高等学校教材

概率论与数理统计

主编　李晓莉　张雅文

高等教育出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主编　李晓莉　张雅文
编者（姓氏笔画为序）
王开永　王林芳　李秋芳
程毛林　董迎辉

高等教育出版社·北京

内容简介

本书包括概率论与数理统计两部分内容，前四章为概率论部分，主要内容有随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；后四章为数理统计部分，主要内容有数理统计的基本概念及其抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。

本书结合作者多年教学经验与实践在教学内容上做了一些有益的处理和尝试。各章末的小结，能够帮助读者更好地了解和掌握每章内容及学习重点、难点。

本书可供高等学校理工科、经管类等本科专业作为教材或教学参考书使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 李晓莉，张雅文主编. -- 北京：高等教育出版社，2014. 8

ISBN 978 - 7 - 04 - 040408 - 1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… ②张… Ⅲ. ①概率论 - 高等学校 - 教材②数理统计 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 160925 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 杨 波　　封面设计 张 志　　版式设计 余 杨

插图绘制 邓 超　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市春园印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17	版　　次	2014 年 8 月第 1 版
字　　数	310 千字	印　　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	25.10 元

物 料 号　40408-00

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的重要数学分支，它的基本概念、理论和方法在自然科学领域和社会科学领域中有着极为广泛的应用。因此，概率论与数理统计已成为高等学校理、工、农、经管等各专业的一门重要基础课程。

通过本课程的学习，使学生初步掌握处理随机现象的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。正是基于这样的教学目的，所以我们在编写本教材时既保持了理论的严谨性，也兼顾了通俗性和直观性。在选材和叙述上尽量从实际出发，由浅入深，由具体到抽象，由一般到特殊，力求语言精练，通俗易懂。部分章节介绍了相关统计方法在Excel中的实现，使学生能够利用计算机完成相应的统计计算，从而增强学生解决实际问题的动手能力，对学生创新能力的培养和综合素质的提高也起到一定的作用。

本书内容符合教育部最新制订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，可供高等学校理工科、经管类等本科专业作为教材或教学参考书使用。各章末的小结，能够帮助读者更好地了解和掌握每章内容及学习重点、难点。每章末配备有适量的习题，供读者巩固所学知识使用。

本书由李晓莉和张雅文主编，参加编写人员及编写章节如下：李晓莉编写第一、八章，王开永编写第二章，董迎辉编写第三章，王林芳编写第四章，李秋芳编写第五章，张雅文编写第六章，程毛林编写第七章。

全书最后由李晓莉、张雅文统稿，书中插图由杜大刚、邢溯完成。

在本书的编写过程中，得到许多同行、同事、朋友及家人的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢。

限于编者的水平，本书难免有不妥之处，敬请同行及专家批评指正。

编　者

2013年12月

目录

第一章

随机事件与概率

概率论是研究随机现象统计规律的一门数学分支，具有十分丰富的内容，在许多领域都有广泛而深入的应用．本章主要介绍概率论中的基本概念、概率的基本性质以及概率计算中常用的几个公式．重点是掌握概率的概念、随机事件概率的计算、概率基本公式及应用，难点是如何利用概率的性质和基本公式建立实际问题的概率模型，并解决实际问题．

§1.1　样本空间与随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

在自然界和人类社会活动中，存在着这样两类不同的现象，一类表现为在一定的条件下必然会发生或者必然不会发生，比如，在地球上向上抛掷一个铁球，必定会落在地面，在标准大气压下把水加热至100℃必然沸腾，在一个仅装有白球的箱中取出的球一定不是红球等，这类现象称之为必然现象或确定性现象．另一类现象表现为在一定的条件下，可能会出现这样的结果也可能会出现那样的结果，试验的结果不确定．比如，掷一枚质地均匀的骰子出现的点数，从一批产品中任取一件是否为合格品，某十字路口一天之中发生汽车意外碰撞的次数，一局游戏中的得分等，这类现象称之为**随机现象**．随机现象在个别的试验或观察中结果是不确定的，但在大量重复的试验中，会呈现某种规律性．概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学学科．

研究随机现象的统计规律性，必然要对客观现象进行大量的观察或试验，我们把在相同的条件下可以重复观察或试验的随机现象称为**随机试验**，简称**试验**，通常用字母 E 表示．

随机试验满足如下条件：

（1）试验可以在相同条件下重复进行．

（2）每次试验的可能结果不止一个，但试验的所有可能结果是明确的．

(3) 试验前哪个结果出现不确定.

例 1.1.1 随机试验的例子:

E_1: 掷一枚硬币，考察哪个面向上.

E_2: 掷一枚骰子，考察出现的点数.

E_3: 观察一分钟内某十字路口通过的汽车数量.

E_4: 考虑某种型号的电子元件的使用寿命.

1.1.2 样本空间与随机事件

对于随机试验 E，我们把所出现的每一个可能结果称之为**样本点**，记为 ω，而所有的样本点构成的集合称之为**样本空间**，记为 Ω.

例 1.1.2 表示下面随机试验的样本空间:

(1) 掷一枚硬币，考察哪个面向上，样本点有两个，ω_1 =“正面向上”，ω_2 =“反面向上”，样本空间是 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}$.

(2) 掷一枚均匀的骰子，观察出现的点数，有 6 个样本点，则样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(3) 观察一分钟内某十字路口通过的汽车数量，汽车数量可以是 $0,1,2,\cdots$，所以样本空间表示为 $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(4) 考虑某种型号的电子元件的使用寿命，如果以 t 表示电子元件的使用寿命，则所有的可能结果为实数空间 $\mathbf{R}$ 的一个子集，即样本空间为 $\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0,\ t\in\mathbf{R}\}$.

注 (1) 样本空间所包含的样本点是与随机试验的目的有关的，如掷一枚骰子，若考虑出现的点数，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，若考虑出现点数的奇偶性，则样本空间是 $\Omega=\{$奇数,偶数$\}$. 试验条件都相同，但由于考虑目的不同，样本空间可能不同.

(2) 样本空间中的样本点可以是数，也可以不是数，如例 1.1.2 中的 Ω_1，Ω_2.

(3) 样本空间中的样本点个数可以是有限多个，如例 1.1.2 中的 Ω_1，Ω_2，也可以是无穷多个. 无穷多个又可以是可列无穷多个，如例 1.1.2 的 Ω_3，或不可列无穷多个，如例 1.1.2 中的 Ω_4.

对于一个随机试验，我们经常要考虑某个试验结果是否会发生，比如，考虑掷一枚骰子出现的点数是否大于 3，考虑某种型号的电子元件的使用寿命是否不大于 100 h 等. 我们称随机试验的可能结果为**随机事件**，简称**事件**，一般用大写的英文字母 $A,B,C\cdots$ 记之.

任何随机事件都是样本空间的子集，如在例 1.1.2 中，“掷一枚骰子点数

大于3”可以用集合 $A=\{4,5,6\}$ 表示，A 为样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集；“电子元件的使用寿命不大于100 h”可以表示为集合 $B=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant 100\}$，$B$ 为 $\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0, t\in \mathbf{R}\}$ 的子集. 当子集 A 中某个样本点出现，就说事件 A 发生了. 或者说事件 A 发生当且仅当子集 A 中某个样本点出现.

随机事件又可以分为基本事件和复合事件，由样本空间中的单个样本点 ω 构成的单点集 $\{\omega\}$ 称为**基本事件**，而由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**. 如“掷一枚骰子，考虑出现的点数”，则 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$ 都是基本事件，而“点数大于3”可以用 $\{4,5,6\}$ 表示，是一个复合事件，它是由三个基本事件 $\{4\},\{5\},\{6\}$ 复合而成的.

在每次试验中必然发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω. 这是因为在任何一次试验中，总会出现 Ω 的某个样本点，因此用 Ω 表示必然事件是合理的. 同理我们把在每次试验中都不会发生的事件称为**不可能事件**，记为 ϕ. 严格地讲，必然事件与不可能事件已经不具备随机性，但为研究问题的方便，我们把它们作为随机事件的两个极端情形.

1.1.3 事件间的关系与运算

在同一样本空间中，往往要考虑许多事件，有些事件比较简单，有些比较复杂. 概率论的一个基本研究课题就是希望通过对比较简单事件的分析，去分析了解复杂事件. 由于事件可以表示为样本空间的子集，所以事件之间的关系和运算完全可以归结为集合间的关系和运算.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A **包含于**事件 B，记作 $A\subset B$ 或 $B\subset A$. 显然，对任意事件 A，$\phi\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的相等

若事件 B 包含事件 A，且事件 A 包含事件 B，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

3. 事件的并

设 A 与 B 是任意两个事件，称两个事件 A 与 B 至少有一个发生为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A\cup B$.

事件的并可以推广到有限个或可列无穷多个事件的情形：

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生称为这些可列无穷多个

事件的并，记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 事件的交

设 A 与 B 是任意两个事件，称“两个事件 A 与 B 同时发生”为事件 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB.

同样，事件的交也可以推广到有限个或可列无穷多个事件的情形：

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生称为这 n 个事件的交，记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生称为这些可列无穷多个事件的交，记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 事件的差

设 A 与 B 是任意两个事件，称事件 A 发生而事件 B 不发生为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

6. 事件的互不相容

若事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与 B 是**互不相容的**(或互斥的).

推广到 n 个事件的情形，若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件互不相容，即 $A_iA_j=\phi(1\leqslant i<j\leqslant n)$，则称这 n 个事件**两两互不相容**.

7. 事件的对立

若事件 A 与 B 满足 $AB=\phi$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与 B 是对立的，并称事件 B 是事件 A 的**对立事件**(**或逆事件**)；同样，事件 A 也是事件 B 的**对立事件**，记作 $B=\overline{A}$或 $A=\overline{B}$.

于是有 $\overline{\overline{A}}=A$，$A\overline{A}=\phi$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，而 A 与 B 的差 $A-B$ 也可以表示为 $A\overline{B}$.

若用平面上某个矩形区域表示样本空间 Ω，矩形区域内的点表示样本点，则上述事件的关系及运算可以用维恩(Venn)图(也称韦恩图、文氏图)直观地表示出来，如图 1.1 所示.

8. 事件的运算律

事件之间的运算律与集合之间的运算律也完全类似：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

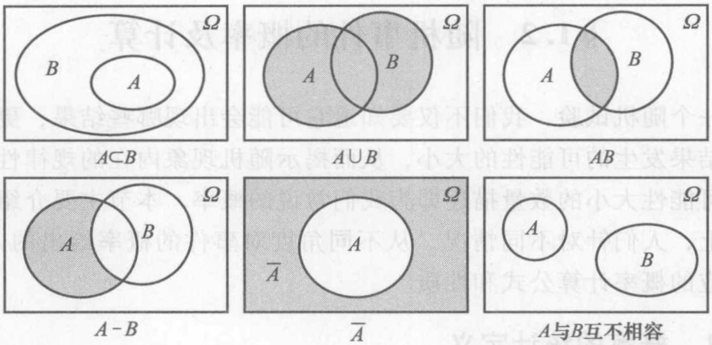

图 1.1

对偶律(德摩根(De Morgan)律): $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

在熟练掌握事件间的关系与运算,以及事件的运算律的基础上,对具体问题进行具体分析,可用基本事件表达复合事件,简单事件表达复杂事件.

例 1.1.3 (1)"A 发生,而 B 与 C 都不发生"可表为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A(\overline{B\cup C})$.

(2)"A,B,C 中恰有一个发生"可表为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(3)"A,B,C 中恰有两个发生"可表为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

(4)"A,B,C 中不多于一个发生"可表为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup CA}$.

例 1.1.4 盒子中有 10 只某种型号的电子元件,其中 7 只为一等品,3 只二等品. 从中不放回地依次取出两只,记 A_i =“第 i 次取到一等品”,$i=1,2$. 以 A_1,A_2 表示

(1) B=“全是一等品”;

(2) C=“至少有一只一等品”.

解 (1) 因为 $A_i(i=1,2)$表示“第 i 次取到一等品”,所以“全是一等品”意为 A_1,A_2 都发生,故表示为 $B=A_1A_2$.

(2) 方法一:“至少有一只一等品”可以理解为“或者 A_1 发生,或者 A_2 发生”,因此事件 C 表示为 $C=A_1\cup A_2$.

方法二:“至少有一只一等品”也可以理解为“恰有一只一等品”或者“两只都是一等品”,因此事件 C 可以用互不相容事件表示为 $C=A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2$.

方法三:“至少有一只一等品”如果理解为“不会出现两个都不是一等品”,那么,事件 C 也可以用对立事件表示,即 $C=\Omega-\overline{A_1\cup A_2}=\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2$.

所以事件 C=“至少有一只一等品”可表示为

$$C=A_1\cup A_2=A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2=\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2.$$

当然,事件 C 还有其他表示方法,不再一一赘述.

§1.2 随机事件的概率及计算

对于一个随机试验，我们不仅要知道它可能会出现哪些结果，更重要的是研究各种结果发生的可能性的大小，从而揭示随机现象内在的规律性．对随机事件发生可能性大小的数量描述即为我们常说的概率．本节主要介绍概率论发展的历史上，人们针对不同情况，从不同角度对事件的概率给出的几种定义，并给出相应的概率计算公式和性质．

1.2.1 概率的统计定义

定义 1.2.1 在相同的条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生了 M_n 次，则称比值$\frac{M_n}{n}$为事件 A 在 n 次试验中出现的**频率**，记为

$$f_n(A)=\frac{M_n}{n}. \tag{1.2.1}$$

频率的性质：

(1) 非负性： 对任意事件 A，有 $f_n(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性： $f_n(\Omega)=1$.

(3) 可加性： 若事件 A 与 B 互不相容，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

在大量的重复试验中，频率常常稳定于某个常数，称为**频率的稳定性**.

通过大量的实践，我们很容易看到，若随机事件 A 出现的可能性越大，一般来讲，其频率 $f_n(A)$ 也越大．由于事件 A 发生的可能性大小与其频率大小有如此密切的关系，加之频率又有稳定性，故可通过频率来定义概率.

定义 1.2.2(概率的统计定义) 在相同的条件下，进行独立重复的 n 次试验，当试验次数 n 很大时，如果某事件 A 发生的频率 $f_n(A)$稳定地在$[0,1]$上的某一数值 p 附近摆动，而且一般来说随着试验次数的增多，这种摆动的幅度会越来越小，则称数值 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

概率的统计定义一方面肯定了任一随机事件的概率是存在的，另一方面又给出了一个近似计算概率的方法，在实际应用的许多场合中，甚至常常简单地把频率当做概率使用．但定义要求试验次数足够大才能得到频率的稳定性，由于经济成本的限制，尤其是一些破坏性试验，不可能进行大量重复的试验，这些都限制了它的应用．此外，由于数学意义上的不够严格，该定义在理论研究上的使用也很有限．定义所刻画的事件 A 的概率与其频率大小的密切关系在第四章极限理论中我们将给出严格论述.

1.2.2 古典概型

定义 1.2.3 若一个随机试验 E 满足：

(1) 样本空间中只有有限个样本点(有限性)；

(2) 每个样本点的发生是等可能的(等可能性)，

则称该随机试验 E 为**古典型随机试验**.

由于这一概型最早被人们所研究，故又称之为**古典概型**. 古典概型在概率论的研究中占有相当重要的地位，对它的讨论有助于直观的理解概率论的许多基本概念和性质，是概率论发展初期的主要研究对象. 下面给出概率的古典定义.

定义 1.2.4 (概率的古典定义) 设古典型随机试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，若事件 A 中含有 $k(k\leqslant n)$ 个样本点，则称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 的**古典概率**，记为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中含有的样本点数}}{\Omega\text{ 中总的样本点数}}. \tag{1.2.2}$$

古典概率的性质：

(1) 非负性： 对任意事件 A，$P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性： $P(\Omega)=1$.

(3) 可加性： 若事件 A 与 B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

计算样本空间 Ω 和事件 A 中的样本点数时通常要利用排列组合的知识(见第一章的附录)，计算时注意避免重复和遗漏.

例 1.2.1 从标号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个同样大小的球中任取一个，求事件 $A=$“抽中 2 号球”，$B=$“抽中奇数号球”，$C=$“抽中球的号数不小于 7”的概率.

解 令 i 表示“任取一球为 i 号球”，$i=1,2,\cdots,10$，则 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$，而事件 A 中包含 1 个样本点，事件 B 中包含 5 个样本点，事件 C 中包含 4 个样本点，所以有 $P(A)=\frac{1}{10}$，$P(B)=\frac{5}{10}$，$P(C)=\frac{4}{10}$.

例 1.2.2(抽签问题) 设一个袋中有 m 只红球，n 只黑球，它们除颜色外没有区别. 现有 $m+n$ 个人依次从袋中随机地取出一球，求第 k 个人取到红球的概率.

解 设 $A_k=$“第 k 个人取到红球”，$k=1,2,\cdots,m+n$.

首先计算样本空间 Ω 的样本点总数：当 $m+n$ 个人抽取 $m+n$ 个球时，相当于对 $m+n$ 个球进行全排列，故所有的排列总数为 $(m+n)!$.

再计算事件 A_k 所包含的样本点："第 k 个人取到红球" 这个事件可以分两步，首先取一个红球分给第 k 个人，一共有 m 种取法，剩下的 $m+n-1$ 个球再进行全排列，即事件 A_k 共有 $m\cdot(m+n-1)!$个样本点，所以

$$P(A_k)=\frac{m\cdot(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n},\quad k=1,2,\cdots,m+n.$$

从结果来看，事件 A_k 发生的概率与 k 无关，这说明不管第几个人抽，抽到红球的可能性都相同. 这也是抽签方法广泛应用于各种场合的原因.

例 1.2.3（抽样问题） 在工业生产过程中，经常采用下面两种抽样方式进行产品检验，一种称为有放回抽样：即每次抽取一件，检验完后仍将产品放回，再进行下一次抽取；另一种称为不放回抽样：每次抽一件，检验完后不再将产品放回，再抽取下一件.

设有 100 件产品，其中有 95 件正品，5 件次品，分别按照上述两种抽样方式抽取 10 件产品，求其中恰有 2 件次品的概率.

解 （1）有放回抽样.

由于每次抽取的产品仍然放回，所以每次都面临的是 100 件产品，那么 10 次抽取共有 100^{10} 种取法，即样本点总数为 100^{10}.

设 A_1 ="从 100 件产品中有放回依次抽取 10 件产品，其中恰有 2 件次品"，即 "10 次抽取中有 8 次取得了正品，2 次取得了次品"，而 8 次取得的正品都是在 95 件正品中取得的，有 95^8 种取法，2 次次品是在 5 件次品中取到的，故有 5^2 种取法；又因为 2 件次品可以是 10 次抽取中的任何两次，所以有 C_{10}^2 种情况. 因此，事件 A_1 包含的样本点总数为 $\mathrm{C}_{10}^2\times95^8\times5^2$.

依古典概率的定义得

$$P(A_1)=\frac{\mathrm{C}_{10}^2\times95^8\times5^2}{100^{10}}=\mathrm{C}_{10}^2\left(\frac{95}{100}\right)^8\left(\frac{5}{100}\right)^2=0.0746.$$

（2）不放回抽样.

由于每次抽取的产品不再放回，所以第一次抽取时有 100 件产品，第二次抽取时有 99 件产品……以此类推，那么 10 次抽取相当于从 100 个元素中取 10 个元素的不允许重复排列，共有 A_{100}^{10} 种取法，即样本点总数为 A_{100}^{10}.

设 A_2 ="从 100 件产品中不放回依次抽取 10 件产品，其中恰有 2 件次品"，即 "10 次抽取中有 8 次取得了正品，2 次取得了次品"，而 8 次不放回抽样取到正品应有 A_{95}^8 种取法，2 次取到次品应有 A_5^2 种取法. 又因为 2 件次品可以是 10 次抽取中的任何两次，所以有 C_{10}^2 种情况. 因此，事件 A_2 包含的样本点总数为 $\mathrm{C}_{10}^2\mathrm{A}_{95}^8\mathrm{A}_5^2$.

依古典概率的定义得

$$P(A_2)=\frac{C_{10}^{2}A_{95}^{8}A_5^{2}}{A_{100}^{10}}=0.070\ 2.$$

值得注意的是，若是从100件产品中，一次取出10件，其中恰有2件次品的概率与$P(A_2)$相等，即设A_3=“从100件产品中任取10件产品，其中恰有2件次品”，由于10件产品是一次抽取的，因此可以不考虑抽取顺序，故

$$P(A_3)=\frac{C_{95}^{8}C_5^{2}}{C_{100}^{10}}=0.070\ 2.$$

其实利用排列组合的性质，不难验证

$$P(A_2)=\frac{C_{10}^{2}A_{95}^{8}A_5^{2}}{A_{100}^{10}}=\frac{C_{10}^{2}\times C_{95}^{8}\times 8!\times C_5^{2}\times 2!}{C_{100}^{10}\times 10!}=\frac{C_{95}^{8}C_5^{2}}{C_{100}^{10}}=P(A_3).$$

例1.2.4(盒子模型) 设有n个不同的球，每个球被等可能地放到N个不同的盒子中的任一个，假设每个盒子所能容纳的球无限. 试求：

(1) 指定的$n(n\leqslant N)$个盒子中各有一球的概率p_1.

(2) 恰好有$n(n\leqslant N)$个盒子各有一球的概率p_2.

解 因为每个球都可以相同的可能性放到N个盒子中的任一个，所以n个球共有N^n种不同的放法.

(1) 因为放球的盒子已经被指定，所以只要考虑把n个球放到n个盒子中的放法，其可能种数为$n!$，故所求概率为

$$p_1=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 该问题与问题(1)的差别是放有球的n个盒子要在N个盒子中任意选取，所以可以分为两步走：第一步，首先在N个盒子中任取n个盒子，共有C_N^n种取法；第二步，把n个球放到n个已选中的盒子中，其可能种数为$n!$. 由乘法原则，共有$C_N^n n!$种放法，因此所求概率为

$$p_2=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

盒子模型是一类重要的概率模型，可以应用到许多实际问题. 下面的生日问题就是历史上著名的一例.

例1.2.5(生日问题) 考虑由n个人组成的班集体，问至少有两人生日相同的概率是多少(一年以365天计)？

解 记A=“至少有两人生日相同”，首先考虑其逆事件$\overline{A}$=“n个人生日全不相同”，把人看作“球”，一年的365天看作365个“盒子”($N=$