高等职业教育“十二五”规划教材

应用数学基础

（经管类）训练教程

邢春峰 主 编
张立新 王 笛 副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

应用数学基础（经管类）训练教程

邢春峰　主编

张立新　王　笛　副主编

人 民 邮 电 出 版 社

北 京

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础（经管类）训练教程 / 邢春峰主编
-- 北京 : 人民邮电出版社, 2011.9
高等职业教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-25577-8

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①邢… Ⅲ. ①应用数学—高等职业教育—习题集 Ⅳ. ①029-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第100406号

内 容 提 要

本书是全国高等职业教育“十二五”规划教材《应用数学基础》（经管类）的配套辅导教材。本书以高等数学的基本概念与基本方法为训练重点，特别关注数学的思想方法及用数学解决实际问题的能力的训练。按内容顺序分为 6 章，每章由基本知识导学、例题解析、基础知识试题及答案和能力提高试题及答案 4 部分组成。

本教材适用于各类高职高专院校（两年制或）三年制（少学时）经管类各专业，也可供专升本及相关人员参考。

高等职业教育“十二五”规划教材

应用数学基础（经管类）训练教程

◆ 主　　编　邢春峰
　副 主 编　张立新　王　笛
　责任编辑　丁金炎
　执行编辑　洪　婕

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京艺辉印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：6.5
　字数：155 千字　　　2011 年 9 月第 1 版
　印数：1 – 3 000 册　　　2011 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-25577-8

定价：14.00 元

读者服务热线：(010)67132746　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154
广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号

Foreword 前言

当前，我国高等职业教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇。同时，国家的经济、科技和社会发展也对高等职业教育人才的培养提出了更高要求。而高等数学是高等职业院校各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

本书是全国高等职业教育“十二五”规划教材《应用数学基础》（经管类）的配套辅导教材。本书以高等数学的基本概念与基本方法为训练重点，特别关注数学的思想方法及用数学解决实际问题的能力的训练。按内容顺序分为6章，前5章由基本知识导学、例题解析、基础知识试题及答案和能力提高试题及答案4部分组成，第6章由基本知识导学、例题解析、基础知识试题及答案3部分组成。

（1）基本知识导学：将每章的知识点详细列出，使零散繁杂的内容作为有机整体呈现，具有全面、简捷、明了的特点，使读者对应用数学的主干内容得以系统了解，有助于知识的融会贯通，有规律、有条理地理解和记忆，便于应用。

（2）例题解析：以问答形式将每章的重点和难点问题提出并给予解答，有理论，有实例。

（3）基础知识试题及答案：将各章基础知识反映在测试题中，检测读者对基础知识的理解和掌握程度，以灵活多样的题型帮助读者复习基础知识。

（4）能力提高试题及答案：编选的题目具有典型性、代表性，读者通过这部分练习和对试题精解的学习，可以得到基本解题技巧和各章知识综合运用能力的训练。

本书针对当前高职学生普遍存在的数学基础差、课程难学、规律难循、习题难做等问题，对主教材《应用数学基础》的前6章，从学习内容、学习方法到习题解答都进行了系统地、科学地辅导，特别注意培养学生自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力。同时也为主教材的习题课提供了充实的资料和素材，大大方便了教师的备课及学生的学习。

本书由邢春峰任主编，张立新、王笛任副主编。参加本书编写的还有：袁安锋、玲玲、顾英、戈西元、章青。

限于编者水平，且对高职高专教育数学课程和教学内容的改革还需深入，本书中的不当之处，恳请同行教师和读者不吝赐教，批评指正。

编者

2010年12月

目录

Contents

Contents

第1章 函数、极限与连续

【基本知识导学】

一、函数

1. 函数的概念

函数、分段函数、反函数、复合函数、基本初等函数、初等函数。

2. 函数的简单性质

（1）单调性：设函数$y=f(x)$在区间I内有定义，对于区间I内的任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$[或$f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数$f(x)$在区间I内单调增加（或单调减少）。

（2）奇偶性：设函数$y=f(x)$在关于原点对称的区间I内有定义，若对于任意的$x\in I$，恒有$f(-x)=f(x)$[或$f(-x)=-f(x)$]，则称$y=f(x)$为偶函数（或奇函数）。

（3）周期性：设函数$y=f(x)$在区间I内有定义，如果存在一个不为零的实数T，对于任意的$x\in I$，有$(x+T)\in I$，且恒有$f(x+T)=f(x)$，则称$y=f(x)$是周期函数。T称为周期。

（4）有界性：设函数$y=f(x)$在区间I内有定义，如果存在一个正数M，对于任意的$x\in I$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在I上有界。否则无界。

3. 几个简单经济函数

总成本函数C，总收益函数R，总利润函数L，需求函数，供给函数等。

二、极限

1. 基本概念

数列极限，函数极限，函数在点x_0处的左、右极限。

2. 性质与结论

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$。

（2）极限的四则运算法则（略）。

（3）几个常用的重要极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}。$$

三、函数的连续性

1. 函数连续的概念

（1）$f(x)$在点$x=x_0$连续的概念。

若函数 $f(x)$ 满足① 在点 $x=x_0$ 有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续。

（2）$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 左、右连续。

若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点右连续；若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点左连续。

（3）$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的概念。

函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点处连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续。

（4）函数 $f(x)$ 的间断点。

若 $f(x)$ 不满足① 在点 $x=x_0$ 有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 中任意一条，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处间断，称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点。

2．连续函数的相关结论

（1）若 $\lim\limits_{x\to c} g(x)=L$，且 $f(u)$ 在 $u=L$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to c} f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to c} g(x)]=f(L)$。

（2）基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续。

（3）闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值与最小值；一定取得介于最大值和最小值之间的任何值。

（4）（零点定理）若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则其在区间 (a,b) 上至少存在一个 ξ，使 $f(\xi)=0$。

【例题解析】

【例 1】 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+\lg(9-x^2)+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域。

分析： 自变量的所有的取值范围称为函数的定义域，它需要遵循下列原则：分式的分母不为零；开偶次方根号下的表达式必须大于或等于零；对数的真数必须大于零等。

解： 要使函数有意义，应有

$$\begin{cases} x^2+2x-3\geqslant 0 \\ 9-x^2>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant -3 \\ -3<x<3 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1\leqslant x<2,\ 2<x<3,$$

所以，函数的定义域为 $[1,2)\cup(2,3)$。

【类题】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\ln(2-x)$ 的定义域。

答案： $(1,2)$。

小结： 求函数的定义域，需要遵循下列原则：

① 分式的分母不为零；

② 开偶次方根号下的表达式必须大于或等于零；

③ 对数的真数必须大于零；

④ $\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 中的 $|f(x)|\leqslant 1$。

【例 2】 下列各对函数表示的是同一个函数的是（　　）。

A. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=1$　　B. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

C. $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$　　D. $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$

分析：函数的定义域和对应法则是函数定义的两个基本因素。如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，那么它们就是同一个函数。

解：A 选项，当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x}=1$，当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$，显然与 $g(x)=1$ 的不同；B 选项，两者的定义域不同，因为 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而 $g(x)=x+1$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；C 选项，$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，定义域和对应法则都相同，故为同一个函数；D 选项，$f(x)=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)=2\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$。

故答案是 C。

【类题】下列各对函数表示的是同一个函数的是（　）。

A. $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=e^x$，$g(x)=e^{|x|}$

C. $f(x)=\sin x$，$g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$　　D. $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$

答案：A。

【例 3】设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\leqslant 0\\ 1-x^2, & 0<x\leqslant 1\\ -1, & 1<x\leqslant 4\end{cases}$，求

① 函数的定义域；

② $f(-1)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(1)$，$f(3)$。

分析：分段函数的定义域为函数自变量的所有可能取值。

解：① 函数的定义域应为

$$\{x\mid x\leqslant 0\}\cup\{x\mid 0<x\leqslant 1\}\cup\{x\mid 1<x\leqslant 4\}\text{，即}(-\infty,4]\text{；}$$

② 当 $x=-1$ 时，条件 $x\leqslant 0$ 成立，按表达式 $\dfrac{1}{x}$ 计算，从而 $f(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1$；当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，条件 $0<x\leqslant 1$ 成立，按表达式 $1-x^2$ 计算，有 $f(\frac{1}{2})=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$；当 $x=1$ 时，仍有条件 $0<x\leqslant 1$ 成立，仍按表达式 $1-x^2$ 计算有 $f(1)=1-1^2=0$；当 $x=3$ 时，条件 $1<x\leqslant 4$ 成立，按表达式 -1 计算，有 $f(3)=-1$。

【类题】设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 2, & x=1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$，求

① 函数的定义域；

② $f(-1)$，$f(1)$，$f(e)$。

答案：（1）$(-\infty,+\infty)$；（2）$f(-1)=0$，$f(1)=2$，$f(\mathrm{e})=1$。

【例 4】一位旅客住在旅馆里，图 1-1 所示描述了他的一次行动，请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后，再叙述他的这次行动。你能给图 1-1 标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并用一个函数解析式表达出来吗?

解：设纵坐标 y 为离开旅馆的距离，时间为 t，则该图可描述为：此旅客离开旅馆出外办事，一件事办完后，又回到旅馆，休息一段时间然后再离开旅馆。

标明具体数据如图 1-2 所示，设距离 y 的单位为 km，时间 t 的单位为 h，则这位旅客的这次行动可描述为：他以 2 km/h 的速度出外办事行走 1h 到达办事处，用 1h 办完一件事，以同样的速度回到旅馆休息 1h，又以同样的速度离开旅馆。

行动用函数解析式表达如下：

$$y=\begin{cases}2t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 2, & 1<t\leqslant 2,\\ -2t+6, & 2<t\leqslant 3,\\ 0, & 3<t\leqslant 4,\\ 2t-8, & t>4。\end{cases}$$

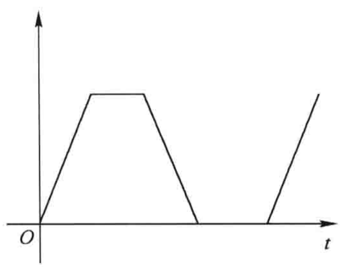

图 1-1

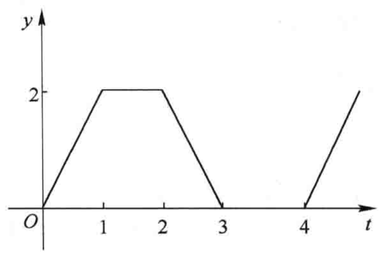

图 1-2

【类题】将图 1-3 所示图像与事件对应起来。

① 我离开宾馆不久，发现把公文包忘在房间里，于是立刻返回旅馆取了公文包再上路；

② 我驾车一路以常速行驶，只是在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间；

③ 我出发以后，心情轻松，边驾车边欣赏四周景色，后来为了赶路便开始加速。

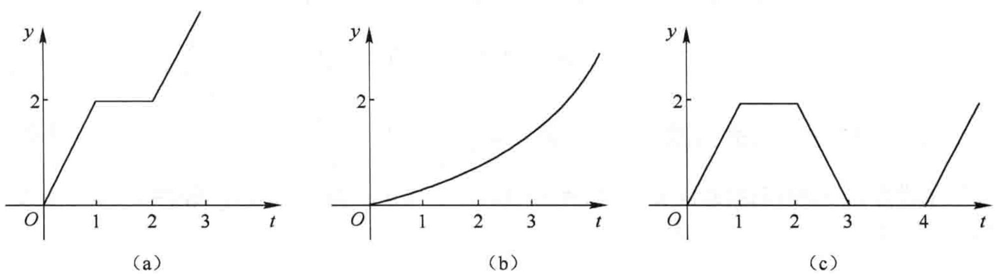

图 1-3

其中横轴 t 表示时间，纵轴 y 表示离开宾馆的距离。

答案：① ↔ 图 1-3（c），② ↔ 图 1-3（a），③ ↔ 图 1-3（b）。

【例 5】直接函数 $y=f(x)$，其直接反函数为 $x=\varphi(y)$，其矫形反函数为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，下列说法不正确的是（　　）。

A. $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 是同一函数

B. $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图像相同

C. $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$ 在同一坐标系中的图像关于直线 $y=x$ 对称

D. $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$ 是同一函数

分析：将 $y=f(x)$ 中的 x 反解出来就得到了表达式 $x=\varphi(y)$，再将 x，y 互换就得到了表达式 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，从而本题选 D。

【类题】直接函数 $y=f(x)$，其反函数为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$，且 $f(1)=2$，则 $\varphi(2)=$______。

答案：1。

【例 6】求函数 $y=\log_2(x+2)$ 的反函数。

分析：求反函数的一般步骤是

① 从直接函数 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$；

② 互换 x 与 y 的位置，即为所求的反函数；

③ 原函数的值域就是反函数的定义域。

解：由 $y=\log_2(x+2)$ 得 $x=2^y-2$，从而所求的反函数是 $y=2^x-2$，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$。

【类题】求函数 $y=e^x+1$ 的反函数。

答案：$y=\ln(x-1)$, $(1,+\infty)$。

【例 7】下列说法正确的是（　　）。

A. 没有既是奇，又是偶的函数

B. $y=f(x)$ 在 (a,b) 内处处有定义，则在 (a,b) 内一定有界

C. 两个单调增函数之和仍为单调增函数

D. 设 $y=f(u), u=\varphi(x)$，则 y 一定可以通过 u 成为 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$

分析：A 选项，如果函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，显然 $f(x)=0$ 能同时满足上面两个关系式，从而函数 $f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数；B 选项，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内有定义，但是在 $(0,1)$ 内无界；C 选项，根据单调函数的定义可知，这是正确的；D 选项，$y=\ln u$ 与 $u=-|x|$ 两个函数就不可以复合成一个复合函数。

故选 C。

【例 8】写出复合函数 $y=\sin^2(x^2-1)$ 的复合过程。

分析：分解复合函数通常是从复合函数的最外层着手，逐层向里考虑。

解：$y=\sin^2(x^2-1)$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=x^2-1$ 复合而成。

注意：很多同学会把 $v=x^2-1$ 再分解为 $v=w-1$，$w=x^2$。这一步是没有必要的，我们分解复合函数是为了后面的复合函数求导数等运算做准备的。$v=x^2-1$ 是基本初等函数按照四则运算构成的。

【类题】写出复合函数 $y=\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$ 的复合过程。

答案：$y=\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$ 是由 $y=\ln u$ 和 $u=\sqrt{x}+1$ 复合而成。

【例 9】如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　　）。

A. 一定有定义　　　　B. 一定无定义

C. 可能有定义，也可能无定义　　　　D. 有定义且 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

分析：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在不存在，跟函数在 x_0 处有无定义没有关系，如 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，但是 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，故选 C。

【例 10】下列解题过程是否正确？说明理由。

① $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}=0$；

② $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^2}{\lim\limits_{x\to 2}(2-x)}=\infty$。

分析：两个函数的极限都存在是使用极限的四则运算法则的前提。如果有一个函数的极限不存在，那就不能直接利用四则运算法则，对于分式的极限还要求分母函数的极限不能为零。

解：① 错。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以不能用四则运算法则来求。

② 错。因为 $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)=0$，所以不能用四则运算法则来求。

【类题】下列解题过程是否正确？说明理由。

① $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty-\infty=0$；

② $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$。

答案：① 错。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ 不存在；

② 错。因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在。

【例 11】设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并回答 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

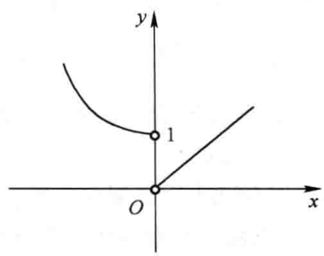

图 1-4

解：$f(x)$ 的图像如图 1-4 所示。

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0,$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

【类题】设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图形，求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并回答 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

答案：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

【例 12】判断函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在?

分析：因为 $x\to 0$ 是指 $x\to 0^-$ 和 $x\to 0^+$，故应分别计算当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的左、右极限。然后利用结论

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在且相等。

解：当 $x\to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x}\to -\infty$，则 $e^{\frac{1}{x}}\to 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$；

当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x}\to +\infty$，则 $e^{\frac{1}{x}}\to +\infty$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$。

所以当 $x\to 0$ 时 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的极限不存在。

【类题】判断函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在?

答案：不存在。提示：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

【例 13】求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$。

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限。分子分母的极限都是 0，不能直接利用极限的四则运算法则来进行计算。通常是分子分母分解因式消去零因子，然后再利用极限的四则运算法则来计算。

解：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-3}=-1$。

【类题】求极限 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4}$。

答案：$-\dfrac{1}{4}$。

【例 14】已知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=6$，求 a，b 的值。

分析：当 $x\to 2$ 时，所给函数分母 $x-2$ 的极限为零，而所给函数的极限存在，因此其分子的极限必定为零，即 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$，得 $4+2a+b=0$，解得 $b=-(4+2a)$，从而

$$x^2+ax+b=x^2+ax-(4+2a)=(x-2)[x+(a+2)]。$$

所以，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)[x+(a+2)]}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}[x+(a+2)]=a+4=6$，

从而 $a=2$，$b=-8$。

【类题】设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值。

答案：$a=-7$，$b=6$。

【例 15】下列极限中，正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$。

分析：第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 可以用下面更直观的结构式表示：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1。$$

其中，$\square$ 中既可以表示自变量 x，也可以表示 x 的函数，而 $\square\to 0$ 是表示当 $x\to x_0$（或 ∞）时，必有 $\square\to 0$。

解：由上面的分析，显然 A、D 都不正确，B 项的结果应该是 $\dfrac{3}{2}$，C 项稍微做一下变形为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，所以答案选 C。

【类题】下列极限中，正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$

答案：A。

【例 16】下列极限中，正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2$

分析：第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 有两种表示形式：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。它们可以用下面更直观的结构式表示：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}。$$

其中，$\square$ 既可以表示自变量 x，也可以表示 x 的函数，且当 $x\to x_0$（或 ∞）时，必有 $\square\to 0$。

$\square$ 中的函数应为同一个变量。

解：对于选项 A，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-x}\right)^{(-x)(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$；由上面的分析，显然 B、C 都不正确，对于选项 D，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}2}=\mathrm{e}^2$，所以答案选 D。

【类题】下列极限中，正确的是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

答案：C。

【例 17】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x}$。

分析：本题属于 1^{∞} 的类型，需要利用第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 来求解。

解一

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-4}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-4}\cdot\frac{-4x}{x+2}}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-4}}\right\}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+2}}=\mathrm{e}^{-4}\text{。}$$

解二

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}(-2)}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}2}}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{2}}=\mathrm{e}^{-4}\text{。}$$

【类题】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$。

答案：e^{-1}。

【例 18】 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1$。

证明：令 $\mathrm{e}^{x}-1=u$，则 $x=\ln(u+1)$，于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln\mathrm{e}}=1\text{。}$$

【类题】 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$。

证明：略。

【例 19】 设 $f(x)=\frac{1-\cos^{2}x}{x^{2}}$，当 $x\neq 0$ 时，$F(x)=f(x)$，若 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $F(0)=$______。

分析：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义是 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，本题实际上就是求极限。

解：$F(0)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^{2}x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x^{2}}=1$，

故 $F(0)=1$。

【类题】 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\frac{x}{\tan x}$，则 $f(0)=$______。

答案：1。

【例 20】（用水费用）设某城市居民的用水费用的函数模型为

$$f(x)=\begin{cases}0.64x, & 0\leqslant x\leqslant 4.5\\ 2.88+5\times 0.64(x-4.5), & x>4.5\end{cases},$$

其中 x 为用水量（单位：吨），$f(x)$ 为水费（单位：元），

① 求 $\lim\limits_{x\to 4.5}f(x)$；② $f(x)$ 是连续函数吗?

分析： 本题是求分段函数在分段点处的极限和连续的应用题，应该注意所给函数在分段点两侧的表示式是否相同，若相同，则直接求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，如果在分段点的两侧不相同，则应该利用左右极限来判定。显然本题在分段点 4.5 的两侧表示式不同。

解： ① $\lim\limits_{x\to 4.5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4.5^-}0.64x=2.88$，

$$\lim_{x\to 4.5^+}f(x)=\lim_{x\to 4.5^+}[2.88+5\times 0.64(x-4.5)]=2.88,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 4.5}f(x)=2.88$；

② $f(4.5)=0.64\times 4.5=2.88$，$\lim\limits_{x\to 4.5}f(x)=f(4.5)$，

所以 $f(x)$ 在 $x=4.5$ 处连续，又 $0\leqslant x<4.5$ 和 $x>4.5$ 时 $f(x)$ 是初等函数，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续函数。

【类题】（个人所得税）按现行个人所得税规定，稿酬所得税 $T(x)$ 与稿酬收入 x 之间的函数模型为（单位：元）

$$T(x)=\begin{cases}(x-800)\times 20\%\times(1-30\%), & 800\leqslant x\leqslant 4000\\ x(1-20\%)\times 20\%\times(1-30\%), & x>4000\end{cases},$$

① 求 $\lim\limits_{x\to 4000}T(x)$；② $T(x)$ 在 $x=4000$ 处连续吗? ③ 画出 $T(x)$ 的图形。

答案： ① 448；② 连续；③ 略。

【例 21】求下列函数的间断点。

① $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；② $f(x)=\begin{cases}x^2-3, x\geqslant 0\\ \mathrm{e}^x, x<0\end{cases}$；③ $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant -1\\ \sin(x+1), -1<x\leqslant 1\\ \ln x, x>1\end{cases}$。

分析： 对于下面三条

（a）在 $x=c$ 处有定义；（b）$\lim\limits_{x\to c}f(c)$ 存在；（c）$\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$，

若其中一条不成立，则 $x=c$ 就是函数的间断点。由函数的间断点的定义可知，下面两类点可能为函数的间断点：

（a）函数无定义的点；

（b）分段函数的分段点。

解： ① 显然函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，所以 $x=1$ 为函数的间断点。

② $x=0$ 点为分段函数的分段点，它可能为函数的间断点。由于

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-3)=-3,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1,$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。从而 $x=0$ 为函数的分段点。

③ 函数有两个分段点 $x=-1$ 和 $x=1$，

在分段点 $x=-1$ 处，

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\sin(x+1)=0$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x+1)=0$，$f(-1)=0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续，从而 $x=-1$ 是函数的连续点。

在分段点 $x=1$ 处，

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\sin(x+1)=\sin 2$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，从而 $x=1$ 是函数的间断点。

【类题】求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)x}$ 的间断点。

答案： $x=0$，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的间断点。

【例 22】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{2x}, x>0\\ b, x=0\\ (1+x)^{-\frac{2}{x}}, x<0\end{cases}$，试求常数 a,b，使得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

分析：要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$。

解：因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+x)^{-\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{-2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{2x}=\dfrac{a}{2}$，$f(0)=b$，

所以 $\mathrm{e}^{-2}=\dfrac{a}{2}=b$，$a=2\mathrm{e}^{-2}$，$b=\mathrm{e}^{-2}$，

故当 $a=2\mathrm{e}^{-2}$，$b=\mathrm{e}^{-2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

注意：很多同学犯这样的错误：

① “要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 就行”，显然这只是说明极限存在，不能说明连续；

② “要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 就行”。

【类题】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3, x\geq0\\ \mathrm{e}^{-x}+k, x<0\end{cases}$，试求常数 k，使得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

答案： $k=-4$。

【例 23】下列说法正确的是（　　）。

A. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在

B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续

C. 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上可取到最大值和最小值

D. 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有意义，在 (a,b) 内连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

分析：对于 A、B 选项，函数在点 x_0 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在而且要满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。但是，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$f(x)$ 在点 x_0 不一定连续，如函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 点无定义，从而不连续，但是 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，极限存在；对于 C 选项，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 内连续，但是