21世纪高职高专系列规划教材·计算机类专业
高职高专“十二五”规划教材

计算机数学基础

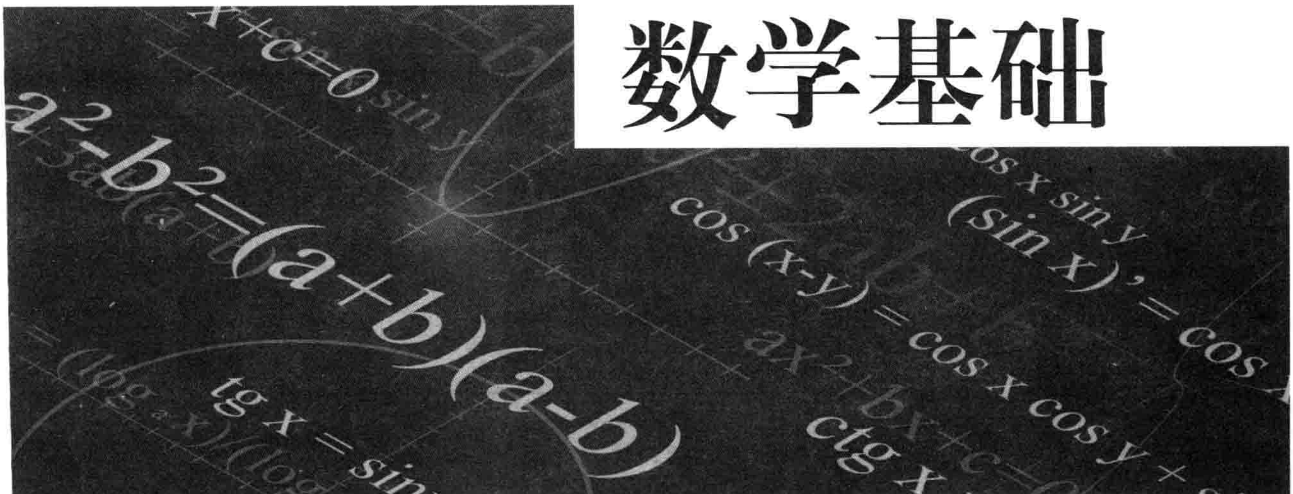
主　编◎陈　洁

JISUANJI
SHUXUE JICHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高职高专系列规划教材·计算机类专业
高职高专“十二五”规划教材

计算机数学基础



主　编◎陈　洁

JISUANJI
SHUXUE JICHU

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

计算机数学基础／陈洁主编. —北京：北京师范大学出版社，2012.8
（21世纪高职高专系列规划教材）
ISBN 978-7-303-15051-9

Ⅰ.①计… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①电子计算机—数学基础—高等职业教育—教材 Ⅳ.①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第179547号

营销中心电话 010-58802755 58800035
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com.cn
电子信箱 bsdzyjy@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：北京东方圣雅印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：17
字　　数：370千字
版　　次：2012年11月第1版
印　　次：2012年11月第1次印刷
定　　价：27.50元

策划编辑：周光明　　责任编辑：周　阳
美术编辑：高　霞　　装帧设计：国美设计
责任校对：李　菡　　责任印制：吕少波

前　言

本书从高职教育的实际出发，在高职示范校建设理念的指导下，结合国家首批示范校建设成果，根据计算机类各专业对高等数学教学内容的需求进行编写.

为了更好地适应高等职业教育培养技术应用型人才的需求，考虑到高职计算机类各专业的特点，本着数学与专业相融，基础数学为专业服务和以应用为目的，以必需、够用为度的原则，对微积分、线性代数、概率论和离散数学的内容进行简化并整合到一起. 使学生对计算机科学的数学基础与这些数学思想和方法的应用有一个总体的了解和把握. 本书在微积分部分，介绍了一元微积分的基本内容；在线性代数部分，介绍了行列式、矩阵的思想和方法以及求解线性方程组的基本思路；在概率论部分，着重介绍基本概率的计算方法、随机变量的分布与数字特征；在离散数学部分，介绍了集合论、逻辑推理和图论等内容.

本书在教学内容选取上，适度淡化理论，简化抽象概念和逻辑推理，注重培养学生的数学应用能力. 从日常生活的实际问题出发，引出相关的数学知识，体现数学思想或者用数学解决实际问题的方法，以提高学生的数学文化素质和用数学解决实际问题的能力. 不仅教给学生数学知识，而且培养学生应用数学的意识，使学生掌握计算机专业所必需的数学基本知识和技能，具备专业需要的逻辑思维能力和抽象概括能力，从而建立定量分析的思想方法，逐步提高分析和解决实际问题的能力.

本书由微积分、线性代数、概率论和离散数学四个模块组成，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，积分及其应用，行列式，矩阵，向量与线性方程组，随机事件及其概率，随机变量及其分布，随机变量的数字特征，集合论，数理逻辑和图论 13 章内容. 其中第 1～3 章由天津职业大学李艳梅编写；第 4～10 章和第 12～13 章由天津职业大学陈洁编写；第 11 章由天津农学院职业技术学院甄爱军编写. 全书的结构安排和统稿由陈洁教授承担.

由于作者水平、时间、精力所限，本书难免存在不足之处，恳请广大读者指正.

编者

2012 年 5 月

目录

第 1 章　函数、极限与连续

与初等数学不同，微积分以变量为研究对象. 极限是微积分中处理问题的最基本的方法，微积分的概念、性质和法则都是通过极限推导出来的. 因此，极限是学习微积分的理论基础.

本章在对已有函数知识复习的基础上，学习极限的概念、运算法则、连续函数的概念与性质等.

1.1　函数及其图像

1.1.1　函数的概念与性质

1. 函数的概念

(1)邻域

定义 1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集 $\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为 $U(a,\delta)$ 的**中心**，δ 称为 $U(a,\delta)$ 的**半径**.

因为 $|x-a|<\delta$ 等价于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以点 a 的 δ 邻域还可以表示为开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

从数轴上看，点 a 的 δ 邻域表示以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间. 图像如图 1.1 所示.

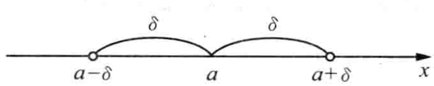


图 1.1

把点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a **的去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

(2)函数的概念

定义 2　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其取值范围内任取一个值时，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数(也称一元函数)，记作 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 自变量 x 的取值范围称为函数的**定义域**，常用 D 表示.

函数的定义域，是使函数的表达式有意义的一切实数的集合．在实际问题中应根据实际意义具体确定．

在讨论函数关系时，常说函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 处有定义，即当自变量取某个已知值 x_0 时，函数 y 就有确定的值 $f(x_0)$ 与之对应，$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值．函数值的全体称为函数的**值域**，常用 W 表示．

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的．如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个**多值函数**．

对于多值函数，如果我们附加一些条件，使得在附加条件之下，按照这个法则，对每个 $x\in D$，总有唯一确定的实数值 y 与之对应，那么这就确定了一个函数．我们称这样得到的函数为多值函数的**单值分支**．

例如，反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是多值的．当限制其函数值 y 的范围在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值的了，此时的反正弦函数习惯上记为 $y=\arcsin x$，而当研究了反正弦函数 $y=\arcsin x$ 后，对于多值反正弦函数 $y=\arcsin x$ 就会有所了解．

从函数的定义中知道，确定函数关系的两个主要因素是定义域和对应法则，两个函数只有这两个因素完全相同时，才表示同一函数．不同的函数必须用不同的记号表示，如表示为 $f(x)$，$g(x)$，$\varphi(x)$等．

(3)分段函数

定义 3 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为**分段函数**．

例 1 设 x 为任一实数，

$$y=f(x)=[x],$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数．此函数称为**取整函数**．

例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.6]=-4$，$[4.5]=4$．

把 x 看做自变量，则函数 $f(x)=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 W 为全体整数，如图 1.2 所示．此图像称为**阶梯曲线**．在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1．

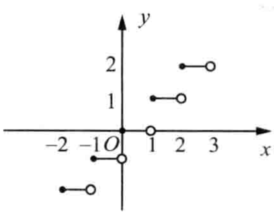


图 1.2

例 2 函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{1,0,-1\}$．如图 1.3 所示．

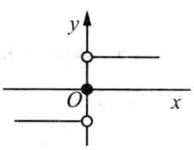


图 1.3

(4)隐函数

前面所遇到的一元函数多数是表示成 $y=f(x)$ 这种形式的，例如

$$y=2x-3.$$

事实上，关于 x，y 的二元方程 $2x-y-3=0$ 与一元函数 $y=2x-3$ 表示变量 x 和变量 y 同样的函数对应关系.

关于变量 x，y 的一个二元方程

$$F(x,\ y)=0, \tag{1.1}$$

在一定的条件下，就确定了 y 是 x 的函数.

定义 4 一般地，如果变量 x 和 y 满足方程(1.1)，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程(1.1)在该区间内确定了一个**隐函数**.

与之对应的，表示成 $y=f(x)$ 这种形式的函数关系称为**显函数**.

例如，函数 $y=x^{\alpha}$ 为一元显函数，而由方程 $x^3+xy^2-1=0$ 确定的 y 是 x 的函数为一元隐函数.

2. 函数的性质

(1)函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 内有定义，如果对于区间 D 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内**单调增加**，区间 D 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间. 如果区间 D 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内**单调减少**，区间 D 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

从几何图像上看，当自变量从左向右变化时，单调增加函数的图像是上升的，单调减少函数的图像是下降的.

(2)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域内的任意 x 值，总满足 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于定义域内的任意 x 值，总满足 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

(3)函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的实数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内的任意 x 值都成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常，周期函数的周期指的是最小正周期.

周期函数的图像在定义域内的每个长度为 T 的区间上具有相同的形状.

(4)函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 D 内有定义，如果存在正数 M，使得对该区间 D 内任意一个自变量 x 的值，其对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间 D 内**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在该区间 D 内**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内是有界的，$f(x)=\dfrac{1}{x}$

在区间$(0, +\infty)$内是无界的，而在区间$(\delta, +\infty)$内则是有界的，其中δ是某个确定的正数.

1.1.2 初等函数和复合函数

1. 基本初等函数和初等函数

基本初等函数包括：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1)幂函数

函数$y=x^\mu$(μ为常数)称为**幂函数**.

例如$y=x$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$等. 这一类函数的定义域因μ的不同而不同. 但不论μ取何值，幂函数$y=x^\mu$在$(0, +\infty)$内总有定义. 如图1.4所示.

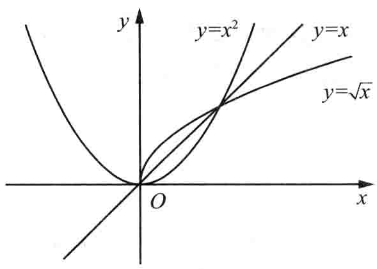


图1.4

当$\mu>0$时，幂函数的图像通过点$(0, 0)$和$(1, 1)$，在$(0, +\infty)$内严格单调增加且无界.

(2)指数函数

$y=a^x$(a为常数，且$a>0$，$a\neq1$)称为**指数函数**. 其定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$. 当$a>1$时，函数严格单调增加且无界；当$0<a<1$时，函数严格单调减少且无界. 如图1.5所示.

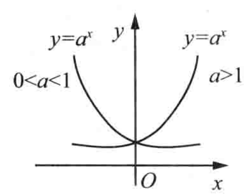


图1.5

函数的图像都过点$(0, 1)$，$y=a^x$与$y=a^{-x}$的图像关于y轴对称.

$y=\mathrm{e}^x$是微积分及应用中常用的指数函数，常数$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 8\cdots\cdots$

(3)对数函数

$y=\log_a x$(a为常数，且$a>0$，$a\neq1$)，称为**对数函数**，它是指数函数$y=a^x$的反函数. 其定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$. 当$a>1$时，函数严格单调增加且无界；当$0<a<1$时，函数严格单调减少且无界. 如图1.6所示.

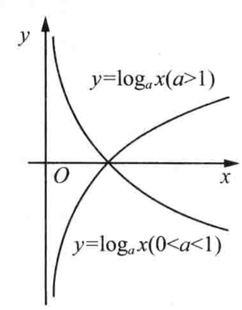


图1.6

函数的图像都过点$(1, 0)$，$y=\log_a x$与$y=\log_{\frac{1}{a}} x$的图像关于x轴对称.

以e为底的对数称为**自然对数**，记为$y=\ln x$.

(4)三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数统称为**三角函数**.

正弦函数 $y=\sin x$：定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 2π 为周期、有界的奇函数，如图 1.7 所示.

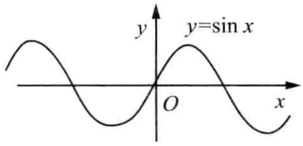


图 1.7

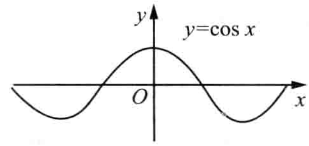


图 1.8

余弦函数 $y=\cos x$：定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，它是以 2π 为周期、有界的偶函数，如图 1.8 所示.

正切函数 $y=\tan x$：定义域为$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 π 为周期、单调增加、无界的奇函数(在每一个周期内)，如图 1.9 所示.

余切函数 $y=\cot x$：定义域为 $x\in(k\pi,(k+1)\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，它是以 π 为周期、单调减少、无界的奇函数(在每一个周期内)，如图 1.10 所示.

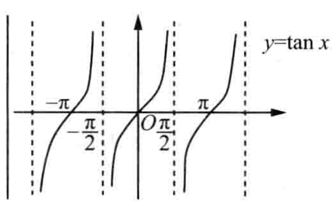


图 1.9

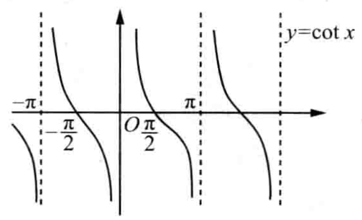


图 1.10

(5)反三角函数

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数统称为**反三角函数**.

反正弦函数 $y=\arcsin x$：定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，它是有界的、单调增加的奇函数，是正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$的反函数，如图 1.11 所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$：定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，它是有界的、单调减少的函数，是余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$的反函数，如图 1.12 所示.

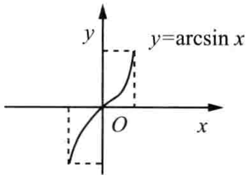


图 1.11

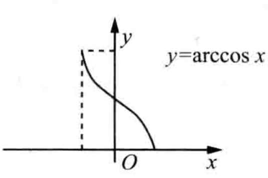


图 1.12

反正切函数 $y=\arctan x$：定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，它是有界的、单调增加的奇函数，是正切函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$的反函数，如图 1.13 所示.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$：定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$，它是有界的、单调减少的函数，是余切函数 $y=\tan x$，$x\in(0, \pi)$的反函数，如图 1.14 所示.

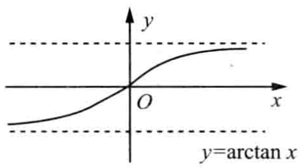


图 1.13

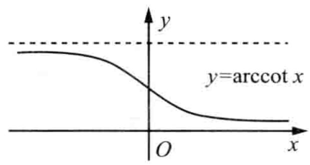


图 1.14

定义 6 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成且用一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=e^{\cos(2x+1)}$，$y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln(x+\sqrt{x^2+1})$等都是初等函数.

不满足此定义的函数均称为非初等函数. 一般的，分段函数不是初等函数.

2. 复合函数

定义 7 设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_u，函数 $u=\varphi(x)$，定义域为 D_x，值域为 W_u，当函数 $u=\varphi(x)$的值域 W_u 全部或部分落在函数 $y=f(u)$的定义域 D_u 时，称函数 $y=f[\varphi(x)]$是 x 的**复合函数**. 它是由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的函数，其定义域为 D_x，称 u 为**中间变量**.

例如，有两个函数 $y=\sin u$，$u=3x+1$，而函数 $u=3x+1$ 的函数值全部落在函数 $y=\sin u$的定义域内，所以这两个函数复合而成的函数为 $y=\sin(3x+1)$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$.

又如，函数 $y=\sqrt{1-x}$可以看做是由函数 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x$ 复合而成的. 显然，函数 $u=1-x$ 的值域是$(-\infty, +\infty)$，只有一部分$[0, +\infty)$落在函数 $y=\sqrt{u}$的定义域内，所以这个复合函数的定义域为$(-\infty, 1]$.

注意：

(1)复合函数 $y=f(u)$的定义域或者与 $u=\varphi(x)$的值域相同，或者是 $u=\varphi(x)$的值域的一部分.

(2)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=x^2+2$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[2, +\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1, 1]$，在 $u=x^2+2$ 中无论 x 取什么值，对应的 u 值都不属于区间$[-1, 1]$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x^2}{8}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\tan\frac{x^2}{8}}$，这里 u 和 v 都是中间变量.

1.2 极　　限

实例 1　“一尺之棰，日取其半，万世不竭”

中国古代数学家庄周(约公元前 369～公元前 286 年)在《庄子・天下篇》中引述惠施的话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”这句话的意思是指一尺长的木棒，第一天取它的一半，即$\frac{1}{2}$尺；第二天再取剩下的一半，即$\frac{1}{4}$尺；第三天再取第二天剩下的一半，即$\frac{1}{8}$尺……我们可以一天天地取下去，而木棒是永远也取不完的.

我们将每天剩余的木棒长度写出来就是：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…可以无穷无尽地取值. 当 n 很大时，$\frac{1}{2^n}$很小；当 n 无限增大时，$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0.

实例 2　圆面积的计算——割圆术

“割圆术”求圆面积的做法和思路：

先作圆的内接正三边形，把它的面积记作 A_1，再作内接正六边形，其面积记作 A_2，再作内接正十二边形，其面积记作 A_3，…，照此下去，把圆的内接正 $3\times2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$边形的面积 A_n，这样得到一数列

$$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots$$

当 n 无限增大时，A_n 无限接近圆的面积.

1.2.1　数列的极限

为了给出极限的定义我们首先引入数列，并讨论数列的极限.

1. 数列

定义 1　设函数 $u_n=f(n)$，$n\in\mathbf{N}$，当自变量 n 按自然顺序取值时，对应的函数值排成一列数，

$$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$$

这列数称为数列，记作$\{u_n\}$或 u_n. 数列中每一个数称为数列的项，第 n 项 u_n 称为数列的**一般项**或**通项**.

例如，(1)$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(2)$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(3)$-2,4,-6,8,\cdots,(-1)^n2n,\cdots$

(4)$-1,1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

(5)$1^2,2^2,\cdots,n^2,\cdots$

(6)$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,1+\frac{(-1)^n}{n},\cdots$

它们的一般项依次为：

$$u_n=\frac{1}{n},\ u_n=\frac{n}{n+1},\ u_n=(-1)^n 2n,\ u_n=(-1)^n,\ u_n=n^2,\ u_n=1+\frac{(-1)^2}{n}.$$

定义 2 设数列$\{u_n\}$，若有

$$u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\cdots$$

则称该数列为**单调增加数列**；反之，若有

$$u_1\geqslant u_2\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant\cdots$$

则称该数列为**单调减少数列**.

例如，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$和$\{n^2\}$为单调增加数列，而数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$为单调减少数列.

定义 3 设数列$\{u_n\}$，若存在正数 M，使一切 u_n 均有

$$|u_n|\leqslant M$$

成立，则称数列$\{u_n\}$为**有界数列**；若这样的 M 不存在，则称数列$\{u_n\}$**无界**.

例如，数列$\{(-1)^{n+1}\}$，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$都是有界数列，而数列$\{(-1)^n 2n\}$，$\{n^2\}$为无界数列.

对于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，当 n 无限增大时，$\left\{\frac{1}{n}\right\}$无限接近于 0；对于数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，当 n 无限增大时，$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$无限接近于 1.

2. 数列极限的定义

定义 4 如果当 n 无限增大时，数列$\{u_n\}$无限接近于一个确定的常数 a，那么称 a 为数列$\{u_n\}$的**极限**，或称数列$\{u_n\}$**收敛于** $\boldsymbol{a}$. 记作$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 或 $u_n\to a(n\to\infty)$.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 或 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 或 $\frac{n}{n+1}\to 1(n\to\infty)$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$ 或 $\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\to 1(n\to\infty)$.

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1)$\{u_n\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$；　(2)$\{u_n\}=\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$；　(3)$\{u_n\}=\left\{(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\}$.

解 (1)$\{u_n\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$的各项顺次为

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots$$

当 n 无限增大时，u_n 无限接近于 0，所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0;$$

(2)$\{u_n\}=\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$各项顺次为

$$0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n+1},\ \cdots$$

当 n 无限增大时，u_n 无限接近于 1，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1.$$

(3) $\{u_n\}=\left\{(-1)^n\frac{1}{n^2}\right\}$各项顺次为

$$-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ -\frac{1}{25},\ \cdots$$

当 n 无限增大时，u_n 无限接近于 0，所以根据数列极限的定义可知

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}=0.$$

一般地，$\lim\limits_{n\to\infty} c=c$（$c$ 为常数）.

不是任何数列都是有极限的. 例如，数列$\{(-1)^n 2n\}$，$\{(-1)^{n+1}\}$，$\{n^2\}$都没有极限.

定义 5 如果当 n 无限增大时，数列$\{u_n\}$不能接近于一个确定的常数，则称数列$\{u_n\}$没有极限，或称数列$\{u_n\}$**发散**，记作$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 不存在.

当 n 无限增大时，如果$\{u_n\}$无限增大，则数列没有极限. 这时，习惯上也称数列$\{u_n\}$的极限是无穷大，记作$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\infty$.

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$；$\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=\infty$.

3. 数列极限的性质

下面不加证明地给出数列极限的一些重要性质.

性质 1 若数列$\{u_n\}$收敛，则数列$\{u_n\}$的极限是唯一的.

性质 2 若数列$\{u_n\}$收敛，则数列$\{u_n\}$一定有界.

性质 3 若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足不等式 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$.

性质 4 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$. 若 $A>B$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时（N 以后所有项），有 $x_n\geqslant y_n$；若存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $x_n\geqslant y_n$，则 $A\geqslant B$.

有界数列未必收敛，如数列$\{(-1)^n\}$，它是一个有界数列，但是它的极限不存在. 数列有界是数列收敛的必要条件，数列收敛是数列有界的充分条件.

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.