F. R. 坦盖里尼 著　朱培豫 譯

广义相对论导论

上海科学技术出版社

广义相对論导論

F. R. 坦盖里尼 著
朱 培 豫 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本文譯自意大利物理学杂志“新試驗”增刊第20卷第1期(Nuovo Cimento, Supplemento, Vol.20, No.1, 1961)。系作者在1960年于那波里(Napoli)理論物理与原子核物理专門学院所作的长篇讲演。

本文闡述了广义相对論的基本內容。第一至三章是为闡述广义相对論基本原理作物理概念上的准备;第四章是为闡述广义相对論基本原理作数学工具上的准备;第五至七章闡述了广义相对論基本原理及其应用。

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY

F. R. Tangherlini

Nicola Zanichelli Editore

广 义 相 对 論 导 論

朱 培 豫 譯

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷六厂印刷 · 新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32 印張2 26/32 排版字数72,000

1963年12月第1版 1963年12月第1次印刷 印数1—5,000

統一书号 13119·550 定价(十四) 0.50元

目 录

引　言

这些讲演的目的是簡短扼要地闡述广义相对論的基本物理原理及其数学方法.

假定讀者已通曉狹义相对論的物理概念和数学方法，但为了讲授方便起見，我們仍将复习狹义相对論的一些基本观念，作为使用某几种度規張量的导言，这些張量不同于狹义相对論上所用的对角度規張量.

常常引起这样的疑問：广义相对論是不是处理引力問題所必需的？卽，是否能采用狹义相对論的“平坦”时空結构和类似于电磁場的相互作用来解决引力問題？在下文中将詳尽地指出，如果有人企图这样做，将会遭到严重的困难．这是因为电磁場强度 $F_{\mu\nu}$ 作为張量而变换，所以不能用坐标变换来变换掉电磁場“强度”，虽然，我們一定能把 $F_{\mu\nu}$ 的某几个分量变换到零(用一般的説法是，在一点上的 $F_{\mu\nu}$，有几个分量可以变换到零?)．另一方面，大家已經知道，物体在引力場中“自由下落”能局部地变换掉引力場强度．因此，引力場“强度”的分量不构成張量；显然我們必須引进一些新的数学概念，来处理这个情形，例如在克里斯托菲 (Christoffel) 記号和协变微分中所包含的概念．因此，虽然我們通过显明的計算，将指出包含标量場的狹义相对論理論形式不能作出水星近日点进动的正确答案，但我們总要弄清楚这一点，这是一开始就預料到的.

不用説，人們可以力图在狹义相对論基础上作出更复杂的理論，这些理論在表面上作出了著名的广义相对論三大驗証的正确答案．但是这些理論終究不能弄清楚引力强度为何能局部地变换掉，而一旦人們懂得广义相对論的形式体系后，得出的結果就很清楚了.

局部地变换掉引力場强度后，狭义相对論的定律仍然有效．这情形极相似于黎曼几何中出現的情形．例如，考虑一球面（如地球）三角形，我們知道：毕达哥拉斯（Pythagoras）法則对于充分小的三角形是成立的，但对于大的三角形却不是如此，其几何是非-欧几里得的．我們将会看到，广义相对論結合这一概念使它成为理論的基本点，于是，一般說来，几何是非-欧几里得的，因此光綫走过的路徑不是欧几里得直綫，而是它們的普遍化，称为零短程綫（null-geodesics）．从数学观点上这是由于有引力場存在致使光綫偏轉，例如光綫通过太阳附近的情形．从物理学观点看来，由于光綫具有能量 $E=h\nu$，根据等效原理，我們可以說，光綫也具有质量 $m=E/c^2=h\nu/c^2$，因此它在引力場中“下落”，或者說，它被引力場所吸引，就引起了偏轉．不管怎样，直接应用牛頓定律得到的偏轉值只是正确答案的一半．广义相对論提供的解法还考虑到非-欧几里得空間結构，从而得出了附加的偏轉．

不用說，人們仍然可以力图維护狭义相对論而主張光綫是由引力場散射出来的．例如在量子电动力学中是說成为光綫是庫侖場所散射（Delbrück 散射）的．然而，这种过程是极其复杂的，本质上又是非綫性的，因此我們用这种方法不能把問題讲清楚．而且，从邏輯观点看来，也是不满足的，因为人們仍旧要用狭义相对論的綫元，这种綫元是指光綫經过的路徑为零短程綫，但在上述过程中已經不是零短程綫的情形了．

作者希望以上的討論能使讀者明了广义相对論所依据的邏輯結构是为了用最有系統和最簡单的方法来滿足引力問題所提出的特殊需要而兴起的．

不能认为广义相对論在任何一点上是最終的理論．目前还沒有建立統一場論就証明广义相对論不是最終的理論，而实际上爱因斯坦是把他生命的最后四十年专心致力于塡补統一場論这个空白的．

統一場論所蒙受的巨大困难，以及广义相对論只有少数驗証，原子物理、原子核物理和基本粒子等富有成效的研究領域的成长，

致使許多年来人們对广义相对論的兴趣逐漸衰退．但是現在人們重新对广义相对論感到兴趣：一部份原因是由于新实驗技术的发展，也由于某些方面的理論家推測量子場論所面临的基本困难可以通过适当地联合这两門学科求得解决．但因相距 10^{-13} 厘米的两个电子的引力势能是 $Gm_e^2/(10^{-13}$ 厘米$)\approx 10^{-46}$ Mev，显然只有很精細地应用这个理論，才能在此一距离上产生可与别的力(例如，同样两个电子下的电磁势能为 ≈ 0.5 Mev)作比較的效应．

广义相对論在宇宙学領域中有重要的应用．这是因为整个时空結构是通过度規張量而同引力場密切相关的．而且，按馬赫原理，宇宙的远距质量是局部經受慣性效应主要原因．所以广义相对論势必有很大部份讲到宇宙学．我們将叙述其若干問題以及几个簡单的宇宙模型．

第一章　具有非对角綫元的狹义相对論

1-1　怎样才能測量光速

为了便于熟悉某几种度規張量——它們不同于狹义相对論中所用的一种度規張量 $\eta_{\mu\nu}$＝对角張量 $(1,\ -1,\ -1,\ -1)$，我們将介紹洛侖茲变换的另一种推导方法，这些內容还起有复习狹义相对論的基本概念和引进广义相对論的物理概念与数学方法的作用.

我們最好先提出这个問題："人們怎样才能測量光速？" 假定有叫做"钟"和"剛性杆"的两种物件可以利用，則在我們所在的空間中能測量 AB 两点的距离，只要从 A 到 B 沿着光所走的路綫，放置一列首尾相接的单位杆，就測定了从 A 到 B 的距离.

（显然，在这种方法中，我們假定 A，B 間的直綫距离是和光所走的路綫相重合的．另一方法是：系一金属綫或弦綫于固着于 A 的物体上，再将其系于 B 处，拉紧，然后沿此綫用单位杆度量距离．显然，这是假定我們在 A、B 两处是有充分笨重的物体把金属綫"鎮住"的，而在拉紧时也假定 AB 間最短距离可以定义为 A、B 間的直綫距离．我們提出这些考虑是要引出一个重要的論点，就是象"距离"那样的概念，如果我們不規定一种如何去測定距离的运算上的定义，那是沒有物理意义的．例如米的著名定义是保存于 Sèvres 的一根鉑銥棒的长度，这个定义并无多大用处，除非我們能把等效于这根鉑銥棒长度的代用品轉輸到其他各处，还要有很精确的加法运算．注意，我們用"分割和試測"的方法，能測出米的几分之一长度.）

假定通过如上这些手續，已經測出 A 到 B 的距离，且假定有两个类同的时钟，一放在 A，另一放在 B，我們如何来測定 A 到

B 的光速呢？可設想某一装置，从 A 发出一光信号并使信号經过 A 处的时钟，就可把光訊号离开 A 的时間 t_A 記录下来，在 B 处同样有一个接收光訊号的装置，所以又記录了光訊号到达 B 的时間 t_B. 然而，这完全无助于我們，除非我們也知道 B 处时钟相对于 A 处时钟是同步的．如何确定这种同步呢？因为，不知道这种同步，就不可能测定光訊号从 A 到 B 的飞行时間更难說测定任何其他的量了．这一点构成了爱因斯坦在建立狭义相对論时所做的許多基本观测之一，而且是相对論的討論基础．

1-2 同 步 法

1-2.1 往复法

使时钟同步并测定光速的方法很多．其中一个方法是：自 A 发送一光訊号到 B，被 B 处的鏡子所反射而折回至 A，記录訊号出发时間 t_A 和返回至 A 的时間 t'_A，在此往复路程中的光速 v_{RT} 就可規定为

$$v_{RT}=\frac{\overline{AB}+\overline{BA}}{t'_A-t_A}, \tag{1.1}$$

式中 $\overline{AB}\equiv$ 自 A 到 B 的距离，因我們采用的几何满足 $\overline{AB}=\overline{BA}$，故得 $v_{RT}=2\overline{AB}/(t'_A-t_A)$．但是我們能否从这一結果中推断出从 A 到 B 和从 B 到 A 的光速呢？显然，此方法沒有告訴我們光从 A 到 B 需多长时間，因而我們仍須假定为此一时間間隔可由 $\Delta t_{AB}=\overline{AB}/v_{RT}$ 来表示．但是，这是狭义相对論中所作的假設，所以，如果光訊号在时刻 t_A 离开 A 处的钟，而在时刻 t_B 到达 B 处，

$$t_B=t_A+\overline{AB}/v_{RT}, \tag{1.2}$$

则 B 处的时钟称为与 A 处的时钟同步．习慣上用“c”表示量 v_{RT}.

显然，如果这个假設在某一参照系（用 S 和坐标 (t, x, y, z) 标志）中成立，那末在相对于該参照系以速度 v（用上面方法同步的

钟测定)运动的另一参照系中就不成立,假如通常的时空观不改变的話.

然而,在討論这个假設之前,先看一下启发这个假設的另一种同步法. 因此,为什么不能簡单地設想先把一起在 A 处的两个时钟使之同步再把其中之一自 A 处移到 B 处,然后与原来在 B 处的时钟比較一下时間呢? (假定当两时钟放得十分接近时,能够比較出任意小的誤差)因而原来在 B 处的钟如果与自 A 移到 B 的钟同步,那末它就与一直在 A 处的钟同步. 但当我們移动钟时怎么知道它甚么事也沒有发生呢? 让我們做下面的"实驗"罢. 在 A 处放上两个钟和一个光訊号的源, 在 B 处放上一个接收器和一个钟. 自 A 处把一个钟以各种速度(事先是不知道的)移动到 B, 使钟 B 与钟 A 同步, 然后利用通过此方法同步了的两个钟来测定光从 A 到 B 所經历的时間. 而且, 我們可以設想一种情形是带着一个钟从 A 步行到 B 的, 另一种情形是用飞机把钟从 A 运到 B 的, 还有第三种情形是用火箭把钟从 A "射"到 B 的. 于是就发現在非常慢地把钟自 A 移到 B 的极限情况下,以上法方式測定的光速将趋近于 c. 且发現此結果在所有慣性系中都有效❶.

因为 A 点与 B 点的方位沒有特别指定,所以这样测定的光速 c 显然与取向无关. 也就推出,光訊号自 A 到 B 再回到 A 的时間为 $2\overline{AB}/c$, 所以我們知道用此法同步时钟可得出一个熟悉的結果. 在 1-3 节中我們将把这些观念結合到一个数学方式中去, 使得它們, 如果在某一慣性系 S 中是正确的, 那末在相对于 S 以速率 v 运动的另一慣性系中也是正确的.

1-2.2 瞬时同步

最后,还要讲另一种同步法,即利用瞬时訊号或快于光速的訊

❶ 但由于地球引力場和地球自轉, 連着于地球的坐标系不构成慣性系. 显然, 它与自由降落的升降机极相似. 为簡单起見, 假定我們处在外层空間, 那儿可忽略永久引力場, 事实上, 我們的坐标系是伸展至无穷远的. 因而我們的慣性系将由相互作匀速运动的那些参照系构成.

号同步．然而，实驗告訴我們，光速是两点間傳送訊号的速度的上限．相对論基本精神是光速为极限速度．当然，数学上沒有理由說明为什么不能利用这种瞬时同步法来考虑和計算某些效应．例如，如果它們以洛倫茲不变方式 (Lorentz-invariant way) 傳播的話，可証明瞬时訊号将导致違背因果律．(A. Einstein: Ann. d. Phys. 23, 371 (1907)；或 C. Moller, p. 52; W. Pauli, p. 16)，如果它們不以洛倫茲不变方式傳播，則可局部地挑选出一个特定的参照系(称为絕对参照系或以太参照系)；因此很难理解为什么洛倫茲不变性成为如此有用以及在很大能量范圍內为实驗所証实。

1-3 綫　元

假定我們把慣性系 S 中的两个钟用 (1-2.1) 或 (1-2.2) 的方法使其同步，則光傳播一段距离 $\overline{AB}$ 所需时間为

$$\Delta t=c^{-1}\Delta\sigma=c^{-1}(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

这里 Δx, Δy, Δz 为 AB 二坐标之差，而 Δt 为由 A, B 两钟所測得的时間之差．将(1.3)平方，写成

$$c^2\Delta t^2-\Delta x^2-\Delta y^2-\Delta z^2=0, \tag{1.4}$$

即得表征光訊号傳播的二次式．換成极限 $\Delta t\to dt$, $\Delta x\to dx$ 等，用 ds^2 代表(1.4)左方，得到綫元一般表式

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2. \tag{1.5}$$

量 $d\tau=ds/c$ 叫"原时"．表式 (1.5) 是毕达哥拉斯公式的一种推广；它描写两事件間无穷小"距离"．注意：光訊号离开点 A (坐标 x_A, y_A, z_A，时間 t_A) 与到达点 B (t_B, x_B, y_B, z_B) 所构成的两事件間距离为零，即对于光訊号而言 $ds^2=0$．也可看到，如一质点以速度 v 自 A 到 B，那末因为 $dx=v_xdt$, $dy=v_ydt$ 等，有

$$ds^2=(c^2-v^2)dt^2, \tag{1.6}$$

式中 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$．注意：除非 $v=c$, $ds^2\neq0$．如果当 $v>c$, ds 变为虛数．

現在最好选擇 $c=1$ 的单位制，这样就可用单位 v/c 測量一切速度.

如所周知，假如考虑相对于 S 以速度 v 运动的另一参照系 S' 来求两者之間保持綫元形式不变的坐标变换，就得到洛侖兹变換. 假定我們沒有得到洛侖兹变換，只得到伽利略变换，ds^2 取怎样的形式呢？（設速度沿 x 方向），我們发現在坐标变换

$$\left.\begin{array}{ll} x'=x-vt & y'=y \\ t'=t & z'=z \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

下，綫元变为

$$ds^2=(1-v^2)dt^2-2v\,dt'\,dx'-dx'^2-dy'^2-dz'^2, \tag{1.8}$$

令 $ds^2=0$，得到光在 $\Delta x'$，$\Delta y'$，$\Delta z'$ 路綫上傳播的时間

$$\Delta t'=\frac{v\Delta x'}{1-v^2}\pm\frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\Delta x'^2}{1-v^2}+\Delta y'^2+\Delta z'^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.9}$$

与(1.3)不一致. 由上式得知，光的傳播时間与这一参照系的方向或速度有关. 所以两参照系 S，S' 之間存在基本的不对称性. 例如，如果使光沿一閉合路綫走，因为 $[v/(1-v^2)]\oint dx'$ 沿一閉合路綫为零，即得

$$\oint dt'=\frac{1}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}\oint\left[\frac{dx'^2}{(1-v^2)}+dy'^2+dz'^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.10}$$

然而我們从实驗上知道：直到現在还不曾測得这样依賴于一慣性系相对于另一慣性系的速度的效应. 由此可見，上述坐标变换不會描述 S' 参照系中的物理量度. 伽利略变换中蘊含甚么假設？显然除了变换的綫性以外（这在物理观点上是合理的），它假設 S' 中的杆的长度和钟的时間間隔与在 S 中的观測者所看到的相同，还有两个事件在 S 中同时，即 $\Delta t=0$，則在 S' 中也同时，$\Delta t'=0$，乃因 $\Delta t'=\Delta t$. 从牛頓力学观点来看，后一假設是合理的，因为原則上我們能瞬时地同步时钟，所以在牛頓力学中不存在极限速度. 另一方面，在相对論中，它是站不住脚的，因为光速已成为极限速度.

因此，为了达成"正确"变换，我們假定下列的假設是广义相对論的基础：

1）在带撇号的参照系中的钟不讀作坐标时 t'，而讀作原时（間隔）

$$ds=(1-v^2)^{\frac{1}{2}}dt'. \tag{1.11}$$

从(1.11)知，我們的变换应采用下式規定的新时間：

$$T=(1-v^2)^{\frac{1}{2}}t'=(1-v^2)^{\frac{1}{2}}t. \tag{1.12}$$

現在綫元取下面形式

$$ds^2=dT^2-\frac{2v dx'\,dT}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}-dx'^2-dy'^2-dz'^2, \tag{1.13}$$

(1.9) 变为：

$$\Delta T=\frac{v\Delta x'}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}}+\left[\frac{\Delta x'^2}{1-v^2}+\Delta y'^2+\Delta z'^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.14}$$

其次假定：

2）如果通过在規定的空間間隔上发送与回收光来測距离，則历經的原时仅正比于欧几里得距离，与参照系的运动无关．那末，必有 $\Delta T=2\Delta\sigma'$ ❶，这将是 (1.14) 規定的情形，設 S' 中杆的长度为

$$\Delta X=(1-v^2)^{-\frac{1}{2}}\Delta x'. \tag{1.15}$$

所以由上面假定，得到以下坐标变换

$$\left.\begin{array}{lll} X=\gamma(x-vt) & Y=y' & \\ T=\gamma^{-1}t & Z=z' & \gamma\equiv(1-v^2)^{-\frac{1}{2}} \end{array}\right\}, \tag{1.16}$$

在此坐标变换下，綫元取下列形式

$$ds^2=dT^2-2v\,dX\,dT-(1-v^2)dX^2-dY^2-dZ^2. \tag{1.17}$$

此綫元和相应坐标系具有洛倫兹变换中的絕大部分特性，除外的是：两事件在 $S(t, x, y, z)$ 中同时，則亦在 $S'(T, X, Y, Z)$ 中同时，因若 $\Delta t=0$，有 $\Delta T=\gamma^{-1}\Delta t=0$．例如，若光沿任一閉合路綫发送，它所历經的时間仅正比于路綫长度，因

---

❶ 因采用的单位制 $c=1$，故 $\Delta T=2\Delta\sigma'$．——譯者注

$$\Delta T=v\Delta X+\Delta\sigma, \tag{1.18}$$

式中 $\Delta\sigma=(\Delta X^2+\Delta Y^2+\Delta Z^2)^{\frac{1}{2}}$，又 $\oint v\Delta X=0$，故

$$\oint\Delta T=\oint v\Delta X+\oint\Delta\sigma=\oint\Delta\sigma \tag{1.19}$$

不管时钟是否已用适当方法同步，而认为已絕对地同步．那末光从 A 到 B（距离 ΔX）經历的时間不同于从 B 到 A 經历的时間．实际上，从 A 到 B 所需时間为

$$\frac{\Delta T}{\Delta X}=1+v, \tag{1.20}$$

回程上所需时間为

$$\frac{\Delta T}{\Delta X}=1-v. \tag{1.21}$$

对往返求平均，則为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{\Delta X}(\text{往})+\frac{\Delta T}{\Delta X}(\text{返})\right)=1, \tag{1.22}$$

或恢复原来单位，則上式右方等于 c^{-1}，同样，对于其他方向可得到类似結果．

然而正如我們以前談到过那样，如果不利用瞬时訊号或对于另一惯性系（此惯性系是不恰当的）把时钟取成同步，那末这样的同步法就无法实現．所以現在要求通过慢慢移动时钟来同步时钟，目前，这方法的意义在数学上是严謹的．

考虑原时表式（1.17）：設想一时钟在时間 ΔT 内經历位移 ΔX，$(\Delta Y,\ \Delta Z=0)$，那末

$$\Delta s=(\Delta T^2-2v\ \Delta T\ \Delta X-(1-v^2)\Delta X^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.23}$$

展开，仅保留一級位移，

$$\Delta s=\Delta T-v\Delta X. \tag{1.24}$$

換句話說，时钟的原时除了改变坐标时以外，尙改变了一个量 $-v\Delta X$．如果引进一新坐标

$$t_L=T-vX, \tag{1.25}$$

此坐标結合了原时变化，于是，对极慢位移 $\Delta X\ll\Delta T$，

$$ds=dt_L \tag{1.26}$$

如果在(1.17)坐标中 t_L 按(1.25)变换，将 T 代去，再引进 $x_L=X$，$y_L=Y$，$z_L=Z$，则得

$$ds^2=dt_L^2-dx_L^2-dy_L^2-dz_L^2. \tag{1.27}$$

这就再次得到狭义相对論綫元. 而且由(1.25)我們注意到

$$\left.\begin{aligned}t_L&=T-vX\\&=\gamma^{-1}t-v\gamma(x-vt)\\&=\gamma(t-vx)\end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

因此实际上 t_L 相当于狭义相对論中所引入的时間坐标. 但是，通过这种处理，可見引进此地方时 (local time)（正如洛侖兹所命名的）的可能性依賴于作出如同 (1.25) 坐标变换的可能性. 有时，这是不可能的，例如下面討論的轉动坐标系. 即是說，当我們同步了两时钟，慢慢移动其一，例如沿一轉动盘边緣移动，钟回到原来位置，其讀数与固定的那个钟不一样，而且其不一致性与位移路綫有关. 显然这不是(1.25)那样的情形，由于

$$\oint dt_L=\oint dT \text{ 因 } \oint v\,dX=0 \tag{1.29}$$

由于不能滿足式 (1.29) 那样的关系，就使轉动系統中綫元不可能具有狭义相对論的对角形式，如果不消除轉动的話.

最后指出：狭义相对論的一般結果可从綫元 (1.17) 及坐标变换(1.16)得到，正如在光訊号往返問題中所指出的，使我們常常要把测量的方法考虑在內. 用这个方式来了解广义相对論如何使我們考虑比狭义相对論中遇到的一般形式更为复杂与多变的綫元也許是有益的. 基本法則是在一充分小的时空区域內，不管怎样总是能够“重新归一化”(renormalize) 杆的长度和时钟的間隔，并校准时钟的同步以使狭义相对論綫元能够适用——纵然通常不能在时空流形的有限区域內这样做.

第二章　轉动坐标系

前节中考察了一种变換，它不使綫元不变，而只引进了非对角項，例如 $-2v\,dX\,dT$. 在轉动坐标系中，也会有此等項出現，它們不能象在慣性系中那样被消去.

除了物理学上的应用外，轉动坐标系在广义相对論中用处很大的理由有二：第一，与运动的相对論問題有关，即是，“轉动坐标系中的現象意味着轉动是絕对的呢？”（牛頓就主張‘絕对’的說法（著名的冰桶实驗）），“抑或是相对的呢？”（与牛頓同时代的哲学家以及19世紀的馬赫竭力主張‘相对’的說法，）——我們把这一极基本和困难的問題推迟到末节去討論. 第二，空間几何不是欧几里得几何，这提供了在广义相对論中考虑欧几里得以外的几何学的基本論証之一. 这个非欧几里得結构的理由可从下面的爱因斯坦所作的非常簡单的論証看出. 考虑一轉动圓盘相对于慣性系 S 而轉动. 在此慣性系中測得半徑为 R，再設想一小剛杆，放在盘的圓周上. 由于洛侖兹縮短，相对于 S，杆显得縮短. 因此繞此圓周放置杆的数目将大于盘静止时能放置的数目. 另一方面，将杆沿直徑放置，就不感到縮短，因为杆已垂直于它的安置方向而轉动了. 因此，在轉动系中圓周 C' 满足不等式 $C'>2\pi R$，結果，几何是非欧几里得的. 由于此非欧几里得特性，不可能找到联系轉动盘的几何到非轉动系統中的几何的空間坐标变換. 例如，假如 S' 中空間距离由 $d\sigma'^2=f(dx', dy', dz')$ 所确定，而在非轉动系中 $d\sigma^2=dx^2+dy^2+dz^2$，那末不存在下列形式的可以把綫元 $d\sigma^2$ 变换到 $d\sigma'^2$ 的坐标变換：

$$x'=f_1(x, y, z),\quad y'=f_2(x, y, z),\quad z'=f_3(x, y, z)$$

但可通过对 ds 的坐标变換来得到 $d\sigma'$，方法如下. 首先写下极坐标中的綫元，轉动軸沿 z 設置；則得