	(Basis Variable)	非基变量	(Non-basis Variable)
基本解	(Basic Solution)	基本可行解	(Basic Feasible Solution)
最优解	(Optimal Solution)	最优值	(Optimal Value)
单纯形法	(Simplex Method)	决策变量	(Decision Variable)
大 M 法	(The Big M Method)	两阶段法	(The Two-phase Method)

1.1　线性规划问题的引入与数学模型

1.1.1　问题的引入

在实际的生产和经营管理活动中经常要考虑一类问题，即为了得到最好的经济效益，应该怎样合理地利用现有的各类有限资源。

【例 1】某工厂计划生产 A，B 两种产品，已知生产 A，B 每单位产品所需要的设备台时数和Ⅰ、Ⅱ两种原材料的消耗数及 A，B 每单位产品的获利数，如表 1-1 所示。

表 1-1

	A	B	
设　备	3	3	9 台时
原材料 Ⅰ	4	3	24kg
原材料 Ⅱ	1	4	16kg
获　利	3	4	

解：问应怎样安排生产可使工厂获利最多？

这个问题可以用如下的数学模型来描述，设产品 A，B 的产量分别为 x_1，x_2。由于设备的有效台时是 9，所以在确定产品 A，B 的产量时，要考虑到不能超过该有效台时数，即用不等式可表示为

$$3x_1+3x_2\leqslant 9$$

同理，由于原材料 Ⅰ 、Ⅱ 的限量，可得不等式：

$$4x_1+3x_2\leqslant 24$$

$$x_1+4x_2\leqslant 16$$

该工厂的目标是在不超过所有资源量的条件下，怎样确定产品 A，B 的产量 x_1，x_2 以使得利润最大。若用 Z 表示利润，这时 $Z=3x_1+4x_2$。综上所述，则该问题可用如下数学模型表示：

$$\text{目标函数}\quad \max\ z=3x_1+4x_2$$

$$\text{约束条件:}\quad \begin{cases} 3x_1+3x_2\leqslant 9 \\ 4x_1+3x_2\leqslant 24 \\ x_1+4x_2\leqslant 16 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

【例 2】 假设一个成人每天所需要摄取的维生素 A，B，C 的最少量及四种食物甲、乙、丙、丁每单位中相应的维生素的含量如表 1-2 所示，问为了既可以满足人体的需要又可使花费最少，该怎样搭配这些食物？

表 1-2

	甲	乙	丙	丁	每天的需求量
维生素 A(mg)	1000	1500	1700	3260	4000
维生素 B(mg)	0. 6	0. 2	0. 8	0. 4	1
维生素 C(mg)	16	7	1	30	30
成本(元)	0. 8	0. 5	0. 9	1. 4	

解：设 x_1，x_2，x_3，x_4 分别表示甲、乙、丙、丁四种食物的搭配量，则数学模型为

目标函数 $\min Z=0.8x_1+0.5x_2+0.9x_3+1.4x_4$

约束条件：$\begin{cases}1000x_1+1500x_2+1700x_3+3260x_4\geqslant 4000\\0.6x_1+0.2x_2+0.8x_3+0.4x_4\geqslant 1\\16x_1+7x_2+x_3+30x_4\geqslant 30\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$

从上面两个例子可以看出，它们的数学模型具有一些共同特征：

(1)问题均可用一组表示决策的变量(x_1，x_2，…，x_n)来表示某一方案，变量的每组值就表示一个具体的方案。这些决策变量的取值均为非负和连续的。

(2)问题均有一些可用线性不等式或线性等式来表示的约束条件。

(3)问题均有一个具体的目标，且它可表示成关于决策变量的一个线性函数(称之为目标函数)。按问题的要求不同，目标函数值要达到最大或最小。

通常称目标函数和约束条件都是关于变量的线性式子的模型为线性规划。

1.1.2 线性规划数学模型的几种形式

1. 一般形式

$$\max\ (\min)\ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_1\\\quad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_m\\x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}\qquad\begin{matrix}(1\text{-}2)\\ \\(1\text{-}3)\end{matrix}$$

在上述的模型中，式(1-1)称为线性规划的目标函数，式(1-2)和(1-3)称为线性规划的约束条件。称系数 c_j 为价值系数(或为目标函数系数)；称系数 a_{ij} 和 b_i($i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n)分别为技术系数(或为约束系数)和资源系数(或为右端常数项系数)，这三类系数都是常量。称 x_1，x_2，…，x_n 为决策变量。式(1-3)也被称为决策变量的非负约束，但在实际问题中，也有部分决策变量允许取任何实数，此时不能硬性规定其必须为非负的。符号 s. t. 是“subject to”的缩写。

上述模型可以简写为

$$\max\ (\min)\ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(=,\ \geqslant)\ b_i & (i=1,\ 2\cdots,\ m)\\x_j\geqslant 0 & (j=1,\ 2\cdots,\ n)\end{cases}$$

2. 矩阵形式和向量形式

$$\max\ (\min)\ Z=CX \qquad\qquad \max\ (\min)\ Z=CX$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}AX\leqslant(=,\ \geqslant)\ b\\X\geqslant 0\end{cases}\qquad \text{s. t.}\begin{cases}\sum p_jx_j\leqslant(=,\ \geqslant)\ b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

式中：$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots c_n)$，$X=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}$，$P_j=(a_{1j},\ \cdots,\ a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$b=(b_1,\ \cdots,\ b_m)^{\mathrm{T}}$