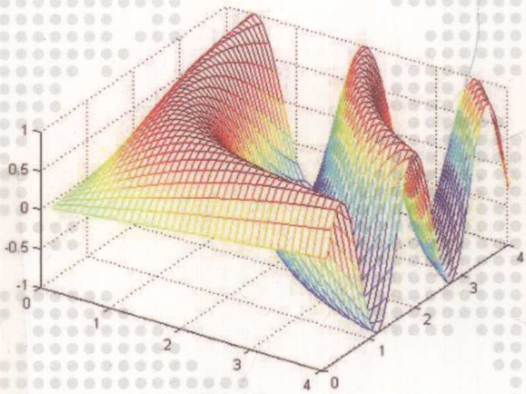
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学学习辅导与提高

上册

瞿晓鸿 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学
学习辅导与提高

上　册

主　编　瞿晓鸿
副主编　冯莹莹　杨　勇

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是与主教材《高等数学·上册》(瞿晓鸿主编，中国铁道出版社2011年出版)配套的同步学习辅导书，旨在帮助读者快速、系统掌握高等数学基本概念、基本理论和基本技能，以便顺利通过高等数学课程结业考试和研究生入学考试。

全书共7章，与主教材对应。每章包括一个或多个知识块，每个知识块包括内容归纳、解疑释惑、补充例题、习题提示、补充习题、补充习题答案与提示、自测题，最后附有三套考研模拟试题。

本书适合作为普通高等学校非数学专业使用，可以与主教材配套使用，也可单独使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与提高．上册/瞿晓鸿主编．—北京：中国铁道出版社，2013.9
普通高等学校"十二五"规划教材
ISBN 978-7-113-17042-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①瞿… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第197912号

书　　名：高等数学学习辅导与提高·上册
作　　者：瞿晓鸿　主编

策　　划：唐　旭　李小军　　**读者热线**：400-668-0820
责任编辑：马洪霞
编辑助理：曾露平
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市华丰印刷厂
版　　次：2013年9月第1版　　2013年9月第1次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张**：13　**字数**：255千
书　　号：ISBN 978-7-113-17042-4
定　　价：25.00元

前 言

在多年的教学中我们发现，很多学生花费大量精力和时间学习高等数学，可效果总是不理想，事倍功半，最后没有通过考试或考研。其原因是多方面的，但最主要的原因是他们对高等数学这门课程缺乏深入理解和融会贯通。有的学生想进一步提高自己分析数学问题和解决数学问题的能力，但为找不到一本合适的参考书而烦恼。他们迫切希望我们能编纂一套深入浅出、言简意赅、系统精炼的教学参考书，以帮助学生深入地理解高等数学的精髓，顺利通过该课程的结业考试和研究生入学考试。

经过编纂人员的多年努力，多次试用和修订讲义，《高等数学学习辅导与提高·上册》一书终于与广大读者见面了。本书是《高等数学·上册》(佛山科学技术学院瞿晓鸿主编)的配套参考书。

本书分7章，包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的运用、不定积分、定积分、定积分的运用、微分方程。每章包括一个或多个知识块。每个知识块包含如下内容：

知识块	内容归纳	解疑释惑	补充例题	习题提示	补充习题	补充习题答案与提示	自测题
目标	重点、难点和要点的归纳总结	分析和解答疑难问题、易混淆的概念、计算方法	展示各种题型的一般解法和常用技巧	给出典型习题、难题的解法要点或者全解	加强重点题型的解题方法和技巧	给出解题的思路、知识要点、以及需注意的问题	对基本概念、定理、解题方法掌握程度的测试

本书融入了编者多年教学实践经验，与教学内容紧紧相扣；对于高等数学的理论和运用，本书不仅可以提纲挈领、纲举目张；而更重要的是，本书是通过高等数学课程结业考试或研究生入学考试的优秀参考书。

参加本书编纂工作的有佛山科学技术学院瞿晓鸿、冯莹莹、杨勇等。其中，瞿晓鸿担任主编，冯莹莹、杨勇担任副主编。

限于编者的知识水平，书中难免有不妥之处，望同行专家与广大读者不吝赐教。

编 者

2013 年 05 月 30 日

目　录

第 1 章

函数与极限

1.1 函数的极限

1.1.1 内容提要

1.1.1.1 函数

1. 基本初等函数

指数函数($y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$)、对数函数($y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$)、幂函数($y=x^\mu$)、三角函数($y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$)和反三角函数($y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\text{arccot}\, x$)统称为基本初等函数.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D，且 $g(D)\subset D_f$，则由下式确定的函数

$$y=f(g(x)), x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数.

3. 初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的可以由一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.1.2 函数的极限

1. 需熟记的极限

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\begin{cases} 0 & \text{当 } |a|<1 \\ 1 & \text{当 } a=1 \\ \text{不存在} & \text{其他} \end{cases}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & 当\ n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & 当\ n=m.\\ \infty & 当\ n>m\end{cases}$

2. 重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. 求极限的方法

1)应用极限的四则运算法则;

2)应用连续函数的性质;

3)应用有界量乘无穷小仍为无穷小;

4)应用夹逼法则;

5)应用函数的单调有界性;

6)应用左右极限:极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;

7)应用约分、通分、有理化、拆项等方法消去未定型因素;

8)应用两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ 及\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e};$$

9)应用等价无穷小替换:若 $\alpha(x)\to 0$,则

$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\tan\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\arctan\alpha(x)\sim\ln(1+\alpha(x))\sim \mathrm{e}^{\alpha(x)}-1$,$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{1}{2}\alpha^2(x)$,$[1+\alpha(x)]^{\beta}-1\sim\alpha(x)\beta$;

10)应用洛必达法则.

1.1.2 疑惑解析

1. 在数列极限定义中,能否说 N 与 ε 之间存在函数关系?

答:只能说 N 与 ε 一般有关,而不能说 N 与 ε 之间存在函数关系. 因为对任意给定的 $\varepsilon>0$,如果能找到一个满足定义要求的 N_0,那么任何一个大于 N_0 的正整数 N,都可以作为定义要求的 N,这意味着 N 的值并不是由 ε 的值所唯一确定的,所以按照函数的定义,N 与 ε 之间不存在函数关系.

2. 下列极限运算对吗?

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+\pi}+\dfrac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n\pi}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+\pi}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n\pi}\quad\text{（四则运算）}$$

$$=0+0+\cdots+0=0;$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-1)-(\sqrt{1+\sin x}-1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}\quad\text{（加一项减一项）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}-\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}\quad\text{（四则运算）}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\tan x}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin x}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x}\quad\left(\text{利用}\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot x^2}=0.$$

答：题(1)，(2)的做法都是错的. 题(1)的做法错在第一步，这步试图按四则运算拆开为无限个极限，再进行运算，但是四则运算只适用于拆开为有限个极限的运算，所以是错误的. 题(2)的做法错在第二步，这步试图按四则运算拆开为两个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\sin x}-1)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}$ 进行运算，但是这两个极限并不存在，不满足四则运算的前提，因此是错误的.

正确做法如下：

(1)利用夹逼准则. 由

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}\leqslant\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)\leqslant\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1,$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1.$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\cdot\frac{1}{2}\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. 在复合函数的极限运算法则中，能否把条件“在某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $g(x)\neq u_0$”去掉，即该法则能否只在条件“$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$”之下，推得结论 $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$”？

答：一般来说，法则中的条件“在某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内 $g(x)\neq u_0$”不能去掉，若是去掉该条件，结论就不一定成立了．例如，

设 $u=g(x)=x\sin\frac{1}{x}$，$f(u)=\begin{cases}0 & 当\ u=0\\ 1 & 当\ u\neq 0\end{cases}$，则

$$f(g(x))=\begin{cases}0 & 当\ x=\frac{1}{k\pi}\\ 1 & 当\ x\neq\frac{1}{k\pi},x\neq 0\end{cases}\qquad(k=\pm1,\pm2,\cdots).$$

显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))$ 不存在．如果不验证“在某个去心邻域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内 $g(x)\neq 0$”这一条件是否成立，就由 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$，$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$ 推得 $\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))=\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$，那么将得到错误的结果．

4. 下面的极限运算对吗？

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

答：结果正确，做法不对．这里运算的第一步试图应用等价无穷小代换：$\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\frac{1}{x}(x\to 0)$，这是错误的．因为无穷小量 $\alpha(x)$ 与无穷小量 $\beta(x)$ 作比较的前提条件是：在某个去心邻域 $\mathring{U}(0,\delta)$ 内分母 $\beta(x)\neq 0$，而这里 $\beta(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 当 x 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$\beta(x_n)=0$，所以当 $x\to 0$ 时 $\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)$ 与 $x^2\sin\frac{1}{x}$ 并不是等价无穷小．

正确的做法是：当 $x\neq 0$ 时，$\left|\sin\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant x^2$，所以

$$0\leqslant\left|\frac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant|x|,$$

而$|x|\to0(x\to0)$，由夹逼准则或极限的定义知，所求极限为0.

5. 作等价无穷小的代换时，为什么对分子或分母中的某个加项作代换，就可能出错？

答：由等价无穷小的性质知，作等价无穷小代换时，必须将分子或分母分别代换成它们各自的等价无穷小（由于$\alpha\sim\alpha,\beta\sim\beta$，故保持分子或分母不变是可以的）. 另外，如果分子（或分母）为若干个因子的乘积，那么可对其中的一个或若干个因子做无穷小代换，所得的新的分子（或分母）与原来的分子（或分母）是等价无穷小. 但是如果对分子（或分母）中的某个项作代换，则不能保证代换后的新的分子（或分母）与原来的分子（或分母）是等价无穷小. 例如，在求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$时，如果将$\sin x,\tan x$均换成$x$，那么分子变成0，得出极限为0. 而事实上

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

1.1.3 补充例题

1.1.3.1 函数符号的应用

例1 已知$f(x+1)=\sin x+x^2$，求$f(x-1)$.

解 令$t=x+1,x=t-1$，故$f(x+1)=f(t)=\sin(t-1)+(t-1)^2$，所以

$$\begin{aligned}f(x-1)&=\sin[(x-1)-1]+[(x-1)-1]^2\\&=\sin(x-2)+(x-2)^2.\end{aligned}$$

例2 设$f(x)$满足等式

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}\tag{1-1}$$

其中a、b、c均为常数，且$|a|\neq|b|$，试求$f(x)$.

解 令$x=\dfrac{1}{t}$，代入(1-1)式，得$af\left(\dfrac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,\tag{1-2}$$

(1-1)$\times a-$(1-2)$\times b$，得$(a^2-b^2)f(x)=\dfrac{ac}{x}-bcx$，所以

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right).$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & 当\ x<0\\ 1 & 当\ x\geqslant 0\end{cases}$. 试求 $f(f(x))$.

解 因为 $f(f(x))=\begin{cases}1+f(x) & 当\ f(x)<0\\ 1 & 当\ f(x)\geqslant 0\end{cases}$,

$f(x)<0$ 时,有 $x<-1$;$f(x)\geqslant 0$ 时,有 $x\geqslant -1$(包括 $f(x)=1>0$ 时,$x\geqslant 0$),故

$$f(f(x))=\begin{cases}2+x & 当\ x<-1\\ 1 & 当\ x\geqslant -1\end{cases}.$$

1.1.3.2 复合函数的分解

例 4 下列函数是由哪几个函数复合而成的?

(1)$y=2^{\sin^3 x}$;　　(2)$y=\left(\arctan\dfrac{1}{\ln x}\right)^3$.

解 (1)函数 $y=2^{\sin^3 x}$ 是由 $y=2^u$,$u=v^3$,$v=\sin x$,所构成的复合函数.

(2)函数 $y=\left(\arctan\dfrac{1}{\ln x}\right)^3$ 是由 $y=u^3$,$u=\arctan v$,$v=\dfrac{1}{w}$,$w=\ln x$ 复合而成的复合函数.

复合函数的分解就是将复合函数从外向内逐层求导直至最后的自变量,其中每层的函数是基本初等函数或是常数与基本初等函数的和、差、积、商.

1.1.3.3 函数的几种特性及反函数

例 5 设 $\varphi(x)$、$f(x)$、$\psi(x)$都是单调增加函数,并且 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$,试证:$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant \psi(\psi(x))$.

证 因为 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$, (1-3)

又因 $f(x)$单调增加及 $\varphi(x)\leqslant f(x)$,所以

$$f(\varphi(x))\leqslant f(f(x)). \tag{1-4}$$

同理

$$\psi(f(x))\leqslant \psi(\psi(x)). \tag{1-5}$$

再由 $f(x)\leqslant \psi(x)$,可得

$$f(f(x))\leqslant \psi(f(x)). \tag{1-6}$$

综合(1-3)、(1-4)、(1-5)、(1-6)式可得

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant \psi(\psi(x)).$$

例 6 证明:(1)一个多项式是偶函数的充要条件是它只含偶次项;

(2)一个多项式是奇函数的充要条件是它只含奇次项.

证 (1)充分性.设 $f(x)$只含偶次项,则 $f(-x)=f(x)$,这是显然的.

必要性.设 $f(x)$是偶函数,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n. \tag{1-7}$$

因为 $f(x)=f(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-\cdots+(-1)^n a_nx^n$. (1-8)

(1-7)+(1-8),得

$$f(x)=a_0+a_2x^2+\cdots+\frac{[1+(-1)^n]}{2}a_nx^n,$$

其中，当 n 为奇数时，$\frac{1+(-1)^n}{2}=0$；当 n 为偶数时，$\frac{1+(-1)^n}{2}=1$，故 $f(x)$ 只含偶次项．

同理可证(2).

例 7　证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 都可以表示为偶函数与奇函数之和．

证　构造函数　$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$；　$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$.

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x);\quad \psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\psi(x).$$

即 $\varphi(x)$ 是偶函数，$\psi(x)$ 是奇函数，显然

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

例 8　证明：如果对任意实数 x_1,x_2 下式成立

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

则 $f(x)$ 是奇函数．

证　因为 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，取 $x_1=0$，得

$$f(0+x_2)=f(0)+f(x_2),$$

所以　$f(0)=0$.

又　$f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$，

得　$f(-x)=-f(x)$. 命题得证．

例 9　证明：$f(x)=x\cos x$ 不是周期函数．

证　反证法．设 $f(x)$ 是周期函数，周期为 l，则

$$(x+l)\cos(x+l)\equiv x\cos x. \tag{1-9}$$

令 $x=0$，由式(1-9)得

$$l\cos l=0.\ l_1=0(\text{舍去}),\ l_2=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

将 $l_2=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 代人式(1-9)，得

$$\left(x+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\equiv x\cos x\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

再取 $x=-\frac{\pi}{2}$ 代人上式，得 $k\pi\cos k\pi=0(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，即 $\pm1=0(k=\pm1,\pm2,\cdots)$，矛盾．

例 10　求函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq0)$ 的反函数．又问：当 a、b、c、d 满足什么

条件时，反函数与直接函数相同？

解 题设条件 $ad-bc\neq0$，是为了保证 $y\neq$常数．否则，如果 $ad-bc=0$．令 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k$，则 $a=ck,b=dk$，故 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=k$（常数）.

求反函数，得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，即 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

要使反函数与直接函数相同，即

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx-a},$$

所以 $acx^2+(bc-a^2)x-ab=-cdx^2+(bc-d^2)x+bd$.

比较两端系数，得

$$\begin{cases}ac=-cd\\bc-a^2=bc-d^2\\-ab=bd\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ac=-cd\\|a|=|d|.\\ab=-bd\end{cases}$$

当 b、c 不同时为 0 时，有 $a=-d$；当 b、c 同时为 0，且 $a=d\neq0$ 时，则直接函数为 $y=x$，反函数也为 $y=x$.

1.1.3.4 未定式的极限

呈现“$\frac{0}{0}$；$\frac{\infty}{\infty}$；$\infty-\infty$；$0\cdot\infty$；0^0；1^∞；∞^0”形式的极限称为**未定式**．现分别介绍各种形式的未定式的求解方法．

1.“$\frac{0}{0}$”型的求解方法

常用方法有：

(1)通过因式分解、变量代换或有理化因式，消去零因子，然后求解；

(2)利用等价无穷小或两个重要极限；

(3)洛必达法则（第二章导数的应用部分再举例）.

例 11 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2}$；　(2)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$；　(3)$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 (1)
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^3+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{8}.$$