考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版 2015

考研数学
历年真题标准解析

全国硕士研究生入学统一
考试辅导用书编委会

（数学一适用）

主审 张宇

送精讲导学课程

登陆中国教育考试在线

http://www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 KAOYAN SHUXUE LINIAN ZHENTI BIAOZHUN JIEXI
(SHUXUE YI SHIYONG)

2015

考研数学

历年真题标准解析

全国硕士研究生入学统一考试
辅导用书编委会

主审　张宇　　送精讲导学课程

（数学一适用）

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

《2015 考研数学历年真题标准解析（数学一适用）》一书编者深谙命题原则、试题的选择方法以及题目的难易程度的比例，对数学一 2004—2013 年的试题进行了分类归纳总结和详细解读，并单独对 2014 年考研数学数学一试卷进行了分析。通过本书的学习，考生定能了解试题的难度和分布，熟悉必考的知识点及有关的解题思路和解题方法，对考研数学有更清晰的认识，进而有助于考生合理安排时间，制订出适合自己的复习计划，最终取得更好的成绩。

图书在版编目（CIP）数据

2015 考研数学历年真题标准解析/全国硕士研究生入学统一考试辅导用书编委会编. -- 北京：高等教育出版社，2014.5

数学一适用

ISBN 978-7-04-039617-1

Ⅰ.①2… Ⅱ.①全… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 065828 号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王　洋　版式设计 范晓红
责任校对 殷　然　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京国工印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.75	版　　次	2014 年 5 月第 1 版
字　　数	320 千字	印　　次	2014 年 5 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　39617-00

编者的话

2010年以来，全国报考硕士研究生的人数呈逐年增加的趋势，考研竞争的程度越来越激烈，因此为广大考生提供一本既实用又具针对性的考研辅导书是非常必要的！我们认真研究了教育部考试中心颁布的《数学考试大纲》的内容，详细解读了数学一10年的全部考题：考题的知识点、题目类型、命题方法、解题思路、解题方法与解题技巧等。本书编者深谙命题原则、试题的选择方法以及题目的难易程度的比例等，在考研的辅导过程中（最早的从1986年就开始辅导考研）我们按知识点的分类进行讲授，效果非常好，学生的收益也有明显的提高。所以我们总结了这方面的经验，认为非常有必要对近10年的考研试题进行分类归纳总结，这对考生复习迎考是非常有帮助的，因为它可以使考生一目了然地知道：

1. 哪些知识点是必考的或从未考过。

例如(1) 函数、极限、连续：10年中有4题

(2) 一元函数微分学：10年中有29题

(3) 多元函数微分学：10年中有12题

(4) 多元函数积分学：

(a) 曲线积分：10年中有10题（Ⅱ型8题）

(b) 曲面积分：10年中有10题（Ⅱ型7题）

(c) 重积分：10年中有10题（二重积分7题）

(5) 无穷级数的敛散性判定与幂级数的和函数：10年中有14题

(6) 微分方程：10年中有12题

(7) 矩阵及运算：10年中有14题

(8) 线性方程组的解：10年中有9题

(9) 随机事件和概率：10年中有5题

(10) 随机变量及其分布：10年中有6题

(11) 多维随机变量及其分布：10年中有13题

(12) 随机变量的数字特征：10年中有9题

(13) 数理统计的基本概念：10年中有3题

(14) 参数估计：10年中有9题（基本是试卷的最后一题）

(15) 大数定律和中心极限定理：0题（10年中无考题）

(16) 假设检验：0题（10年中无考题）

2. 试题的题型是什么？

3. 涉及的解题方法是什么？有何解题技巧？

考生了解这些内容后定能熟练地掌握必考的知识点及有关的解题思路和解题方法，而无须花费时间去做那些在考试中不出现或极少出现的内容与题目。而对必考的题目则集中精力，势

必更有得分的把握,从而提高考试成绩。

在解题思路和解题方法上,以我们近40年的教学经验以及20多年辅导考研的体会,尽可能地以通俗易懂、简捷、容易理解和掌握的方法介绍给考生。例如编者给出许多知识点或公式的“结构式”,简单、易懂、好掌握。中值定理是考试的重点和难点,编者根据多年的经验,总结归纳出简捷有效的“直接构造法”和“常数变易法”(详见“中值定理”的解题思路和解题方法),这无疑会极大地提高考生的解题能力。

本书的特点是:

1. 重点突出、考点的内容清晰、类型醒目

我们把相同知识点的考题总结归纳在一起,既突出了重点,又对每年必考的题目一目了然。建议考生对10年中考到7次以上的内容视为必考题,而对考到的概率为50%左右的题目应予以加倍的关注,它考到的可能性较大。

2. 特点鲜明的“解题思路和解题方法”,其思路清晰,方法好掌握

对每一类重点或必考题型都介绍了它们的“解题思路和解题方法”。例如我们给出了利用泰勒公式必须遵循的两个原则“上下同阶”原则与“幂次最低”原则,这无疑给了考生一把开锁的钥匙。既能提高分析问题的能力,又能提高解题能力。

3. 独特的“错误防范”,效果明显,收效显著

对考生中容易犯的错误或被忽略的地方,给予必要的提醒,这必能较大幅度的提升考生的解题能力,不犯或少犯错误!效果明显,收效显著。

4. 查漏补缺,增强信心

我们特意保留了2014年的试题,考生在复习完了全部内容后,再认真地完成一套完整的试题,从而发现不足,再进行查漏补缺,必能增强必胜的信心。实现自己的理想和目的。

本书在编写过程中得到了高等教育出版社刘佳与张耀明老师的大力支持和帮助,特此致谢!书中的“高等数学”和“线性代数”部分,由首都经济贸易大学刘长乃教授编写,其他由吉林大学高彦伟教授编写。

书中错误难免,欢迎批评指正!

编写组

2014年3月

目　录

第一部分　高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

本章重点考查的内容是无穷小量的概念和无穷小量“阶”的比较.

1. 无穷小量概念及其比较

(1)(1301)已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$,其中 k,c 为常数,且 $c\neq 0$,则

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$.

(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$.　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$.

(2)(0901)当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$.　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3)(0701)当 $x\to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

(4)(0407)把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$, $\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.

注:

(1301)前两位数表示试卷的年份,后两位数表示题号,即 2013 年试卷的第 1 题,若(0917)即表示 2009 年试卷的 17 题. 其余类似.

解题思路与解题方法

无穷小量的判定应根据定义,而两个无穷小量的比较是求它们比的极限.

1. 两个高阶无穷小量有如下的运算法则:

设 m,n 为正整数,则

(1) 加减时,低阶无穷小“吸收”高阶无穷小,即

$$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),\ l=\min(m,n).$$

(2) 乘法时,阶数“相加”,即

$$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}),\ x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n}).$$

(3) 非零常数不影响阶数,即

$$o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m)\ (k\neq 0).$$

2. 两个高阶无穷小量的比较,根据不同的极限类型,有以下两个不同的原则:

(1)“上下同阶”原则,适用于“$\frac{A}{B}$”型.

具体来说,如果分子(或分母)是 x 的 k 次方,在利用泰勒公式将分母(或分子)展开时,应保留到 x 的 k 次方,此方法可称为“上下同阶”原则. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\xlongequal{\text{泰勒公式}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right]}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(2)“幂次最低”原则,适用于“$A-B$”型.

具体来说,即将 A 与 B 展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂即可.

例如当 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}$ 与 ax^b 为等价无穷小量,求 a 和 b.

利用泰勒公式得

$$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]$$

$$=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\sim-\frac{1}{12}x^4,$$

所以 $a=-\frac{1}{12},b=4.$

解答 **(1) 答:**选(D).

考点:利用麦克劳林公式讨论极限.

解法 1 因为 $c\neq 0$,且当 $x\to 0$ 时,$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$,从而 $x-\arctan x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$,又

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^k}=c,$$

所以 $k=3,c=\frac{1}{3}$.

解法 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{kx^{k-3}}=c,$$

则有 $k=3,c=\frac{1}{3}$.

(2) 答:选(A).

考点:函数等价无穷小的概念以及函数极限的计算,使用的工具是泰勒公式.

解 由题意,本题可以等价描述为:已知 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$,求参数 a,b.

对上式分母使用等价无穷小替换，则 $x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3$，

由于分母是三阶无穷小，根据“上下同阶”原则对上式分子使用泰勒公式，当 $x\to 0$ 时，$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，则

$$x-\sin ax = x-ax+\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)=(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3),$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1$，

立即得到 $a=1, b=-\frac{1}{6}$.

错误防范：如果本题改为计算题（此时分值要提高）.

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=1$，求 a 与 b 的值.

考生如果先用等价代换，再用洛必达法则，会出现无法求得 a, b 的情况：

$$\text{原式}\xlongequal{\text{分母等价}}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛法}}\lim_{x\to 0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}$$

$$\xlongequal{\text{洛法(或等价)}}\lim_{x\to 0}\frac{a^3\cos ax}{-6b}=1,$$

只能得到 $a^3=-6b$ 而无法求得 a 和 b 的值.

因此建议考生在极限计算中尽可能地用好泰勒公式，这是个档次高，效率高的好方法（一定要注意“上下同阶”原则）.

(3) 答：选（B）.

考点：几个重要的等价无穷小量，洛必达法则求极限.

解法 1　排除法. 当 $x\to 0^+$ 时，$1-e^{\sqrt{x}}\sim -\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$，不选（A）、（C）、（D），所以选（B）.

解法 2　直接验证法. 当 $x\to 0^+$，$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$，选（B）.

解法 3　洛必达法则验算.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right)=1,$$

选（B）.

(4) 答：选（B）.

考点：无穷小量的比较、变限积分求导.

解　因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\ \tan x}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x\sqrt{x})}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(x\sqrt{x})}=+\infty\ ,$$

所以排列次序为 α,γ,β,故选项(B)正确.

2. 连续与间断点

函数在一点处的连续与间断,2004—2013 年的 10 年试题中均未涉及此类题型,但在本书后面的章节和考试内容中多次用到这两个概念. 希望读者能熟悉并掌握,以利于后面的考试需要.

第二章　一元函数微分学

一元函数微分学是高等数学的基础，导数及其四则运算，复合函数和隐函数的求导是必考内容之一，很多都属于容易题，是得分率比较高的题型，导数的应用也是必考内容，多数属于容易题，而未定式极限的求法是常见题型，属于中等难度题，中等难度题目约占试卷的80%. 考生必须熟练掌握，中值定理的题目属于较难题型，在研究生这类选拔性考试中经常出现的试题，望广大考生引起重视.

1. 导数及其运算

(1)(1309) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$ ________.

(2)(1311) 设 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ (t 为参数)，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

(3)(1202) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　(B) $(-1)^n(n-1)!$.　(C) $(-1)^{n-1}n!$.　(D) $(-1)^n n!$.

(4)(1009) 设 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=\int_0^t \ln(1+u^2)\,du, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$ ________.

(5)(0704) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(6)(0607) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<dy<\Delta y$.　(B) $0<\Delta y<dy$.

(C) $\Delta y<dy<0$.　(D) $dy<\Delta y<0$.

(7)(0507) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　(D) 至少有三个不可导点.

(8)(0402) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ________.

解题思路与解题方法

这部分内容主要考查基本概念与基本运算. 属于常见题型.

函数在一点可导的定义有以下的“结构式”

$$\lim_{\square\to 0}\frac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}\xlongequal{\text{极限存在}}f'(x_0),$$

式中的方块“□”为 Δx 或 Δx 的函数，且当 $\Delta x\to 0$ 时，必有□→0，只要符合上面的结构式，其极限值亦为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数.

在导数的运算中一定要注意复合函数的求导过程中的中间变量，这是至关重要的！

在多个函数连乘积的求导中要注意题目的特点，从中发现规律.

解答 (1) 答：填 1.

考点：导数的定义与隐函数求导.

解题思路：所求极限一定是“$\infty\cdot 0$”的未定式，因此要化为“$\frac{0}{0}$”型，注意到 $x=0$ 时，$y=1$，则有

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}\xlongequal{f(0)=1}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$$

$$\xlongequal{\text{导数定义}} f'(0)=y'(0).$$

解 当 $x=0$ 时，$y=1$，将方程两端对 x 求导，有 $y'-1=(1-y)e^{x(1-y)}$，故 $y'(0)=1$，从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=y'(0)=1.$$

(2) 答：填$\sqrt{2}$.

考点：参数方程确定的函数求导法.

解 $\frac{dx}{dt}=\cos t$，$\frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$，从而$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=t$.

又$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos t}$. 从而$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$.

错误防范：本题最容易犯的错误是求二阶导数时容易将次序颠倒，如果考生注意到$\frac{dy}{dx}=\varphi(t)$时，那么记住$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(\varphi(t))=\frac{d\varphi(t)}{dt}\ \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$就肯定不容易出错！

(3) 答：选(A).

考点：导数的概念及其运算法则.

解法 1 由导数定义有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$$

$$=1\times(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故选(A).

解法 2　利用求导法则,即先求 $f'(x)$ 为

$$f'(x)=e^x[(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)]+(e^x-1)[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]',$$

代入 $x=0$ 仍可得出上述结果.

(4) 答:填 0.

考点:参数方程确定的函数与变限定积分函数的求导法.

解法 1　因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}}\right]\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=e^{2t}\left[\frac{2t}{1+t^2}+\ln(1+t^2)\right],$$

所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$.

解法 2　由已知得 $y=\int_0^{-\ln x}\ln(1+u^2)\,du$, 所以

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x}\ln(1+\ln^2x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left[\ln(1+\ln^2x)-\frac{2\ln x}{1+\ln^2x}\right],$$

又当 $t=0$ 时,$x=1$,所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0$.

(5) 答:选(D).

考点:利用给定极限的存在性讨论与此有关的另一极限的存在性,连续、可导的定义.

解　因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

对于(A),由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,于是

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{x}\cdot x\right)=0,$$

所以命题(A)正确.

对于(B),同理有 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=0$,即有 $f(0)+f(-0)=0$,故 $f(0)=0$,命题(B)正确.

对于(C),由导数定义,有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$,由(C)之条件知 $f'(0)$ 存在,故命题(C)亦正确.

对于(D),设 $f(x)=|x|$,满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=0$,但 $f'(0)$ 不存在.

故命题(D)不正确,选(D).

(6) 答:选(A).

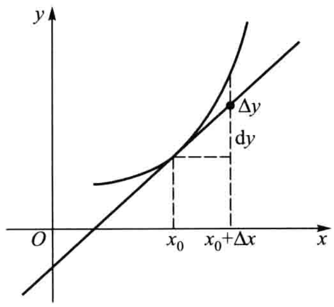
考点:函数的增量与微分的大小关系.

解法 1 用带有拉格朗日型余项的一阶泰勒公式:

$$\begin{aligned}\Delta y-\mathrm{d}y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x\\&=\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(\Delta x)^2>0.\end{aligned}$$

又由 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$. 选(A).

解法 2 画(草)图.



解法 3 由于是选择题,所以可举符合题设条件的函数,例如设 $f(x)=x^2$,在 $x_0=1$ 处,显然有 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

错误防范:在画函数曲线的草图时,很容易忽略了曲线的凹凸而导致错误.

(7) 答:选(C).

考点:极限运算、函数在一点可导的概念、导数与左、右导数的关系.

解 当 $|x|\leqslant 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;

当 $|x|>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3$;

于是 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$

只需考虑 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 的可导性. 由于

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to-1^+}\frac{1-1}{x+1}=0,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}=-3,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0.$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处均不可导,即有两个不可导点,故选项(C)正确.

注:

① 几何直观更明显.

② 当 a,b 都是正数时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$,且结论对有限个的情况也成立.

(8) 答:填 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.