高职高专"十二五"规划教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

主编◎高焱 陈继业

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

教师免费下载
www.cmpedu.com

配电子课件

高职高专“十二五”规划教材

高 等 数 学

主　　编　高　焱　陈继业

副 主 编　张宏斌　郝连军　王达开　杨　迪

参　　编　刘　君　田春尧　穆德恒　刘　枫　周宇飞

主　　审　孙玉明

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》编写的高职数学教材。本书淡化了理论推导和证明，强化了实践技能，突出了职业教育改革特色，难易程度更适合目前的生源状况。

本书的主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，拉普拉斯变换，线性代数。

本书可作为高职高专理工类各专业以及部分普通高等院校的教材，也可作为其他专业的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/高焱，陈继业主编. —北京：机械工业出版社，2011.7

高职高专“十二五”规划教材

ISBN 978-7-111-34609-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①高…②陈… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 091216 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：李大国 责任编辑：李大国 责任校对：陈延翔

封面设计：王伟光 责任印制：乔 宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2011 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm ·13.75 印张·335 千字

0001—3000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-34609-8

定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销售一部：(010)68326294

销售二部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

门户网：http://www.cmpbook.com

教材网：http://www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

前　言

在本书的编写过程中，充分考虑到高职院校学生的实际情况，注意高等数学与初等数学的衔接，遵循“以应用为目的，必需、够用为度”的教学原则，适度淡化了深奥的数学理论，尽可能从学生熟悉的问题入手，通过图、表直观地讲解概念和公式。本书层次分明、深入浅出，力求使基础概念、基本定理直观化、具体化，以便于学生理解。

为了提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，本书在编写过程中加强了数学知识在工程技术方面的具体应用，力图体现高职教育实践性、应用性的特点。同时，在编写中力求使教材结构紧凑，语言简练，对必要的基本理论、基本方法和基本技能的阐述深入浅出、通俗易懂，便于教与学。在每章、节后都配有一定数量的习题、复习题，供教师和学生选用，并附有部分习题参考答案。

本书由辽宁石化职业技术学院高焱、陈继业任主编，张宏斌、郝连军、王达开、杨迪任副主编，参加编写的人员还有刘君、田春尧、穆德恒、刘枫、周宇飞。孙玉明老师认真审阅了全稿并提出了宝贵意见。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

极限揭示了函数的变化趋势，是数学中一个重要的基本概念，也是学习微分学的基础. 本章将在复习和加深理解函数有关知识的基础上，研究函数的极限和连续等问题.

第一节　初等函数

一、函数的概念

在中学阶段已学过函数的定义，为今后便于学习，现将函数的有关概念重述如下.

1. 函数的定义

定义 1　设 D 是一个实数集，如果对属于 D 中的每一个数 x，按照某个对应关系 f，都有唯一数值 y 和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中，x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切实数时，与它对应的函数值组成的集合 M 叫做函数的**值域**.

2. 函数的几种特性

（1）**奇偶性**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称. 如果函数 $f(x)$ 既非偶函数，也非奇函数，那么 $f(x)$ 叫做**非奇非偶函数**.

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$ 是奇函数，$y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 是偶函数.

（2）**单调性**　对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调增加**的，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调增加区间；如果有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调减少**的，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的单调减少区间. 单调增加的函数的图形沿 x 轴正向上升，单调减少的函数的图形沿 x 轴正向下降，如图 1-1 所示.

在某一个区间内单调增加或单调减少的函数都称为这个区间内的**单调函数**.

（3）**周期性**　对函数 $y=f(x)$，若存在不为零的数 T，使得

$$f(x+T)=f(x)$$

在 $f(x)$ 的定义域内恒成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 使上式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$ 的**最小正周期**，简称**周期**.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期是 2π；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的周期是 π，它们都是周期函数. 又如，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 也是周期函数，其周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$.

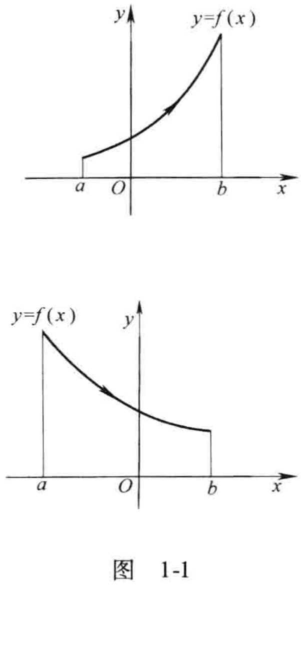


图　1-1

（4）**有界性**　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使对任意 $x\in(a,b)$ 时，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

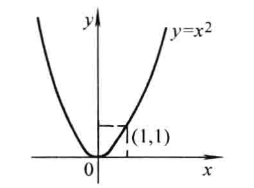
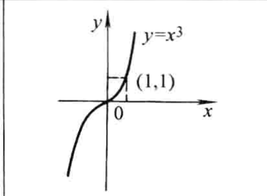
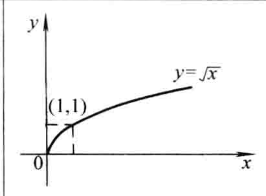
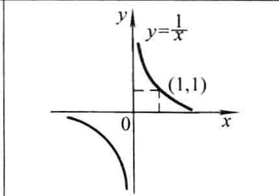
成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有界**．有界函数的图形位于两平行线 $y=\pm M$ 之间．

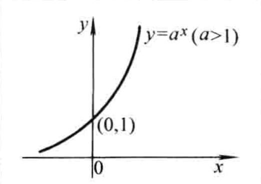
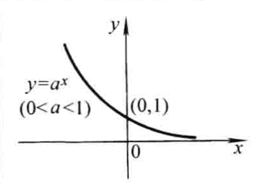
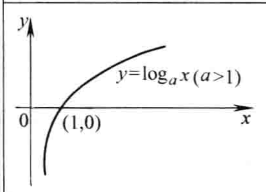
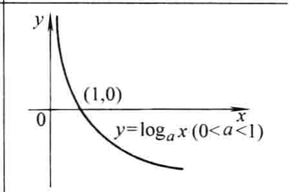
例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的．又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为当 $x\in(0,1)$ 时，不存在正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对所有 $x\in(0,1)$ 成立．但 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[2,3]$ 内有界，因为当 $x\in[2,3]$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 成立，此时 $M=\dfrac{1}{2}$．

二、基本初等函数

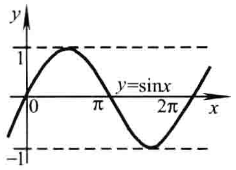
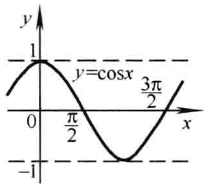
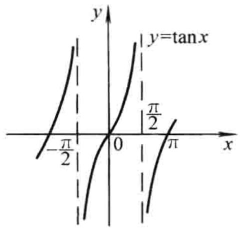
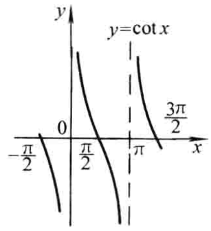
幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**．为便于应用，将它们的定义域、值域、图形和特性列表如下（表1-1）：

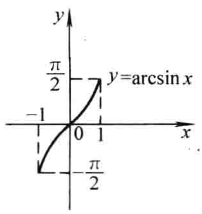
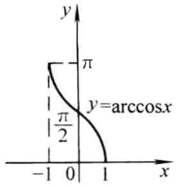
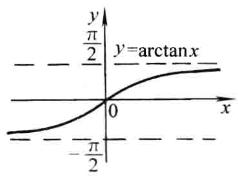
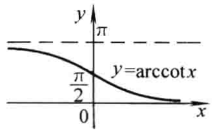
表 1-1　基本初等函数

函数	幂函数			
	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
图形				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in[0,+\infty)$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$y\in[0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$	$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
特性	偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加	奇函数 单调增加	单调增加	奇函数 单调减少

函数	指数函数		对数函数	
	$y=a^x\quad(a>1)$	$y=a^x\quad(0<a<1)$	$y=\log_a x\quad(a>1)$	$y=\log_a x\quad(0<a<1)$
图形				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(0,+\infty)$	$x\in(0,+\infty)$
值域	$y\in(0,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
特性	单调增加	单调减少	单调增加	单调减少

（续）

函数	三角函数			
	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图形				
定义域	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$
值域	$y\in[-1,1]$	$y\in[-1,1]$	$y\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
特性	奇函数，周期2π，有界，在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加，在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$	偶函数，周期2π，有界，在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$内单调减少，在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$	奇函数，周期π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加$(k\in\mathbf{Z})$	奇函数，周期π，在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少$(k\in\mathbf{Z})$

函数	反三角函数			
	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\operatorname{arccot} x$
图形				
定义域	$x\in[-1,1]$	$x\in[-1,1]$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$x\in(-\infty,+\infty)$
值域	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$y\in[0,\pi]$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$y\in(0,\pi)$
特性	奇函数，单调增加，有界	单调减少，有界	奇函数，单调增加，有界	单调减少，有界

三、复合函数

在实际问题中，我们常会遇到几个较简单的函数组合成为复杂函数的情况．例如，质量为 m 的物体，以初速度 v_0 向上抛，由物理学知道，动能$E=\frac{1}{2}mv^2$，即动能 E 是速度 v 的函

数；$v=v_0-gt$，即速度 v 又是时间 t 的函数(不计空气阻力)，于是得 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$，这样就把动能 E 通过速度 v 表示成了时间 t 的函数.

又如，从函数 $y=\ln(x+1)$ 可以看出，这个函数的值不是直接由自变量 x 来确定的，而是通过 $x+1$ 来确定的. 如果用 u 表示 $x+1$，那么函数 $y=\ln(x+1)$ 就可表示为 $y=\ln u$，而 $u=x+1$. 也就是说，y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

一般地，给出下面的定义：

定义 2　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$；而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，则 y 是 x 的函数. 这个函数叫做函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做**中间变量**.

根据上述定义，可知函数 $y=\sin^2x$ 是 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的函数.

需要注意的是，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域必须取在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则复合函数将失去意义.

例如，复合函数 $y=\ln u$，$u=x+1$，由于 $y=\ln u$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以中间变量 $u=x+1$ 的值域必须在 $(0,+\infty)$ 内，即 x 应在 $(-1,+\infty)$ 内.

例 1　指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{x^2+3x}$　　　　(2) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$

解　(1) $y=\sqrt{x^2+3x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=x^2+3x$ 复合而成的.

(2) $y=\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\arcsin v$，$v=\frac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的.

应当指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，其原因在于 $u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$，与 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集为空集.

分析一个复合函数的复合过程时，每个层次都应是基本初等函数或常数与基本初等函数的四则运算；当分解到常数与自变量的基本初等函数的四则运算式，即简单函数时，就不再分解.

四、初等函数

定义 3　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合所构成的，能用一个式子表示的函数叫做**初等函数**.

例如，$y=1+\sqrt{x}$，$y=2\sin\frac{x}{2}$，$y=x\lg x$，$y=a^{\sin x}$ 等都是初等函数. 初等函数是最常见的一类函数，它是微积分研究的主要对象.

五、分段函数

有时，我们会遇到在不同的区间内用不同式子来表示的函数，这样的函数叫做**分段函数**.

例如，符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个分段函数．当$x>0$时，$f(x)=1$；当$x=0$时，$f(x)=0$；当$x<0$时，$f(x)=-1$．它的图形如图1-2所示．

求分段函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算．

例2　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

求$f(2)$、$f(-4)$，并作出函数图形．

解　$f(3)=3^2=9$，$f(-4)=-(-4)=4$．

函数$f(x)$的图形由直线$y=-x$的$(-\infty,0)$段和抛物线$y=x^2$的$[0,+\infty)$段组成，如图1-3所示．

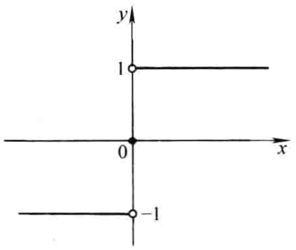


图　1-2

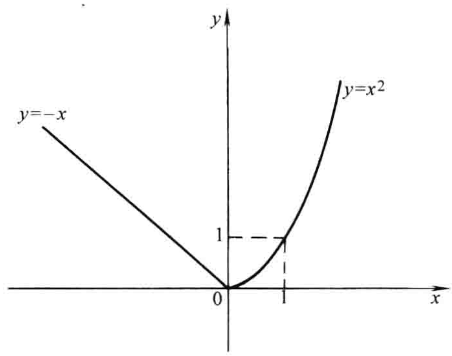


图　1-3

分段函数$y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$即$y=\sqrt{x^2}$，是由$y=\sqrt{u}$，$u=x^2$复合而成的，所以它是一个初等函数．而一般情况下，分段函数不是初等函数．

习题　1-1

1．求下列函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$　　(3) $y=\sqrt{|x|-1}$

(4) $y=\lg\sin x$　　(5) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$　　(6) $y=\dfrac{x}{\tan x}$

2．设$f(x)=1+x^2$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{3}$，求$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(t^2-1)$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$．

3．设$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 2(1-x) & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$，作出函数的图形，并求$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f(2)$的值．

4．将下列各题中的y表示为x的函数．

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^3-1$　　(2) $y=\arcsin u$，$u=\sqrt{x}$

(3) $y=\lg u$, $u=2^v$, $v=\cos x$　　(4) $y=\mathrm{e}^u$, $u=v^2$, $v=\tan x$

5. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=(1+x)^3$　　(2) $y=\ln\sin x$

(3) $y=\arccos\sqrt{1+x}$　　(4) $y=\sin^2(2x-1)$

第二节　极限的概念

极限是高等数学的重要概念之一，主要研究自变量在某一变化过程中函数的变化趋势. 下面首先讨论数列(整标函数) $x_n=f(n)$ ，$n\in\mathbf{N}$ 的极限，然后再讨论一般函数 $y=f(x)$ 的极限.

一、数列的极限

考察下面两个数列的变化趋势：

(1) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots$

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

为清楚起见，现将这两个数列的前几项分别在数轴上表示出来，分别如图1-4、图 1-5 所示.

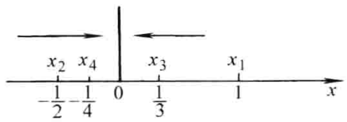


图　1-4

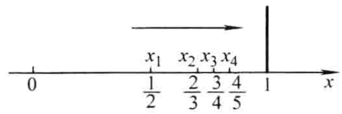


图　1-5

由图 1-4 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的附近，即数列 x_n 无限接近于 0；由图 1-5 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧，即数列 x_n 无限接近于 1.

上述的两个数列反映出的数列的变化趋势是：当 n 无限增大时，x_n 都分别无限接近于一个确定的常数. 对此有如下定义：

定义 1　如果当 n 无限增大时，数列 x_n 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做数列 x_n 的**极限**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$.

由定义 1 可知，数列(1)的极限是 0，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$；数列(2)的极限是 1，可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

应当指出，“数列 x_n 无限接近一个确定的常数 A”，是指随着 n 的无限增大，x_n 与 A 的距离 $|x_n-A|$ 无限减小. 如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限接近的常数 A 不存在，则 x_n 的极限就不存在，如 $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n]$不存在.

例 1　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (2) $x_n = -\frac{1}{3^n}$

解 列表考察这两个数列的前 5 项，及当 $n\to\infty$ 时，它们的变化趋势：

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$	$2-\frac{1}{1}$	$2+\frac{1}{2}$	$2-\frac{1}{3}$	$2+\frac{1}{4}$	$2-\frac{1}{5}$	…	$\to 2$
$x_n = -\frac{1}{3^n}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{243}$	…	$\to 0$

由上表中两个数列的变化趋势及数列极限的定义可知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[2 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 2$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3^n}\right) = 0$

由数列极限的定义不难得出下面的结论：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$ (C 为常数)

二、函数的极限

前面讨论了当 $n\to\infty$ 时，数列 $x_n = f(n)$ 的极限. 现就一般函数 $y=f(x)$的自变量 x 的两类变化形式讨论函数的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

首先来看一个例子：当 $x\to\infty$ (即 $|x|$ 无限增大) 时，显然函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 无限地接近于 0. 一般地，当 $|x|$ 无限增大时，根据 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的定义：

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|$ 相当大时有定义，如果当 $|x|$ 无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad 当 x\to\infty 时，f(x)\to A$$

例 2 讨论极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$.

解 如图 1-6 所示，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\frac{1}{x^2}$ 值无限接近于 0，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

在定义 2 中，$x\to\infty$ 的含义是：既可 $x\to+\infty$ (即 x 取正值而无限增大)，亦可 $x\to-\infty$ (即 x 取负值而绝对值无限增大). 但有时 x 的变化趋势只需或只能取这两种变化中的一种情形. 对此有如下定义：

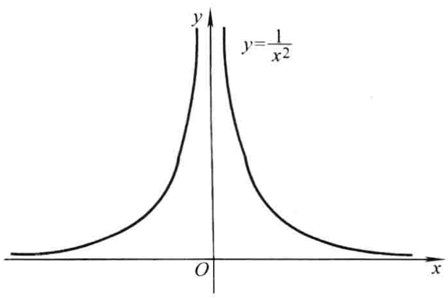


图 1-6

定义 3 如果当 $x\to+\infty$ (或 $x\to-\infty$) 时，函数

$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} f(x)=A \quad 或 \quad 当 x\to+\infty\,(x\to-\infty)时，f(x)\to A$$

由图 1-6 可以看出，对于函数 $y=\frac{1}{x^2}$，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \quad 及 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

这两个极限值与 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ 相等，都是 0.

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在且都等于 A.

例 3 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的极限.

解 如图 1-7 所示，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x$ 虽然都存在，但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

$x\to x_0$ 表示 x 以任何方式从 x_0 的左、右两侧无限趋近于 x_0，但 $x\neq x_0$. 先看下面的例子：

考察当 $x\to-1$ 时，函数 $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的变化趋势（图 1-8）. 当 x 无限趋近于 -1 时，$y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的值无限趋近于 -2.

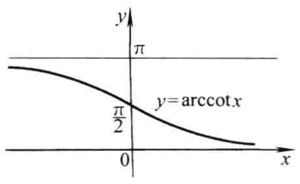


图 1-7

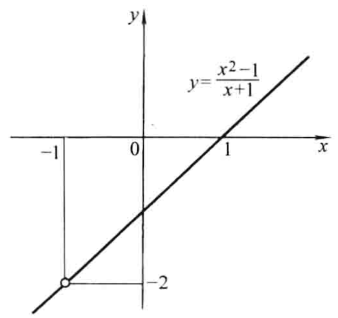


图 1-8

对于这种当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，有如下的定义：

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁有定义（在点 x_0 处，函数 $f(x)$ 可以没有定义），如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad 当 x\to x_0 时，f(x)\to A$$

例如，当 $x\to-1$ 时，$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的极限为 -2，可记为

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$$

3. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左极限和右极限

在前面给出的当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限定义当中，x 既可以从 x_0 的左侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^-$），同时也可以从 x_0 的右侧无限趋近于 x_0（记为 $x \to x_0^+$）．下面给出当 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时函数极限的定义：

定义 5　如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

显然，函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充要条件是：$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在并且相等，即 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

例 4　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$ 当 $x \to 0$ 和 $x \to 1$ 时的极限.

解　如图 1-9 所示.

（1）因为

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

可见 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时的左、右极限不相等，所以它在 $x=0$ 处的极限不存在.

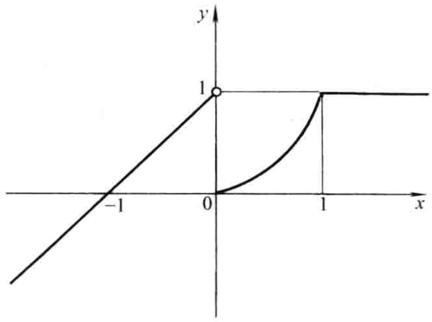


图　1-9

（2）因为

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 = 1$$

可见 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的左、右极限都存在且相等，所以

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

习题　1-2

1. 观察下列数列当 $n \to \infty$ 时的变化趋势，并写出它们的极限.

（1）$x_n = \dfrac{1}{n} + 4$　　（2）$x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$　　（3）$x_n = \dfrac{n}{3n+1}$

（4）$x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$　　（5）$x_n = n \cdot (-1)^n$　　（6）$x_n = \sin n\pi$

2. 观察并写出下列极限值.

（1）$\lim\limits_{x \to 3} (\dfrac{1}{3}x + 1)$　　（2）$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$　　（3）$\lim\limits_{x \to \infty} (2 + \dfrac{1}{x})$

(4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$　　　　(5) $\lim\limits_{x \to 1} \ln x$　　　　(6) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$

3. 讨论函数 $f(x) = \dfrac{x}{x}$ 当 $x \to 0$ 时的极限.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$，画出函数的图形，求当 $x \to 0$ 时，函数的左、右极限，并判别当 $x \to 0$ 时函数的极限是否存在.

5. 证明函数 $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x^2 & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ 在 $x \to -1$ 时极限不存在.

第三节　无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 无穷小的定义

在实际问题中，人们常会遇到极限为零的变量. 例如，把石子投入水中，水波向四面传开，它的振幅随时间的增加而逐渐减小并趋向于零. 又如，电容器放电时，其电压随着时间的增加而逐渐减少并趋向于零.

对于这样的变量，给出如下定义：

定义 1　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么函数 $f(x)$ 叫做当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，由于 $\lim\limits_{x \to 3}(x - 3) = 0$，所以函数 $x - 3$ 是当 $x \to 3$ 时的无穷小.

又如，由于 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

应当注意，无穷小是一个变量，不能将其与很小的常数相混淆；常数中只有“0”可以看做是无穷小，因为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} 0 = 0$$

2. 无穷小的性质

在自变量同一变化过程中，无穷小有以下性质：

1）有限个无穷小的代数和是无穷小.

2）有界函数与无穷小的积是无穷小.

3）有限个无穷小的乘积是无穷小.

证明从略.

例如，由于 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，且 $|\cos x| \leqslant 1$，由无穷小性质 2 知

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cos x = 0$$

3. 函数极限与无穷小的关系

函数的极限与无穷小之间有如下的重要关系：

定理 1　具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

二、无穷大

1. 无穷大的定义

定义 2　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么函数 $f(x)$ 叫做当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的**无穷大量**，简称**无穷大**.

按照极限定义，如果 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时为无穷大，那么它的极限不存在，然而，为了便于描述函数的这种变化趋势，也说“函数的极限是无穷大”，记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$$

例如，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$，$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

应当注意，无穷大是指绝对值无限增大的变量，不能将其与绝对值为很大的常数混淆，任何常数都不是无穷大.

2. 无穷小和无穷大的关系

定理 2　在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

证明从略.

习题　1-3

1. 以下各数列中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $x_n = \dfrac{1}{2n}$　　(2) $x_n = -n$

(3) $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2}$　　(4) $x_n = \dfrac{2}{n^2 + 1}$

2. 下列函数在自变量如何变化时为无穷小？自变量如何变化时为无穷大？

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x$　　(2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

(3) $y = \tan x$　　(4) $y = \ln x$

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^3 + x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x^2}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cos x$

第四节　极限的运算

比较复杂的函数极限需要用极限的运算法则来计算，下面给出函数极限的**四则运算**