

The background of the cover is a solid yellow color. On the left side, there is a series of white lines that intersect to form a large, stylized 'X' or star-like shape. The lines are of varying thickness and extend from the top-left towards the bottom-right, and from the top-right towards the bottom-left.

# 大学数学

(修订版)

李炳照 王宏洲 编著

清华大学出版社

# 大学数学

(修订版)

李炳照 王宏洲 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书是一本通俗易懂的大学数学教材,尤其适合文科及设计艺术类学生使用.内容包括了高等数学、线性代数及概率统计等大学生所需要掌握的基础知识.在本书的编排过程中,特别注重了学生形象思维的培养,对某些较难理解的概念、原理,尽量用图形、图表的形式给出.同时,本书也兼顾了文科类、设计艺术类学生中学知识与大学知识的衔接.本书语言流畅、通俗易懂,内容生动、方法简捷,便于应用.

本书适用于普通高等院校文科类、设计艺术类以及其他相关专业学生,也可供从事大学数学教学的教师及科研人员参考使用.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

大学数学/李炳照,王宏洲编著.一修订本.一北京:清华大学出版社,2014

ISBN 978-7-302-37877-8

I. ①大… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 202639 号

责任编辑:陈 明 汪 操

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

社 总 机:010-62770175

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

邮 购:010-62786544

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm 印 张:19.5

字 数:425 千字

版 次:2011 年 8 月第 1 版 2014 年 9 月修订版

印 次:2014 年 9 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:35.00 元

---

产品编号:060325-01

本书第一版于 2011 年 8 月出版,此后连续三年应用于课堂教学实践。在此期间,我们积累了一些新的教学经验,使用本书的读者、教师也提出了很多宝贵意见。在此基础上,我们对本书的内容进行了适当的修订与调整。

此次,主要针对第一版做了如下几个方面的修订与调整:

- (1) 删去了部分对于文科专业而言较难的内容、例题和习题;
- (2) 鉴于统计学内容难以展开介绍,此次予以全部删除,只留概率论部分;
- (3) 为一些重要概念增加了背景、实际案例,在概念引入上更加自然;
- (4) 增加了泊松分布表和正态分布表,供课堂教学中选择性讲解;
- (5) 修正了第一版中存在的错漏之处。

在本书修订版的整理过程中,北京理工大学数学与统计学院的董秀媛教授、李金生教授、张学莲教授等对本书提出了极具建设性的意见和建议,2013 级硕士研究生张艳娜、赵志纯、庞晓宁、曹玉静等同学也对本书的修订版进行了详细的检查和核对,在此表示感谢。

由于编者水平有限,书中不妥之处敬请读者批评指正。

编 者

2014 年 6 月

本书是在对大学数学基本知识、教学内容与教学体系进行了长时间研究和实践摸索的基础上,结合任课教师及各方面的实际经验、建议最终编写而成,其初稿在北京理工大学人文社科、外语、设计艺术类专业已使用了三年,效果良好。

随着信息社会的发展,数学在社会各个层面产生了巨大的影响。对于文科学生而言,数学既是一个重要的工具,又是一种认识客观世界的重要的基本思维方式。面向文科学生的数学思维教育近年来得到了广大学者的普遍重视和认同,随着数学思想在文科领域渗透,数学的思想与方法在设计艺术类专业(工业设计、艺术设计等专业)学生中的培养和教育也逐步引起了大家重视。北京理工大学是国内第一所要求所有设计艺术类专业学生都必修大学数学课程的高校,然而在我们选择适合他们的教材时,发现现有文科大学数学教材大都面向经济、管理类专业,针对人文社科类、设计艺术类的大学数学教材极为少见。

如何编写一本符合我国高等教育体系下设计艺术类与文科类学生的通用教材,同时又能被这些学生喜欢,使他们真正学习到一些数学思想和方法,是一个长期探索的过程。本书作者从2001年以来,一直从事文科、设计艺术类专业大学数学课程的讲授工作,根据这些年来积累的经验,我们越来越觉得文科大学数学除了介绍基本数学知识外,还应该高度重视数学思想的传播,培养学生用数学方法和思维方式看待现实世界,并让学生了解一些社会科学中十分重要的数学原理,这必将为学生今后的发展奠定坚实的基础。所以,编著一本针对上述要求的大学数学教材具有重要的意义,这不但能促进高等院校大学数学课程教学体系的改革,对于设计艺术类专业大学数学的课程设计、教学体系的研究也具有重要的价值。

本书的特色和价值主要体现在以下几点:

- (1) 重视文科学生的特点,对比较重要的概念给出了较详细的图形描述;
- (2) 重视文科学生中学知识与大学数学知识的衔接;
- (3) 每章都有详细的知识结构图,便于学生从整体上来理解和学习。

我们曾共分两个学期,每个学期48学时来讲授本教材,在学时较少时可以将打“\*”号的内容略过不讲。在使用本教材进行教学时,任课教师也可根据学时数和学生的基础,增加或者删减一些内容,使教学活动更加有效。

本书入选北京理工大学“十二五”规划教材。在本书的撰写过程中,北京理工大学数学实验中心研究生李翠萍、邱伟、朱曼等同学对本书的全部内容进行了详细的检查和核对,在此表示感谢。由于学识与水平所限,本书的缺点和错误在所难免,敬请专家和读者批评指正。

编 者

2011 年 3 月

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| 第 1 章 集合与函数                                                      | 1  |
| 1.1 集合                                                           | 2  |
| 1.1.1 集合的概念                                                      | 2  |
| 1.1.2 集合的表示方法                                                    | 2  |
| 1.1.3 集合的运算及运算律                                                  | 3  |
| 1.1.4 区间和邻域                                                      | 4  |
| 1.2 映射与函数                                                        | 5  |
| 1.2.1 映射                                                         | 6  |
| 1.2.2 函数                                                         | 6  |
| 1.3 初等函数                                                         | 14 |
| 1.3.1 基本初等函数                                                     | 14 |
| 1.3.2 初等函数                                                       | 18 |
| 本章知识点                                                            | 19 |
| 习题 1                                                             | 21 |
| 第 2 章 极限与连续                                                      | 24 |
| 2.1 数列                                                           | 25 |
| 2.1.1 数列的概念                                                      | 25 |
| 2.1.2 数列的特性                                                      | 25 |
| 2.1.3 数列 $x_n = 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots$ 的变化趋势 | 25 |
| 2.2 数列的极限                                                        | 26 |
| 2.2.1 数列极限的概念                                                    | 26 |
| 2.2.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的几何解释                | 27 |

|        |                                               |    |
|--------|-----------------------------------------------|----|
| 2.2.3  | 收敛数列的有界性 .....                                | 27 |
| 2.2.4  | 子数列 .....                                     | 27 |
| 2.3    | 函数的极限 .....                                   | 28 |
| 2.3.1  | 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限 ..... | 28 |
| 2.3.2  | 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 .....    | 29 |
| 2.3.3  | 函数极限的性质 .....                                 | 30 |
| 2.4    | 无穷小量与无穷大量 .....                               | 31 |
| 2.4.1  | 无穷小量 .....                                    | 31 |
| 2.4.2  | 无穷大量 .....                                    | 32 |
| 2.4.3  | 渐近线 .....                                     | 33 |
| 2.5    | 极限运算法则 .....                                  | 34 |
| 2.5.1  | 极限的四则运算法则 .....                               | 34 |
| 2.5.2  | 复合函数极限的运算法则 .....                             | 36 |
| 2.6    | 极限存在准则 两个重要极限 .....                           | 37 |
| 2.6.1  | 极限存在准则 .....                                  | 37 |
| 2.6.2  | 两个重要极限 .....                                  | 39 |
| 2.7    | 无穷小的比较 .....                                  | 41 |
| 2.8    | 函数的连续性 .....                                  | 44 |
| 2.8.1  | 函数的连续性 .....                                  | 44 |
| 2.8.2  | 函数的间断点 .....                                  | 47 |
| 2.9    | 连续函数的运算与初等函数的连续性 .....                        | 49 |
| 2.9.1  | 连续函数的四则运算 .....                               | 49 |
| 2.9.2  | 复合函数的连续性 .....                                | 49 |
| 2.9.3  | 反函数的连续性 .....                                 | 50 |
| 2.9.4  | 初等函数的连续性 .....                                | 50 |
| 2.10   | 闭区间上连续函数的性质 .....                             | 52 |
| 2.10.1 | 最值定理 .....                                    | 52 |
| 2.10.2 | 介值定理 .....                                    | 54 |
|        | 本章知识点 .....                                   | 56 |
|        | 习题 2 .....                                    | 58 |
| 第 3 章  | 导数及其应用 .....                                  | 61 |
| 3.1    | 导数的概念 .....                                   | 62 |
| 3.1.1  | 导数的定义 .....                                   | 62 |
| 3.1.2  | 单侧导数 .....                                    | 65 |

|              |                                                  |           |
|--------------|--------------------------------------------------|-----------|
| 3.1.3        | 导数的几何意义 .....                                    | 65        |
| 3.1.4        | 函数可导性与连续性的关系 .....                               | 66        |
| 3.2          | 导数的运算法则 .....                                    | 67        |
| 3.2.1        | 基本初等函数的导数公式 .....                                | 67        |
| 3.2.2        | 导数的四则运算法则 .....                                  | 67        |
| 3.2.3        | 复合函数的求导法则 .....                                  | 68        |
| 3.2.4        | 反函数的求导法则 .....                                   | 68        |
| 3.3          | 高阶导数 .....                                       | 69        |
| 3.4          | 微分 .....                                         | 70        |
| 3.4.1        | 微分的定义 .....                                      | 70        |
| 3.4.2        | 微分的运算法则 .....                                    | 72        |
| 3.4.3        | 微分形式的不变性 .....                                   | 73        |
| 3.4.4        | 微分在近似计算中的应用 .....                                | 73        |
| 3.5          | 微分中值定理 .....                                     | 74        |
| 3.5.1        | 罗尔中值定理 .....                                     | 74        |
| 3.5.2        | 拉格朗日中值定理 .....                                   | 75        |
| 3.6          | 洛必达法则 .....                                      | 76        |
| 3.6.1        | $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 ..... | 76        |
| 3.6.2        | 其他未定型 .....                                      | 78        |
| 3.7          | 函数的单调性与函数的极值 .....                               | 80        |
| 3.7.1        | 利用导数判断函数的单调性 .....                               | 80        |
| 3.7.2        | 利用导数求函数的极值 .....                                 | 81        |
| 3.7.3        | 函数的最值 .....                                      | 82        |
|              | 本章知识点 .....                                      | 83        |
|              | 习题 3 .....                                       | 86        |
| <b>第 4 章</b> | <b>积分学</b> .....                                 | <b>89</b> |
| 4.1          | 不定积分的概念 .....                                    | 89        |
| 4.1.1        | 原函数 .....                                        | 89        |
| 4.1.2        | 不定积分 .....                                       | 90        |
| 4.1.3        | 不定积分的性质 .....                                    | 91        |
| 4.2          | 换元积分法 .....                                      | 92        |
| 4.2.1        | 第一类换元法(凑微分法) .....                               | 92        |
| 4.2.2        | 第二类换元法 .....                                     | 94        |

|              |                  |            |
|--------------|------------------|------------|
| 4.3          | 分部积分法            | 96         |
| 4.4          | 定积分              | 98         |
| 4.4.1        | 定积分概念的引入         | 98         |
| 4.4.2        | 定积分的几何意义         | 99         |
| 4.4.3        | 定积分的性质           | 100        |
| 4.5          | 微积分基本公式          | 100        |
| 4.5.1        | 变上限定积分           | 100        |
| 4.5.2        | 牛顿-莱布尼茨公式        | 101        |
| 4.6          | 定积分的换元法与分部积分法    | 102        |
| 4.6.1        | 定积分的换元法          | 102        |
| 4.6.2        | 定积分的分部积分法        | 104        |
| * 4.7        | 反常积分             | 105        |
| 4.7.1        | 无穷区间上的反常积分       | 105        |
| 4.7.2        | 无界函数的反常积分        | 106        |
| 4.8          | 定积分的应用           | 108        |
|              | 本章知识点            | 110        |
|              | 习题 4             | 112        |
| <b>第 5 章</b> | <b>常微分方程</b>     | <b>115</b> |
| 5.1          | 常微分方程的基本概念       | 116        |
| 5.2          | 一阶常微分方程          | 117        |
| 5.2.1        | 可分离变量的微分方程       | 118        |
| 5.2.2        | 一阶线性微分方程         | 119        |
| * 5.3        | 二阶线性微分方程         | 122        |
| 5.3.1        | 二阶线性齐次微分方程解的结构   | 123        |
| 5.3.2        | 二阶线性非齐次微分方程解的结构  | 123        |
| 5.3.3        | 二阶线性常系数齐次微分方程    | 124        |
| 5.3.4        | 二阶线性常系数非齐次微分方程   | 125        |
|              | 本章知识点            | 127        |
|              | 习题 5             | 128        |
| <b>第 6 章</b> | <b>线性方程组与行列式</b> | <b>130</b> |
| 6.1          | 二元一次线性方程组与二阶行列式  | 130        |
| 6.2          | 三元一次线性方程组与三阶行列式  | 132        |
| 6.3          | $n$ 阶行列式         | 134        |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 6.3.1 $n$ 阶行列式的表示 .....         | 134        |
| 6.3.2 $n$ 阶行列式的计算 .....         | 134        |
| 6.4 行列式的性质 .....                | 135        |
| 本章知识点 .....                     | 145        |
| 习题 6 .....                      | 146        |
| <b>第 7 章 线性方程组与矩阵</b> .....     | <b>149</b> |
| 7.1 线性方程组 .....                 | 150        |
| 7.1.1 二元一次线性方程组 .....           | 150        |
| 7.1.2 三元一次线性方程组和多元一次线性方程组 ..... | 151        |
| 7.1.3 线性方程组的表示与求解 .....         | 154        |
| 7.2 矩阵 .....                    | 154        |
| 7.2.1 矩阵的定义 .....               | 154        |
| 7.2.2 特殊的矩阵 .....               | 156        |
| 7.3 矩阵的运算 .....                 | 157        |
| 7.3.1 矩阵的相等 .....               | 157        |
| 7.3.2 矩阵的加法 .....               | 158        |
| 7.3.3 矩阵的数乘 .....               | 158        |
| 7.3.4 矩阵与矩阵的乘法 .....            | 159        |
| 7.4 方阵与行列式 .....                | 162        |
| 7.5 逆矩阵 .....                   | 163        |
| 7.6 方程矩阵表示与求解 .....             | 169        |
| 7.6.1 线性方程组的表示 .....            | 169        |
| 7.6.2 线性方程组的求解 .....            | 169        |
| 7.6.3 矩阵方程 .....                | 171        |
| 7.7 高斯消元法 .....                 | 172        |
| 7.8 矩阵的初等变换 .....               | 176        |
| 7.8.1 初等变换 .....                | 176        |
| 7.8.2 初等矩阵 .....                | 177        |
| 7.8.3 矩阵的等价关系与等价标准型 .....       | 180        |
| 7.8.4 初等变换求逆矩阵 .....            | 181        |
| 本章知识点 .....                     | 183        |
| 习题 7 .....                      | 185        |

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| <b>第 8 章 线性方程组解的结构</b> .....   | 188 |
| 8.1 向量 .....                   | 188 |
| 8.1.1 向量的定义 .....              | 188 |
| 8.1.2 向量的线性运算 .....            | 189 |
| 8.1.3 向量的线性表出 .....            | 190 |
| 8.1.4 向量组的线性相关性 .....          | 192 |
| 8.1.5 向量组的极大无关组 .....          | 193 |
| 8.2 齐次线性方程组的基础解系 .....         | 195 |
| 8.2.1 解的向量表示 .....             | 195 |
| 8.2.2 齐次线性方程组的基础解系 .....       | 196 |
| 8.3 非齐次线性方程组的基础解系 .....        | 200 |
| 本章知识点 .....                    | 203 |
| 习题 8 .....                     | 204 |
| <b>第 9 章 事件的概率</b> .....       | 207 |
| 9.1 随机事件 .....                 | 207 |
| 9.2 随机事件的关系与运算 .....           | 209 |
| 9.3 事件的运算规则 .....              | 211 |
| 9.4 随机事件的概率 .....              | 212 |
| 9.4.1 统计意义下的概率 .....           | 212 |
| 9.4.2 古典概率 .....               | 213 |
| 9.4.3 几何概率 .....               | 215 |
| 9.4.4 概率的公理化定义 .....           | 216 |
| 9.5 条件概率与乘法公式 .....            | 219 |
| 9.6 全概率公式与贝叶斯公式 .....          | 221 |
| 9.6.1 全概率公式 .....              | 221 |
| 9.6.2 贝叶斯公式 .....              | 224 |
| 9.7 随机事件的独立性 .....             | 225 |
| 9.8 $n$ 重伯努利概型 .....           | 228 |
| 本章知识点 .....                    | 230 |
| 习题 9 .....                     | 232 |
| <b>第 10 章 随机变量及其概率分布</b> ..... | 236 |
| 10.1 随机变量 .....                | 236 |

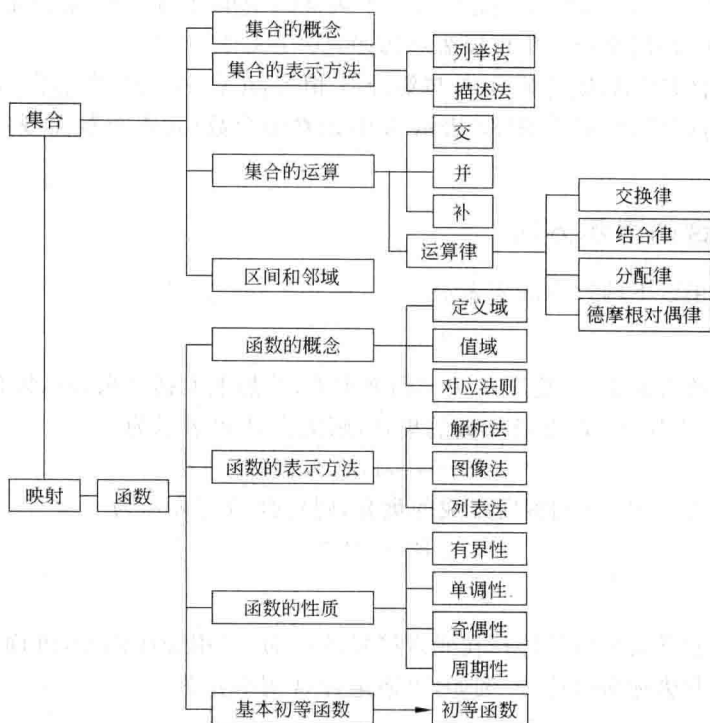
|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| 10.2 离散型随机变量的分布·····          | 238        |
| 10.3 常见的离散型分布·····            | 241        |
| 10.3.1 两点分布·····              | 241        |
| 10.3.2 二项分布·····              | 242        |
| 10.3.3 泊松分布·····              | 243        |
| 10.4 连续型随机变量及其分布·····         | 244        |
| 10.5 常见的连续型分布·····            | 247        |
| 10.5.1 均匀分布·····              | 247        |
| 10.5.2 指数分布·····              | 248        |
| 10.5.3 正态分布·····              | 249        |
| 本章知识点·····                    | 250        |
| 习题 10 ·····                   | 251        |
| <b>第 11 章 随机变量的数字特征</b> ····· | <b>254</b> |
| 11.1 离散型随机变量的数学期望·····        | 254        |
| 11.2 连续型随机变量的数学期望·····        | 256        |
| 11.3 随机变量的方差·····             | 258        |
| * 11.4 大数定律与中心极限定理 ·····      | 262        |
| 11.4.1 大数定律·····              | 262        |
| 11.4.2 中心极限定理·····            | 262        |
| 本章知识点·····                    | 263        |
| 习题 11 ·····                   | 264        |
| <b>附录 A 常用三角函数公式</b> ·····    | <b>266</b> |
| <b>附录 B 泊松分布表</b> ·····       | <b>268</b> |
| <b>附录 C 标准正态分布表</b> ·····     | <b>271</b> |
| <b>习题参考答案与提示</b> ·····        | <b>273</b> |
| <b>参考文献</b> ·····             | <b>298</b> |

# 第1章

## 集合与函数

微积分是研究变量的数学. 客观世界中有许许多多的变量, 它们之间不是独立的, 而是相互联系的. 函数就是对现实世界中各种变量之间相互关系的一种数学抽象, 它是现代数学的基本概念之一, 是高等数学的主要研究对象. 集合是研究函数的基础, 本章首先引入集合的概念, 然后着重介绍函数.

### 本章知识框图



## 1.1 集合

### 1.1.1 集合的概念

我们把具有某种属性的事物的全体,叫做集合,这些事物则称为集合的元素.下面是几个集合的例子:

- (1) 某工厂生产的所有产品.
- (2) 某校某年级的全体学生.
- (3) 全体正整数.
- (4) 方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的根.

习惯上用大写字母  $A, B, C$  等表示集合,用小写字母  $a, b, c$  等表示集合里的元素.如果  $a$  是集合  $A$  的元素,则记作  $a \in A$ ,读作“ $a$  属于  $A$ ”;如果  $a$  不是集合  $A$  的元素,则记为  $a \notin A$ ,读作“ $a$  不属于  $A$ ”.实际应用中,我们常用  $\mathbb{Z}$  表示全体整数组成的集合,  $\mathbb{R}$  表示全体实数所组成的集合,  $\mathbb{N}$  表示全体自然数所组成的集合,  $\mathbb{Q}$  表示全体有理数所组成的集合,  $\mathbb{C}$  表示全体复数所组成的集合.不含任何元素的集合称为空集,记为  $\emptyset$ .

当集合  $A$  中的元素都是集合  $B$  的元素时,称集合  $A$  是集合  $B$  的子集,记作  $A \subset B$ .例如  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .显然,空集  $\emptyset$  是任何一个集合的子集,任何一个集合是其本身的子集.例如,集合  $A = \{0, 1\}$  的全部子集可以表示为  $\emptyset, \{0\}, \{1\}$  和  $\{0, 1\}$ .

如果  $A \subset B$  且  $B \subset A$ ,则称集合  $A$  与集合  $B$  相等,记作  $A = B$ .当集合  $A$  中元素的个数有限时,  $A$  称为有限集合,通常用  $|A|$  表示  $A$  中元素的个数;元素个数无限的集合称为无限集合.

### 1.1.2 集合的表示方法

集合通常可用以下两种方法来表示.

#### 1. 列举法

将集合中的所有元素,不论顺序一一列举出来,并加上大括号来表示集合的方法称为列举法.例如,设  $A$  是小于 6 的非负整数的集合,则集合  $A$  可表示为

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

设  $B$  为方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的根所组成的集合,则集合  $B$  可表示为

$$B = \{2, 3\}.$$

#### 2. 描述法

将集合中元素所满足的条件写在元素符号的后面,并用竖线隔开,外面再加上大括号,这种表示集合的方法称为描述法.例如,上述集合  $A$  可表示为

$$A = \{a \mid 0 \leq a \leq 5, a \in \mathbb{Z}\}.$$

集合  $B$  可表示为

$$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

### 1.1.3 集合的运算及运算律

#### 1. 集合的运算: 交、并、补

设  $A, B$  是两个集合,  $U$  是全集(由所研究的所有事物构成的集合称为全集). 由所有既属于  $A$  又属于  $B$  的元素构成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的交集, 记作  $A \cap B$ ; 由所有属于  $A$  或属于  $B$  的元素构成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的并集, 记作  $A \cup B$ , 如图 1-1 所示.

**例 1.1** 设  $A = \{0, 1, 3\}, B = \{0, 2, 4\}, C = \{2, 4\}$ , 则  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{0\}, B \cap C = \{2, 4\}, A \cap C = \emptyset$ .

由所有属于  $A$  但不属于  $B$  的元素构成的集合, 称为  $A$  与  $B$  的差集, 记作  $A - B$ ; 全集  $U$  中所有不属于  $A$  的元素构成的集合, 称为  $A$  的补集, 记作  $\bar{A}$ , 如图 1-2 所示.

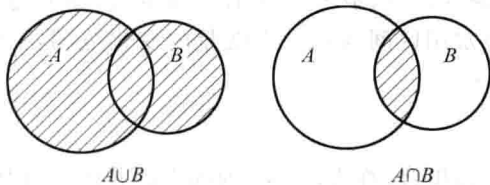


图 1-1 集合的并与交

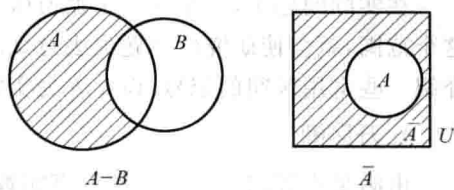


图 1-2 差集与补集

**例 1.2** 设  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 2, 4\}$ , 则  $A - B = \{3, 5, 7\}, \bar{A} = \{2, 4, 6\}, \bar{B} = \{3, 5, 6, 7\}$ .

#### 2. 运算律

(1) 交换律(I)  $A \cup B = B \cup A$ ; (II)  $A \cap B = B \cap A$ .

(2) 结合律(I)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;

(II)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

(3) 分配律(I)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;

(II)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

(4) 德摩根对偶律(I)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ; (II)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

下面证明结合律的(I)和德摩根对偶律的(I), 其余定律可类似地证明.

**结合律(I)的证明**

若  $x \in (A \cup B) \cup C$ , 则  $x \in A \cup B$  或  $x \in C$ , 即  $x \in A$  或  $x \in B$  或  $x \in C$ , 因而  $x \in A$  或  $x \in B \cup C$ , 所以  $x \in A \cup (B \cup C)$ , 所以  $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ ; 同理可证  $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ ; 所以  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

## 德摩根对偶律(I)的证明

若  $x \in \overline{A \cup B}$ , 则  $x \notin A \cup B$ , 即  $x \notin A$  且  $x \notin B$ , 亦即  $x \in \bar{A}$  且  $x \in \bar{B}$ , 因此  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ , 所以  $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ ;

反之, 若  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ , 则  $x \in \bar{A}$  且  $x \in \bar{B}$ , 即  $x \notin A$  且  $x \notin B$ , 亦即  $x \notin A \cup B$ , 因此  $x \in \overline{A \cup B}$ , 所以  $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

所以有  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ .

**例 1.3** 利用集合运算律证明:  $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$ .

**证明** 由分配律(I)知,  $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = (A \cup \bar{A}) \cap B = U \cap B = B$ .

## 1.1.4 区间和邻域

人们在生活与工作中, 经常会遇到各种不同的量. 在某一过程中保持固定数值的量称为常量, 可以取不同数值的量称为变量. 例如, 圆的周长与直径的比是一个常量, 称为圆周率, 记作  $\pi$ . 汽车在某一段时间内行驶过的路程是一个变量, 因为它随时间的变化而变化.

在实际问题中, 一个变量根据所研究问题的条件, 一般有着一定的变换范围, 如果超出这个范围, 就会使研究的问题失去意义. 在数学中常用区间表示一个变量的变化范围, 下面介绍一些常用区间的记号. 设  $a, b$  为实数, 且  $a < b$ .

## 1. 开区间

由满足不等式  $a < x < b$  的所有实数  $x$  所组成的集合, 称为以  $a, b$  为端点的开区间, 记作  $(a, b)$ , 即  $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ , 如图 1-3(a) 所示.

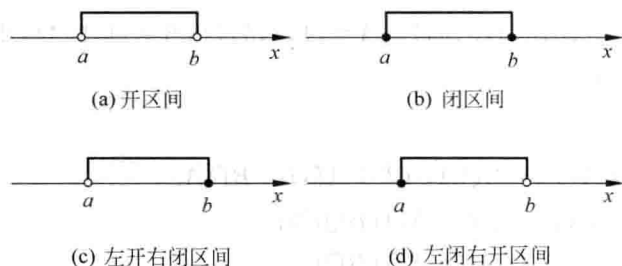


图 1-3 区间示意图

## 2. 闭区间

满足不等式  $a \leq x \leq b$  的所有实数  $x$  所组成的集合, 称为以  $a, b$  为端点的闭区间, 记作  $[a, b]$ , 即  $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ , 如图 1-3(b) 所示.

## 3. 半开半闭区间

满足不等式  $a < x \leq b$  (或  $a \leq x < b$ ) 的所有实数  $x$  所组成的集合, 称为以  $a, b$  为端点的半开半闭区间, 记作  $(a, b]$  (或  $[a, b)$ ), 即  $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ ,  $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ . 如图 1-3