金融风险测度与集成研究

——基于Copula理论与方法

王宗润　著

科学出版社

金融风险测度与集成研究
——基于 Copula 理论与方法

王宗润　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统而全面地介绍Copula理论与方法，特别是就Copula理论应用于风险测度与集成时必须考虑的若干问题进行深入探讨；研究基于条件概率积分变换的Copula函数选择方法；从算法上实现二元以上的多元投资组合风险测度；将Copula理论应用于中国外汇市场、股票市场与中国银行业的风险测度与风险集成研究中，并做了大量的实证工作。

本书可作为高等院校风险管理、数量经济、应用统计等专业研究生及实际风险管理工作者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

金融风险测度与集成研究：基于Copula理论与方法/王宗润著. —北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-041094-8

Ⅰ. ①金… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①金融风险–风险管理 Ⅳ. ①F830.9

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第122017号

责任编辑：徐 倩/责任校对：郑金红
责任印制：阎 磊/封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年6月第 一 版 开本：720×1000 B5
2014年6月第一次印刷 印张：11 1/4
字数：226 000

定价：62.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

1952 年 Markowitz 发表在 *Journal of Finance* 上名为 *Portfolio selection* 的论文标志着现代投资组合理论的开始，同时也开创了使用资产收益率方差作为风险度量指标并对风险进行量化的先河，被誉为现代投资理论的第一次革命。该理论模型主要基于资产之间的线性相关来展开研究。1964 年，Sharp 和 Lintner、Mossion 三人几乎同时独立提出了资本资产定价模型（capital asset pricing model，CAPM），该模型同样以金融资产的线性相关性为基础；1976 年，Ross 创造性地在 CAPM 的基础上提出了套利定价理论（arbitrage pricing theory，APT），认为金融资产收益率与一组影响因子线性相关。随后，Breeden 1979 年提出的基于消费的 CAPM 模型（consumption capital asset pricing model，CCAPM）、Fama 等 1993 年提出的三因子模型以及 Holmstrom 等 2001 年提出的基于流动性资产的资产定价模型（liquidity asset pricing model，LAPM）都是以金融资产的线性相关性为基础。当资产收益率分布满足正态分布假设时，这种线性相关可以较好地描述变量间的相依关系。然而，资产收益率分布通常具有“尖峰厚尾”特点的事实说明，正态分布假设并不适合。此外，金融资产中存在着大量非线性关系，而传统的线性相关系数则对此无能为力。因此，人们需要一种新的理论方法来研究金融资产间的这种非线性的相关性与相依结构，而 Copula 理论与方法的出现则为人们提供了一条可供选择的途径。

Copula 方法是一种通过数据和单个变量的边缘分布来构造多个变量联合分布的统计学方法，也称为“连接函数”，最早由 Sklar 于 1959 年提出，并于 1999 年由 Embrechts 等首次引入金融领域，其应用目前已经涵盖相关性分析、期权定价、投资组合管理、风险管理等众多领域，其中在风险管理中的应用尤为广泛，分别在 VaR 方法、极值理论、时间序列分析、信用风险分析、银行整体风险分析中取得了长足进展。相对于传统线性相关系数，Copula 方法把多元分布的边缘分布和相依结构分开来考虑，并可灵活选择边缘分布的形式，可以更加准确地反映资产间的相关结构，提高模型预测的准确性。此外，随着 VaR（value at risk）或 CVaR（condition value at risk）作为一种新的风险度量方法开始被人们广泛接受，Copula 方法用于风险测度与集成以及进行风险管理的优势越来越明显。人们可以方便地由资产的边缘分布和 Copula 方法来近似估计其联合分布，进而运用蒙特卡罗模拟计算出投资组合的 VaR 值或 CVaR 值，从而为人们的风险管理活动提供极大便利。

本书系统而全面地介绍了 Copula 理论与方法，特别是就 Copula 理论应用于风险测度与集成时必须考虑的若干问题进行了深入探讨；研究了基于条件概率积分变换的 Copula 函数选择方法；从算法上实现了二元以上的多元投资组合风险测度；将 Copula 理论应用于中国外汇市场、股票市场与中国银行业的风险测度与风险集成研究中，并做了大量的实证工作。

本书的主要内容与结构安排如下。

第 1 章系统介绍了包括 Copula 函数定义与性质、Copula 函数分类与比较等在内的相关基础理论。

第 2 章探讨了 Copula 理论、方法应用于风险测度与集成时必须考虑的几个问题，包括 Copula 函数的参数估计、最优 Copula 函数的选择、风险测度指标的选择及返回检验等。

第 3 章着重探讨了基于条件概率积分变换的 Copula 函数选择方法，通过对条件概率积分变换下 AD、KS、CM 三种统计量的比较，讨论不同样本容量和变量维数下其对多种 Copula 函数的拟合效果，并利用 GSPTSE、INMEX.MX 和 NDX 三大股指样本，将基于条件概率积分变换的 Copula 函数选择方法与核密度估计和最大似然估计选择法的效果进行系统比较。

第 4 章将 Copula 理论、方法应用到多元外汇投资组合的风险测度中。通过构建广义自回归条件异方差-极值-Copula 模型（GARCH-EVT-Copula 模型），实证研究了我国汇改前后几种主要外币兑人民币汇率的单一风险值以及考虑汇率间非线性相关关系后不同投资比重下的外汇投资组合的风险测度。

第 5 章考虑 Copula 理论、方法在商业银行操作风险测度中的应用。以手工收集的我国银行业操作风险损失数据为样本，采用 Bayes 理论中的 Gibbs 抽样来获取参数估计值以减小低频率高损失数据不足带来的误差，并采用 Copula 函数对操作风险进行整合以获得联合损失分布函数，计算三类操作风险的整体损失。

第 6 章在第 5 章的基础上，考虑运用 Copula 方法对我国银行业的市场风险、信用风险与操作风险进行风险集成。运用静态 Copula 和动态 Copula 函数描述三类风险之间的非线性和动态相关结构，构建商业银行信用风险、市场风险和操作风险集成测度的统一框架，并实证研究了我国上市银行的信用风险、市场风险和操作风险的单一风险测度及风险集成测度，比较分析了不同相关性下的风险分散化效应。

第 7 章专门探讨了 Copula 理论在尾部相关性研究中的应用，包括两部分内容：一是汇率市场的尾部相干性测度；二是股票市场的尾部相干性测度。主要针对两步参数估计法在应用中存在误差大、计算复杂等缺陷，采用基于经验分布的半参数估计与非参数估计法确定相应边缘分布与 Copula 参数，对突发事件下的道琼斯工业指数与恒生指数之间的尾部相关性进行了实证研究。

本书的创新是多维度的，如对 Copula 理论、方法的理解与应用摒弃了先前文献中过多重理论而轻实践、对理论的论述又不太系统的做法，将论述重点放在了解决 Copula 理论应用于风险测度的几个关键问题上；将考虑了风险非线性与复杂性的双变量结构拓展到了 n 维的情形，并设计了相应的优化算法实施降维；就中国的金融风险测度问题做了大量的实证工作，将 Copula 理论应用于中国外汇市场、股票市场与中国银行业的风险测度与风险集成研究中等。并在大部分章节推演出了有指导意义的观点或启示，这也是本书现实意义的体现。

本书可作为高等院校风险管理、数量经济、应用统计等专业研究生及实际风险管理工作者的参考书。

在本书的完成之际，我衷心感谢参与及帮助研究和撰写本书的人们，感谢大家为本书的出版付出的努力。

感谢国家自然科学基金委员会面上项目（71371194、70973145）、教育部“新世纪优秀人才支持计划”项目（NCET-11-0524）、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目（2011JQ025）等对本书研究与出版给予的资助。

感谢我 2009 届、2010 届的研究生们——汪武超、吴伟韬、谭芳、王亚滨、彭俊、陈江艳、孙涛等对本书书稿资料的搜集、整理和撰写。

此外，在本书的出版过程中，科学出版社的编辑们付出了辛勤的劳动，在此也对他们表示衷心的感谢。

学无止境，研究亦是如此。对于一本深入浅出的好书而言，其写作与质量的提高是一个循序渐进的过程。虽然我们在这一过程中尽力完善，但由于水平有限，本书难免存在疏漏，敬请国内外学者和广大读者批评指正，并提出宝贵的意见与建议，共同推动该领域研究的发展。

王宗润
2014 年 4 月

目　　录

第 1 章　Copula 理论基础

Copula 函数的出现不仅将风险分析和多变量时间序列分析推向了一个新阶段，而且使得金融风险度量方法有了新的突破，即 Copula 可测度非椭球分布型分布（极端事件函数的分布）的风险，也可以准确地描述多变量分布的相关性。本章对 Copula 函数的定义与性质、Copula 相关性测度以及几种常用的 Copula 函数及 Copula 函数族进行了系统介绍。

1.1　Copula 函数的定义与性质

1.1.1　Copula函数的定义与Sklar定理

1）Copula 函数的定义

Nelsen[1]给出了 N 元 Copula 函数的严格数学定义。

定义 1-1　N 元 Copula 函数是指具有以下性质的函数 C：

（1）$C = I^N = [0,1]^N$，即函数 C 的定义域为 $I^N = [0,1]^N$；

（2）C 对它的每一个变量都是单调递增的；

（3）C 的边缘分布 $C_n(u_n)$ 满足 $C_n(u_n) = C(1,\cdots,1,u_n,1,\cdots,1) = u_n$，其中，$u \in [0,1]$，$n \in [1,N]$。

显然，若 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 是一元分布函数，令 $u_n = F_n(x_n)$ 是一随机变量，则 $C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n),\cdots,F_N(x_N))$ 是一个具有边缘分布函数 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 的多元分布函数。特别地，二元 Copula 函数 $C(\bullet,\bullet)$ 满足以下条件：

（1）$C(\bullet,\bullet)$ 的定义域为 $I^2 = [0,1] \times [0,1]$；

（2）$C(\bullet,\bullet)$ 有零基面，并且是二维递增的；

（3）对任意变量 $u,v \in [0,1]$，满足 $C(u,1) = u$ 和 $C(1,v) = v$。

假设 $F(x)$、$G(y)$ 是一元分布函数，并且是连续的，令 $u = F(x)$，$v = G(y)$，则 u、v 都服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布，换句话说，$C(u,v)$ 是一个边际分布服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布的二元分布函数，并且对于定义域内的任何一点 (u,v)，都有 $0 \leqslant C(u,v) \leqslant 1$ 成立。

Copula 函数的存在性和唯一性由 Sklar 定理保证。

2）Sklar 定理[2]

Sklar 定理 令 F 为具有边缘分布 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 的联合分布函数，那么，存在一个 Copula 函数 C，满足

$$F(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N)=C(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n),\cdots,F_N(x_N)) \tag{1-1}$$

若 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 连续，则 C 唯一确定；反之，若 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 为一元分布，那么由式（1-1）定义的函数 F 是边缘分布 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$ 的联合分布函数。

通过 Copula 函数 C 的密度函数 c 和边缘分布 $F_1(\bullet),\cdots,F_N(\bullet)$，可以方便地求出 N 元分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N)$ 的密度函数

$$f(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N)=c(F_1(x_1),\cdots,F_n(x_n),\cdots,F_N(x_N))\prod_{n=1}^{N}f_n(x_n) \tag{1-2}$$

其中，$c(u_1,\cdots,u_n,\cdots,u_N)=\dfrac{\partial C(u_1,\cdots,u_n,\cdots,u_N)}{\partial u_1\cdots\partial u_n\cdots\partial u_N}$；$f_n(\bullet)$ 是边缘分布 $F_n(\bullet)$ 的密度函数。

式（1-2）中，如果变量间的关系是独立不相关的，则 Copula 函数也是独立的，联合密度函数就是各边际密度函数的连乘积。如果变量间的关系是非独立不相关的，则这里的 Copula 函数表示的就是变量间的相关结构。

由此可见，Copula 函数为求取联合分布函数提供了一条便捷的通道，通过分布函数的逆函数和联合分布函数，可以推导出 Copula 函数，而通过 Copula 函数，能将边际分布和变量间的相关结构分开研究，减小多变量概率模型的分析难度，同时使分析过程更清晰。

1.1.2 Copula 函数的性质

Copula 函数具有优良的性质，它可以构造灵活的多元分布，由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度对于严格单调递增变换都不改变，在运用 Copula 理论构建金融模型时可以将随机变量的边际分布和它们之间的相关结构分开来研究等。

根据 Copula 函数的定义，可以得到二元 Copula 函数的一些基本性质。

（1）对于变量 u 和 v，$C(u,v)$ 都是递增的，即若保持一个边缘分布不变，联合分布将随着另一个边缘分布的增大而增大。

（2）$C(0,v)=C(u,0)=0$，$C(1,v)=v$，$C(u,1)=u$，即只要有一个边缘分布的发生概率为 0，相应的联合分布的发生概率就为 0；若有一个边缘分布的发生概率为 1，则联合分布由另一个边缘分布给出。

（3）$\forall u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$，如果 $u_1<u_2,v_1<v_2$，那么

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\geqslant 0$$

即若边缘分布 u、v 的值同时增大，则相应的联合分布的值也增大。

（4）对任意的 $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$，有

$$|C(u_2,v_2)-C(u_1,v_1)|<|u_2-u_1|+|v_2-v_1|$$

（5）若 u、v 独立，则 $C(u,v)=uv$。

其中，性质（1）～（3）可以扩展到三维甚至更高维的情况，但性质（4）、（5）只在二维情况下才成立。

N 元 Copula 函数 $C(\bullet,\bullet,\cdots,\bullet)$（简记为 C）的一些基本性质如下。

（1）对于任意变量 $u_n\in[0,1]\ (n=1,2,\cdots,N)$，$C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 都是非减的；

（2）$C_n(u_n)=C(u_1,u_2,\cdots,0,\cdots,u_N)=0$，$C_n(u_n)=C(1,\cdots,1,u_n,1,\cdots,1)=u_n$；

（3）对任意的变量 $u_n,v_n\in[0,1],n=1,2,\cdots,N$，均有

$$\left|C(u_1,u_2,\cdots,u_n)-C(v_1,v_2,\cdots,v_n)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left|u_n-v_n\right|$$

（4）$C^-\prec C\prec C^+$；

（5）若变量 $u_n=[0,1](n=1,2,\cdots,N)$ 相互独立，且用 $C^\perp$ 表示独立变量的 Copula 函数，则 $C^\perp=C(u_1,u_2,\cdots,u_N)=\prod_{n=1}^{N}u_n$。

1.2　基于 Copula 的相关性测度

Nelson[1]指出：对随机变量 $(x_1,\cdots,x_n,\cdots,x_N)$ 作严格的单调变换，相应的 Copula 函数不变，这是 Copula 研究和度量随机变量相依性结构特有的优势，比线性相关更规范，适用的范围更广。以下我们仅介绍两种经常用到的一致性和相关性测度指标。

1.2.1　Kendall 秩相关系数 τ

在金融风险管理中，通常会考虑资产价格的运动方向。如果运动方向一致，风险分散很难实现。要想分散风险，应该是一种资产价格下降时，另一种资产价格上升。设 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) 是独立同分布的向量，$x_1,x_2\in x$，$y_1,y_2\in y$，令

$$\tau=P\{(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0\}-P\{(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0\} \tag{1-3}$$

于是 τ 就度量了 x 与 y 变化的一致性程度。可以证明

$$\tau=2P\{(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0\}-1 \tag{1-4}$$

从式（1-4）可以看出 τ 在[−1，1]，设 (x_1,y_1) 相应的连接函数是 $C(u,v)$，Schweizer 和 Wolff[3]证明了 τ 可由相应的 Copula 函数给出：

$$\tau=4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\mathrm{d}C(u,v)-1 \tag{1-5}$$

很明显，对严格单调递增的函数 s 与 t，有

$$\left[s(x_1)-s(x_2)\right]\left[t(y_1)-t(y_2)\right]>0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(y_1-y_2)>0 \tag{1-6}$$

所以 τ 的值对严格单调增的变换是不变的，这就充分说明了 τ 作为 x、y 的相关性指标所具有的优点。

此外，对于椭圆族的 Copula 函数，主要是指 Gauss Copula 和 t-Copula（1.2.2 节将作介绍），可以得到 τ 的另一表达式如下：

$$\tau=\frac{2}{\pi}\arcsin\rho$$

其中，参数 ρ 表示椭圆分布与相应的椭圆 Copula 间的相关系数。该结论也提供了相关系数 ρ 的一种估计方法，我们可以通过逆函数得到 ρ 的无偏估计。当我们用相应的椭圆 Copula 函数描述相关关系时，如果二阶矩存在，则 ρ 可以由 Pearson 相关系数替代，如果二阶矩不存在，就必须使用 Kendall 秩相关系数 τ（简称 Kendall τ）。在这种情形下，Kendall τ 很有优势，因为它总是存在的，而且容易估计。尤其是针对金融中经常出现的后尾分布。

1.2.2 Spearman 秩相关系数 ρ

Spearman 秩相关系数 ρ（简称 Spearman ρ）考察的是变化的协调性，即当一种（组）金融资产发生了变化，另一种（组）资产是否也会发生变化，朝什么方向变，变化的幅度又是多大等。

设 (x, y) 有联合分布 $H(x, y)$，它们相应的边缘分布是 $F(x)$ 和 $G(y)$，$x_0\in x, y_0\in y$ 且 $(x_0,y_0)\sim F(x)G(y)$，即 x_0、y_0 独立。假定 (x,y) 与 (x_0,y_0) 也独立，令

$$\rho=3[P\{(x-x_0)(y-y_0)>0\}-P\{(x-x_0)(y-y_0)<0\}] \tag{1-7}$$

这里，x 与 x_0 同分布，而且独立，因此可以将 x_0 看做 x 的一个重复观察，y 与 y_0 的关系也是如此。而 x_0 与 y_0 是独立的，因此 $(x-x_0)(y-y_0)>0$ 表示 (x, y) 的变化与独立的 x_0 与 y_0 变化相一致，这个概率的大小自然也反映了一种相关性。很显然，它对严格单调增的变换也是不变的，因而它可以用 Copula 函数表示。当 (x,y) 的 Copula 函数 $C(u, v)$ 给定以后，其中，$u=F(x), v=G(y)$，Schweizer 和 Wolff[3]证明了 Spearman ρ 可由相应的 Copula 函数给出：

$$\rho=12\int_0^1\int_0^1 uv\mathrm{d}C(u,v)-3=12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\mathrm{d}uv-3 \tag{1-8}$$

1.2.3 Copula 函数的尾部相关

按照 Joe[4]、Schmidt 和 Stadtmuller[5]给出的定义，随机变量之间的尾部相关是指条件概率的极限，即给定一随机变量超出指定置信水平下的特定分位数函数值，另一随机变量超出相应置信水平下特定分位数函数值的条件概率。尾部相关

性可以衡量当随机变量 X 大幅度增加或者大幅度减少时，随机变量 Y 也发生大幅度增加或者大幅度减少的概率。

在金融风险测度中，可以利用 Copula 的尾部相关系数将尾部相关性量化，这样风险管理者可以根据尾部相关性，预测到当一个市场发生大幅下跌时另一个市场发生大幅下跌的概率。

关于 Copula 函数的尾部相关性分析我们将在 1.3 节中作详细论述，这里只给出 Copula 尾部相干性的定义。

对于分布函数分别为 F、G 的随机变量 X、Y，若 X、Y 的连接函数是 C，则 X、Y 基于该 Copula 函数的上尾相关系数 λ_{U} 和下尾相关系数 λ_{L} 定义如下：

$$\lambda_{\mathrm{U}}(\alpha')=\lim_{\alpha'\uparrow 1}P(Y>G^{-1}(\alpha')|X>F^{-1}(\alpha'))=\lim_{\alpha'\uparrow 1}\frac{1-2\alpha'+C(\alpha',\alpha')}{1-\alpha'} \tag{1-9}$$

$$\lambda_{\mathrm{L}}(\alpha')=\lim_{\alpha'\downarrow 0}P(Y<G^{-1}(\alpha')\mid X<F^{-1}(\alpha'))=\lim_{\alpha'\downarrow 0}\frac{C(\alpha',\alpha')}{\alpha'} \tag{1-10}$$

其中，α' 表示置信水平。$\lambda_{\mathrm{U}},\lambda_{\mathrm{L}}\in[0,1]$，当 $\lambda_{\mathrm{U}}(\lambda_{\mathrm{L}})>0$ 时，称 X、Y 上（下）尾渐近相关；当 $\lambda_{\mathrm{U}}(\lambda_{\mathrm{L}})=0$ 时，称 X、Y 上（下）尾渐近独立。

1.3　常用的 Copula 函数与相关性分析

金融相关性分析中常用的 Copula 主要有两大类：椭球 Copula 类和阿基米德 Copula 类。椭球 Copula 类可以由椭球分布得到，很容易从二元情形推广到多元情形。二元阿基米德 Copula 类包含许多参数族，各个阿基米德 Copula 族可以由相应的生成元函数得到，并且当生成函数满足一定条件时，可以得到多元阿基米德 Copula。

1.3.1　Copula 函数的分类

1）N 元 Gauss Copula 函数

根据文献[6]，可将 N 元 Guass Copula 分布函数和概率密度函数分别表示为

$$C\left(u_1,u_2,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho}\right)=\Phi_\rho\left(\Phi^{-1}\left(u_1\right),\Phi^{-1}\left(u_2\right),\cdots,\Phi^{-1}\left(u_N\right)\right) \tag{1-11}$$

$$C\left(u_1,u_2,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho}\right)=|\boldsymbol{\rho}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varsigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\varsigma}\right] \tag{1-12}$$

其中，$\boldsymbol{\rho}$ 是对角线元素为 1 的对称的正定矩阵，而 $|\boldsymbol{\rho}|$ 则是与矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 对应的行列式值；$\Phi_\rho(\bullet,\bullet,\cdots,\bullet)$ 是相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\rho}$ 的标准 N 元 Gauss 分布函数，$\Phi^{-1}(\bullet)$ 则是标准 N 元 Guass 分布函数的逆函数；$\boldsymbol{\varsigma}=\left(\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_N\right)'$，$\varsigma_n=\Phi^{-1}\left(u_n\right)$，$n=1, 2,\cdots,N$；$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。

2）N 元 t-Copula 函数

根据文献[6]，可将 N 元 t-Copula 分布函数和概率密度函数分别表示为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho},v)=T_{\rho,v}\left(T_v^{-1}(u_1),T_v^{-1}(u_2),\cdots,T_v^{-1}(u_N)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u_1)}\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u_2)}\cdots\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u_N)}\frac{\Gamma\left(\frac{v+N}{2}\right)|\boldsymbol{\rho}|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)(v\pi)^{\frac{N}{2}}}\left(1+\frac{1}{v}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\rho}^{-1}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{v+N}{2}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_N \tag{1-13}$$

$$c(u_1,u_2,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho},v)=|\boldsymbol{\rho}|^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{v+N}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{N-1}\left(1+\frac{1}{v}\boldsymbol{\varsigma}'\boldsymbol{\rho}^{-1}\boldsymbol{\varsigma}\right)^{-\frac{v+N}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right]^{N}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{\varsigma_n^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}} \tag{1-14}$$

其中，$\boldsymbol{\rho}$ 是对角线元素为 1 的对称的正定矩阵，$|\boldsymbol{\rho}|$ 则是与矩阵 $\boldsymbol{\rho}$ 对应的行列式值；$T_{\rho,v}(\bullet,\bullet,\cdots,\bullet)$ 是相关系数矩阵为 $\boldsymbol{\rho}$ 、自由度为 v 的标准 N 元 t 分布函数，$T_v^{-1}(\bullet)$ 则是自由度为 v 的一元 t 分布函数 $T_v(\bullet)$ 的逆函数；$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)'$；$\boldsymbol{\varsigma}=(\varsigma_1,\varsigma_2,\cdots,\varsigma_N)'$，$\varsigma_n=\Phi^{-1}(u_n)$，$n=1,2,\cdots,N$ 。

3）阿基米德 Copula 函数

根据文献[7]，阿基米德 Copula 分布函数的具体表达式为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N)=\varphi^{-1}\left(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+\cdots+\varphi(u_N)\right) \tag{1-15}$$

其中，$\varphi(\bullet)$ 是生成元，它满足 $\sum_{n=1}^{N}\varphi(u_n)\leqslant\varphi(0)$，且 $\varphi(1)=0$，对于任意的 $0\leqslant t\leqslant 1$，都有 $\varphi'(t)<0,\varphi''(t)>0$，也就是说，$\varphi(\bullet)$ 是一个凸函数，并且是减函数。$\varphi^{-1}(\bullet)$ 是 $\varphi(\bullet)$ 的逆，且在 $[0,\infty)$ 区间上是单调的。

此外，对无参数的生成元 $\varphi_0(\bullet)$ 进行组合，还可以构造出双参数二元阿基米德 Copula 函数。一个常用的双参数二元阿基米德 Copula 函数生成元 $\varphi_2(\bullet;\bullet,\bullet)$ 的组合式为[8]

$$\varphi_2(t;\alpha,\beta)=\left[\varphi_0(t^{\alpha})\right]^{\beta} \tag{1-16}$$

其中，$\alpha>0,\beta\geqslant 1$；$\varphi_0(t)$ 二阶可微且 $t\varphi_0'(t)$ 在 $(0,1]$ 区间非减。

例如，$\varphi_0(t)=\frac{1}{t}-1$ 为 Copula 函数 $C(u,v)=\frac{uv}{u+v-uv}$ 的生成元，运用式(1-16)，可以得到 $\varphi_2(t;\alpha,\beta)=\left(t^{-\alpha}-1\right)^{\beta}$，其中，$\alpha>0,\beta\geqslant 1$，根据式（1-15）给出的阿基米德 Copula 函数的表达式，通过生成元 $\varphi_2(t;\alpha,\beta)$ 和其逆函数 $\varphi_2^{-1}(t;\alpha,\beta)$，可以

方便地构造出一个双参数二元阿基米德 Copula 函数

$$\begin{aligned} C(u,v;\alpha,\beta) &= \varphi_2^{-1}\left(\varphi_2(u;\alpha,\beta)+\varphi_2(v;\alpha,\beta);\alpha,\beta\right) \\ &= \left\{\left[\left(u^{-\alpha}-1\right)^{\beta}+\left(v^{-\alpha}-1\right)^{\beta}\right]^{1/\beta}+1\right\}^{-1/\alpha} \end{aligned} \tag{1-17}$$

另外，根据式（1-15）给出的阿基米德 Copula 函数的表达式，还可以方便地构造出 N 元的阿基米德 Copula，例如，很容易将式（1-17）扩展为一个两个参数的阿基米德 Copula

$$C(u,v;\alpha,\beta)=\left\{\left[\left(u_1^{-\alpha}-1\right)^{\beta}+\left(u_2^{-\alpha}-1\right)^{\beta}+\cdots+\left(u_N^{-\alpha}-1\right)^{\beta}\right]^{1/\beta}+1\right\}^{-1/\alpha}$$

在 Copula 函数的应用中，二元的 Gumbel Copula、Clayton Copula 以及 Frank Copula 是三类常用的阿基米德 Copula 函数，这三类函数也很容易扩展到 N 元的情形，根据文献[9]，可将 N 元的三类 Copula 函数定义如下。

N 元 Gumbel Copula 函数的表达式为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N;\alpha)=\exp\left\{-\left[\sum_{n=1}^{N}(-\ln u_n)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\alpha}\right\},\quad \alpha\in(0,1] \tag{1-18}$$

N 元 Clayton Copula 函数的表达式为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N;\theta)=\left(\sum_{n=1}^{N}u_n^{-\theta}-N+1\right)^{-\frac{1}{\theta}},\quad \theta\in(0,\infty) \tag{1-19}$$

N 元 Frank Copula 函数的表达式为

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{\prod_{n=1}^{N}\left(\mathrm{e}^{-\lambda u_n}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\lambda}-1\right)^{N-1}}\right),\quad \lambda\neq 0,\quad N\geqslant 3，\ \lambda\in(0,\infty) \tag{1-20}$$

对于阿基米德 Copula 函数，容易证明

$$\begin{aligned} C(u_1,u_2,u_3) &= C\left(C(u_1,u_2),u_3\right) \\ C(u_1,u_2,u_3,u_4) &= C\left(C(u_1,u_2,u_3),u_4\right) \\ C(u_1,u_2,\cdots,u_{N-1},u_N) &= C\left(C(u_1,u_2,\cdots,u_{N-1}),u_N\right) \end{aligned}$$

4）极值 Copula 函数

极值 Copula 函数是指满足以下关系式的 Copula 函数：

$$C\left(u_1^t,u_2^t,\cdots,u_N^t\right)=C^t\left(u_1,u_2,\cdots,u_N\right),\quad \forall t>0 \tag{1-21}$$