经济系统

灰色预测与决策

刘思峰　郭天榜　党耀国

南京航空航天大学印

2001 年 2 月

前　言

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授1982年创立的一门新兴横断学科，它以“部分信息已知，部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象，主要通过对“部分”已知信息的生成、开发，提取有价值的信息，实现对系统运行行为的正确认识和有效控制．贫信息不确定性系统的普遍存在，决定了这一新理论具有十分广阔的发展前景．

短短十几年，灰色系统理论不仅在理论上迅速发展，日臻完善，而且在社会、经济、科技、农业、工业、生态、气象、石油、地质、水文、水利、医药、卫生、证券、金融、法律、军事等系统的分析、建模、预测、决策、规划、控制中得到日益广泛和深入的应用，取得了一系列重大成果，赢得了国际、国内学术界的肯定和关注，确立了其作为一门新兴横断学科的学术地位．

本书的前身是作者为河南农业大学农业工程系研究生和部分教师开设灰色系统理论课程的讲稿．1990年，作者得到河南大学出版社副总编孙荣光教授和程庆编审的热情鼓励和支持，在原讲稿的基础上进行修改，写成了《灰色系统理论及其应用》一书，并于1991年由河南大学出版社出版．该书问世后，受到广大读者肯定，被十多所高校采用为教材，国内外学者在其论著中频频引用．书中一些新的思想、方法和模型技术在各个领域的科研、生产和管理实践中得到广泛应用．1998年获河南省科技进步奖二等奖．《中国科学技术蓝皮书(第8号)》曾给予肯定．以此为基础完成的英文著作于1998年由美国IIGSS学术出版社出版．

本书在第一版的基础上做了全面改写，融入了作者和国内外同行近年来在灰色系统理论探索及应用开拓中取得的新成果，较系统地向读者展示了灰色系统理论这一新学科的概貌及其前沿发展动态．全书共12章，包括灰色系统的基本概念与基本原理、灰色方程与灰色矩阵、序列算子与灰色序列生成、灰色关联分析、灰色聚类评估、灰色系统建模、灰色预测、灰色组合模型、灰色决策、灰色规划、灰色投入产出及动态优化和灰色控制等内容．

本书由刘思峰提出总体写作方案并组织撰稿，郭天榜、党耀国、李炳军、侯云先参加了总体方案的讨论．其中第一章、第二章由刘思峰执笔；第三章由郭天榜、刘思峰执笔；第四章由李炳军、赵德英、刘思峰执笔；第五章由党耀国执笔；第六章由党耀国、郭天榜执笔；第七章由王广宇、党耀国执笔；第八章由李炳军执笔；第九章由侯云先执笔，第十章由侯云先、刘思峰执笔；第十一章由杨岭、侯云先执笔；第十二章由李秀丽、李炳军执笔．全书由刘思峰统一定稿．限于篇幅，杨岭、王广宇、李秀丽分别用C语言和BASIC语言为本书编写的计算机软件未能收入．

必须说明的是，除上面列出的执笔人之外，朱永达、郭洪、林益等许多同志曾先后参加相关课题研究和部分章节的讨论、写作工作，为本书的形成做出了积极贡献．

多年来，我们的研究工作一直受到学术界前辈和有关领导的热情鼓励、指导和支持，

得到众多同行专家的通力合作.全国灰色系统研究会理事长邓聚龙教授和中国系统工程学会名誉理事长许国志院士、理事长顾基发教授在百忙之中为本书作序.河南农业大学管理科学与工程专业研究生董奋义、应继来不辞劳苦,日以继夜,出色地完成了全部书稿的录入工作.在此,作者一并向他们表示衷心感谢!

限于水平,书中不当之处,在所难免,恳请读者诸君批评指正.

刘思峰

1999年2月28日

目　　录

第二版序
第一版序
前　言
第一章　灰色系统的概念与基本原理 …… 1
1.1 灰色系统理论的产生与发展动态 …… 1
1.2　灰色系统的概念与基本原理 …… 4
1.3　灰数及其运算 …… 7
1.4　灰数白化与灰度 …… 10
1.5　灰数测度的公理及若干定理 …… 12
1.6　灰数的信息含量测度 …… 15
第二章　灰色方程与灰色矩阵 …… 19
2.1　灰色代数方程与灰色微分方程 …… 19
2.2　灰色矩阵及其运算 …… 19
2.3　几种特殊的灰色矩阵 …… 21
2.4　灰色矩阵的奇异性 …… 22
2.5　灰色特征值与灰色特征向量 …… 24
第三章　序列算子与灰色序列生成 …… 26
3.1　序列算子 …… 26
3.2　均值生成 …… 30
3.3　序列的光滑性 …… 32
3.4　级比与光滑比 …… 33
3.5　累加生成算子与累减生成算子 …… 34
3.6　累加生成的灰指数律 …… 37
第四章　灰色关联分析 …… 40
4.1　灰色关联因素和关联算子集 …… 41
4.2　距离空间 …… 43
4.3　灰色关联公理与灰色关联度 …… 44
4.4　广义灰色关联度 …… 49
4.5　其它几种灰色关联度 …… 60
4.6　关联序 …… 63
4.7　优势分析 …… 64
4.8　应用实例 …… 70
第五章　灰色聚类评估 …… 78
5.1　灰色关联聚类 …… 78

5.2 灰色变权聚类…… 80
5.3 灰色定权聚类…… 85
5.4 基于三角白化权函数的灰色评估…… 89
5.5 灰色评估系数向量的熵…… 90
5.6 应用实例…… 92
第六章 灰色系统建模…… 102
6.1 五步建模思想 …… 102
6.2 灰色微分方程 …… 103
6.3 GM(1,1)模型 …… 105
6.4 残差GM(1,1)模型…… 113
6.5 GM(1,1)模型群 …… 117
6.6 GM(1,1)模型的适用范围 …… 119
6.7 GM(1,N)和GM(0,N)模型 …… 123
6.8 GM(2,1)和Verhulst模型 …… 126
第七章 灰色预测…… 134
7.1 灰色预测模型的检验 …… 134
7.2 数列预测 …… 135
7.3 区间预测 …… 137
7.4 灰色灾变预测 …… 144
7.5 波形预测 …… 150
7.6 系统预测 …… 154
第八章 灰色组合模型…… 156
8.1 灰色经济计量学模型 …… 156
8.2 灰色生产函数模型 …… 161
8.3 灰色马尔可夫模型 …… 163
8.4 灰色时序组合模型 …… 166
8.5 组合预测 …… 168
第九章 灰色决策…… 174
9.1 灰色决策基本概念 …… 174
9.2 灰靶决策 …… 175
9.3 灰色关联决策 …… 179
9.4 灰色发展决策 …… 184
9.5 灰色聚类决策 …… 186
9.6 单目标化局势决策 …… 189
第十章 灰色规划…… 195
10.1 灰参数线性规划…… 196
10.2 灰色预测型线性规划…… 198
10.3 灰色漂移型线性规划…… 200
10.4 灰色线性规划的准优解…… 206

10.5 灰色 0-1 规划……………………………………………………………… 209
10.6 灰色多目标规划…………………………………………………………… 213
10.7 灰色非线性规划…………………………………………………………… 215
10.8 应用实例…………………………………………………………………… 220
第十一章 灰色投入产出……………………………………………………… 229
11.1 灰色投入产出的基本概念………………………………………………… 229
11.2 灰色非负矩阵的 P-F 定理 ……………………………………………… 230
11.3 灰色感应度系数与影响力系数…………………………………………… 234
11.4 灰色投入产出优化模型…………………………………………………… 237
11.5 灰色动态投入产出模型…………………………………………………… 240
11.6 应用实例…………………………………………………………………… 242
第十二章 灰色控制…………………………………………………………… 246
12.1 控制与灰色控制…………………………………………………………… 246
12.2 灰色线性控制系统………………………………………………………… 247
12.3 灰色传递函数与典型环节………………………………………………… 248
12.4 灰色传递函数矩阵………………………………………………………… 251
12.5 几种典型的灰色控制……………………………………………………… 252
12.6 应用实例…………………………………………………………………… 255
参考文献……………………………………………………………………… 259
中英文索引…………………………………………………………………… 267

第一章　灰色系统的概念与基本原理

现代科学技术在高度分化的基础上高度综合的大趋势，导致了具有方法论意义的横断学科群的出现．横断学科揭示了事物之间更为深刻、更具本质性的内在联系，大大促进了科学技术的整体化进程；许多科学领域中长期难以解决的复杂问题随着新兴横断学科的出现迎刃而解；人们对自然界和客观事物演化规律的认识也由于横断学科的出现而逐步深化．本世纪 40 年代末期诞生的系统论、信息论、控制论，产生于 60 年代末、70 年代初的耗散结构理论、协同学、突变论、分形理论以及 70 年代中后期相继出现的超循环理论、动力系统理论、泛系理论等都是具有横向性、交叉性的新兴学科．1982 年，我国著名学者邓聚龙教授创立的灰色系统理论，则是横断学科群中升起的又一颗光彩夺目的新星．与研究"随机不确定性"的概率统计和研究"认知不确定性"的模糊数学不同，灰色系统理论的研究对象是"部分信息已知，部分信息未知"的"小样本"、"贫信息"不确定性系统．它通过对"部分"已知信息的生成、开发去了解、认识现实世界，实现对系统运行行为和演化规律的正确把握和描述．灰色系统模型对试验观测数据及其分布没有什么特殊的要求和限制，作为一种十分简便、易学好用的新理论，灰色系统理论具有十分宽广的应用领域，并深受各领域研究人员和实际工作者的喜爱．本章介绍灰色系统理论的产生与发展动态以及灰色系统的基本概念和基本原理，既是最具基础性的内容，又可视为全书的导言．

1.1　灰色系统理论的产生与发展动态

一、灰色系统理论的产生与发展动态

1982 年，北荷兰出版公司出版的"Systems & Control Letters"（系统与控制通讯）期刊上发表了我国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文"灰色系统的控制问题"（The Control Problems of Grey Systems），1982 年《华中工学院学报》第三期上发表了邓聚龙教授的第一篇中文灰色系统论文"灰色控制系统"，标志着灰色系统理论这一新兴横断学科经过其创始人邓聚龙教授多年卓有成效的努力，开始问世．这一新理论刚一诞生，就受到国内外学术界和广大实际工作者的极大关注，不少著名学者和专家给予充分肯定和支持，许多中青年学者纷纷加入灰色系统理论研究行列，以极大的热情开展理论探索及在不同领域中的应用研究工作．目前，英国、美国、德国、日本、澳大利亚、加拿大、奥地利、俄罗斯、台湾、香港、联合国等国家、地区及国际组织有许多知名学者从事灰色系统的研究和应用；海内外 84 所高校开设了灰色系统课程，数百名博士、硕士研究生运用灰色系统的思想方法开展科学研究，撰写学位论文；国际、国内 200 多种学术期刊发表灰色系统论文，许多国际会议把灰色系统列为讨论专题．据不完全统计，近年来，SCI（科学引文索引）、EI（工程索引）、ISTP（科技会议索引）以及 SA（英国科学文摘）、MR（美国数学评论）、MA（德国数学文摘）等国际权威性检索杂志跟踪、检索我国学者的灰色系统论著 500 多次（其中邓聚龙

教授的论著被检索、摘录100多次). 1997年,中国建立了自己的科学引文数据库(CSCD),据1997年11月26日《中国科学报》报道:"华中理工大学邓聚龙先生的灰色系统理论被引用533次,居全国第一". 灰色系统理论的应用范围已拓展到工业、农业、社会、经济、能源、交通、地理、地质、石油、地震、气象、水利、环境、生态、医学、体育、教育、军事、法学、金融等众多科学领域,成功地解决了生产、生活和科学研究中的大量实际问题,我国科技工作者主持的一大批灰色系统理论研究课题获得了国家和省、市科学基金资助,已有200多项灰色系统理论及应用成果获得国家和省、部级奖励.

1985年,国防工业出版社出版了邓聚龙教授的第一部灰色系统专著《灰色系统(社会·经济)》. 1985年至1992年,华中理工大学出版社先后出版发行了邓聚龙教授有关灰色系统的六部著作:《灰色控制系统》、《灰色预测与决策》、《灰色系统基本方法》、《多维灰色规划》、《灰色系统理论教程》和《灰数学引论——灰色朦胧集》. 其中《灰色控制系统》和《灰色系统理论教程》等被多次重印、再版,成为畅销科技图书. 国内其它出版单位以及美国IIGSS学术出版社也都编辑出版了灰色系统的著作. 1989年,英国科技信息服务中心和万国学术出版社联合创办了国际性刊物"The Journal of Grey System"(灰色系统学报),该刊被英国科学文摘(SA)等权威性检索机构列为核心期刊.

1985年,全国性的灰色系统研究会宣告成立,会员遍布包括西藏在内的各省、市、区以及港、澳、台地区. 目前,湖北、河南、浙江、山西、山东、河北、宁夏、台湾等地成立了灰色系统研究分会或专业性研究组织. 一批热心灰色系统研究的学者先后在太原、武汉、杭州、郑州、台湾大溪召开了10次全国灰色系统学术会议,宣读、交流灰色系统论文1 600多篇.

从1982年至今,灰色系统理论问世仅有十多年时间,就以其强大的生命力自立于科学之林,奠定了其作为一门新兴横断学科的学术地位,在1992年召开的第七次全国灰色系统学术会议上,中国科学院院士陈克强教授曾指出:"自然科学各学科诞生之初,能在10年内迅速突破,获得重大发展的为数不多,灰色系统理论就是其中之一".

灰色系统理论的蓬勃生机和广阔前景正日益广泛地为国际、国内各界所认识、所重视.

二、几种不确定性方法的比较

概率统计、模糊数学和灰色系统理论是三种最常用的不确定性系统的研究方法. 研究对象都具有某种不确定性,这是三者的共同点. 正是研究对象在不确定性上的区别派生出三种各具特色的不确定性学科.

模糊数学着重研究"认知不确定"问题,其研究对象具有"内涵明确,外延不明确"的特点. 比如"年轻人"就是一个模糊概念. 因为每一个人都十分清楚年轻人的内涵. 但要让你划定一个确切的范围,在这个范围之内的是年轻人,范围之外的都不是年轻人,则很难办到,因为年轻人这个概念外延不明确. 对于这类内涵明确、外延不明确的"认知不确定"问题,模糊数学主要是凭经验借助于隶属函数进行处理.

概率统计研究的是"随机不确定"现象,着重于考察"随机不确定"现象的历史统计规律,考察具有多种可能发生的结果之"随机不确定"现象中每一种结果发生的可能性大小. 其出发点是大样本,并要求对象服从某种典型分布.

灰色系统着重研究概率统计、模糊数学所不能解决的“小样本、贫信息不确定”问题，并依据信息覆盖，通过序列生成寻求现实规律. 其特点是“少数据建模”. 与模糊数学不同的是，灰色系统理论着重研究“外延明确、内涵不明确”的对象. 比如说到 2050 年，中国要将总人口控制在 15 亿到 16 亿之间，这“15 亿到 16 亿之间”就是一个灰概念，其外延是非常明确的，但如果进一步要问到底是哪个具体值，则不清楚.

综上所述，我们可以把三者之间的区别归纳如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1　三种不确定方法的区别

项　目	灰色系统	概率统计	模糊数学
研究对象	贫信息不确定	随机不确定	认知不确定
基础集合	灰色朦胧集	康托集	模糊集
方法依据	信息覆盖	映射	映射
途径手段	灰序列生成	频率统计	截集
数据要求	任意分布	典型分布	隶属度可知
侧重	内涵	内涵	外延
目标	现实规律	历史统计规律	认知表达
特色	小样本	大样本	凭经验

三、灰色系统理论在横断学科群中的地位

人们对客观事物的认识和视角不同，划分学科体系的方式也不相同. 17 世纪，培根基于科学分类应与人类的记忆能力、想象能力、判断能力相对应的认识，主张把科学划分为历史、诗歌与艺术、哲学三大门类. 后来，圣西门和黑格尔分别提出按形而上学和唯心主义观点划分学科的思路. 19 世纪后期，恩格斯提出按照物质运动的不同形式及其固有次序划分学科，建立了科学的体系结构，为学科分类奠定了坚实的科学基础.

在我们国家，人们通常把科学划分为文、理两大门类或按自然科学、数学、社会科学三大领域进行分类，对于自然科学基础学科，则习惯于按照数、理、化、天、地、生六大门类进行划分. 钱学森教授则主张将整个科学技术体系划分为自然科学、社会科学、系统科学、思维科学、人体科学、数学科学等六大科学领域，每一科学领域又分为基础科学、技术科学、工程技术三个不同的层次.

这里，我们把学科划分建立在科学问题分类的基础之上，首先按照复杂性和不确定性对科学问题进行分类，然后根据各类科学问题的性质指出与之相应的具有方法论意义的横向交叉学科，从而明确了灰色系统理论在横断学科群中的地位.

用方框(Ω)表示世界上所有事物的集合，以圆 A,B,C,D 分别表示简单事物、复杂事物、确定性事物、不确定性事物的集合，可得到科学问题分类的四环图(图 1.1.1)，标出解决各类问题的科学方法，即得到横断学科分类四环图(图 1.1.2).

对照图 1.1.1 和图 1.1.2，可以看出，作为解决不确定半复杂问题的科学方法，灰色系统理论与解决简单不确定问题的概率统计、模糊数学相比，实现了一次新的飞跃，而复杂不确定问题的解决，则有待于非线性科学的新突破.

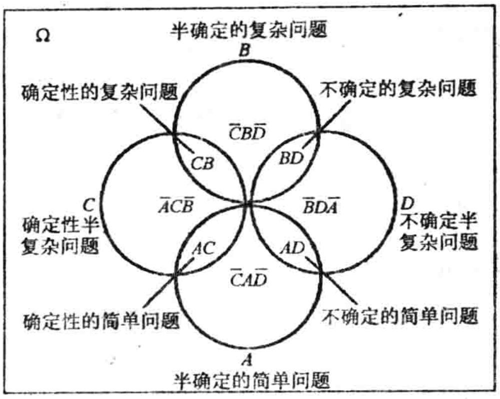

图 1.1.1　科学问题分类的四环图

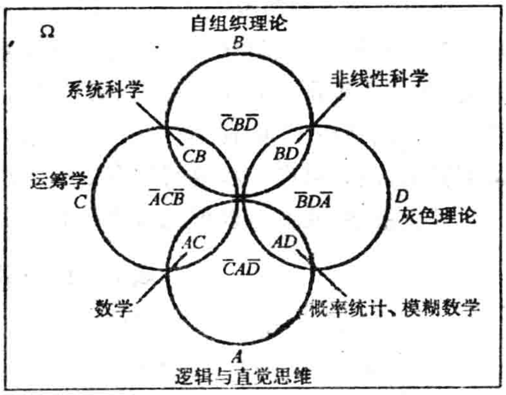

图 1.1.2　横断学科分类的四环图

1.2　灰色系统的概念与基本原理

一、灰色系统的基本概念

社会、经济、农业、工业、生态、生物等许多系统，是根据研究对象所属的领域和范围命名的，而灰色系统却是按颜色命名的. 在控制论中，人们常用颜色的深浅形容信息的明确程度，如艾什比(Ashby)将内部信息未知的对象称为黑箱(Black Box). 这种称谓已为人们普遍接受. 再如在政治生活中，人民群众希望了解决策及其形成过程的有关信息，就提出要增加"透明度". 我们用"黑"表示信息未知，用"白"表示信息完全明确，用"灰"表示部分信息明确、部分信息不明确. 相应地，信息完全明确的系统称为白色系统，信息未知的系统称为黑色系统，部分信息明确、部分信息不明确的系统称为灰色系统.

请注意"系统"与"箱"这两个概念的区别. 通常地，"箱"侧重于对象外部特征而不重视其内部信息的开发利用，往往通过输入输出关系或因果关系研究对象的功能和特征. "系统"则通过对象、要素、环境三者之间的有机联系和变化规律研究其结构和功能.

灰色系统理论的研究对象是"部分信息已知，部分信息未知"的"贫信息"不确定性系统，它通过对"部分"已知信息的生成、开发实现对现实世界的确切描述和认识.

在人们的社会、经济活动或科研活动中，会经常遇到信息不完全的情况. 如在农业生产中，即使是播种面积、种子、化肥、灌溉等信息完全明确，但由于劳动力技术水平、自然环境、气候条件、市场行情等信息不明确，仍难以准确地预计出产量、产值；再如生物防治系统，虽然害虫与其天敌之间的关系十分明确，但却往往因人们对害虫与饵料、天敌与饵料、某一天敌与别的天敌、某一害虫与别的害虫之间的关联信息了解不够，使得生物防治难以收到预期效果；价格体系的调整或改革，常常因缺乏民众心理承受力的信息，以及某些商品价格变动对其它商品价格影响的确切信息而举步维艰；在证卷市场上，即使最高明的系统分析人员亦难以稳操胜券，因为你测不准金融政策、利率政策、企业改革、国际市场变化及某些板块价格波动对其它板块之影响的确切信息；一般的社会经济系统，由于其没有明确的"内"、"外"关系，系统本身与系统环境、系统内部与系统外部的边界若明若暗，难以分析输入(投入)对输出(产出)的影响. 而同一个经济变量，有的研究者把它视为内生变量，

另一些研究者却把它视为外生变量，这是因为缺乏系统结构、系统模型及系统功能信息所致.

综上所述，可以把系统信息不完全的情况分为以下四种：

(1) 元素(参数)信息不完全；

(2) 结构信息不完全；

(3) 边界信息不完全；

(4) 运行行为信息不完全.

"信息不完全"是"灰"的基本含义. 从不同场合、不同角度看，还可以将"灰"的含义加以引申(详见表 1.2.1).

表 1.2.1 "灰"概念引申

场合 \ 概念	黑	灰	白
从信息上看	未知	不完全	完全
从表象上看	暗	若明若暗	明朗
在过程上	新	新旧交替	旧
在性质上	混沌	多种成分	纯
在方法上	否定	扬弃	肯定
在态度上	放纵	宽容	严厉
从结果看	无解	非惟一解	惟一解

二、灰色系统的基本原理

在灰色系统理论创立和发展过程中，邓聚龙教授发现并提炼出灰色系统的基本原理. 读者不难看出，这些基本原理，具有十分深刻的哲学内涵.

公理 1.2.1(差异信息原理) "差异"是信息，凡信息必有差异.

我们说"事物 A 不同于事物 B"，即含有事物 A 相对于事物 B 之特殊性的有关信息. 客观世界中万事万物之间的"差异"为我们提供了认识世界的基本信息.

信息 I 改变了我们对某一复杂事物的看法或认识，信息 I 与人们对该事物的原认识信息有差异. 科学研究中的重大突破为人们提供了认识世界、改造世界的重要信息，这类信息与原来的信息必有差异. 信息 I 的信息含量越大，它与原信息的差异就越大.

公理 1.2.2(解的非惟一性原理) 信息不完全、不确定的解是非惟一的.

"解的非惟一性原理"是灰色系统理论解决实际问题所遵循的基本法则，他给予你灵活性的法宝，使你处处取得实效.

"解的非惟一性原理"在决策上的体现是灰靶思想. 灰靶是目标非惟一与目标可约束的统一. 比如升学填报志愿，一个认定了"非某校不上"的考生，如果考分不具绝对优势，其愿望就很可能落空. 相同条件对于愿意退而求其"次"，多目标、多选择的考生，其升学的机会更多.

"解的非惟一性原理"也是目标可接近、信息可补充、方案可完善、关系可协调、思维可多向、认识可深化、途径可优化的具体体现. 在面对多种可能的解时，能够通过定性分析，补充信息，确定出一个或几个满意解. 因此，"非惟一性"的求解途径是定性分析与定量分

析相结合的求解途径.

公理 1.2.3(最少信息原理) 灰色系统理论的特点是充分开发利用已占有的“最少信息”.

“最少信息原理”是“少”与“多”的辨证统一,灰色系统理论的特色是研究“小样本”、“贫信息”不确定性问题. 其立足点是“有限信息空间”,“最少信息”是灰色系统的基本准则. 所能获得的信息“量”是判别“灰”与“非灰”的分水岭,充分开发利用已占有的“最少信息”是灰色系统理论解决问题的基本思路.

公理 1.2.4(认知根据原理) 信息是认知的根据.

认知必须以信息为依据,没有信息,无以认知. 以完全、确定的信息为根据,可以获得完全确定的认知,以不完全、不确定的信息为根据,只能得到不完全、不确定的灰认知.

公理 1.2.5(新信息优先原理) 新信息对认知的作用大于老信息.

“新信息优先原理”是灰色系统理论的信息观,赋予新息较大的权重可以提高灰色建摸、灰色预测、灰色分析、灰色评估、灰色决策等的功效. “新陈代谢”模型体现了“新信息优先原理”. 新信息的补充为灰元白化提供了基本动力. “新信息优先原理”是信息的时效性的具体体现.

公理 1.2.6(灰性不灭原理) “信息不完全”(灰)是绝对的.

信息不完全、不确定具有普遍性. 信息完全是相对的、暂时的. 原有的不确定性消失,新的不确定性很快出现. 人类对客观世界的认识,通过信息的不断补充而一次又一次地升华. 信息无穷尽,认知无穷尽,灰性永不灭.

三、灰色系统理论的主要内容

灰色系统理论经过 10 多年的发展,已基本建立起一门新兴学科的结构体系. 其主要内容包括以灰色朦胧集为基础的理论体系,以灰色关联空间为依托的分析体系,以灰色序列生成为基础的方法体系,以灰色模型(GM)为核心的模型体系,以系统分析、评估、建摸、预测、决策、控制、优化为主体的技术体系.

灰色朦胧集、灰色代数系统、灰色矩阵、灰色方程等是灰色系统理论的基础,从学科体系自身的优美、完善出发,这里有许多问题值得进一步深入研究.

灰色系统分析除灰色关联分析外,还包括灰色聚类和灰色统计评估等方面的内容.

灰色序列生成在本书中被统一到序列算子的概念之下,主要包括缓冲算子(弱化算子、强化算子)、均值生成算子、级比生成算子、累加生成算子和累减生成算子等.

灰色模型按照五步建模思想构建,通过灰色生成或序列算子的作用弱化随机性,挖掘潜在的规律,经过灰色差分方程与灰色微分方程之间的互换实现了利用离散的数据序列建立连续的动态微分方程的新飞跃.

灰色预测是基于 GM 模型作出的定量预测,按照其功能和特征可分成数列预测、区间预测、灾变预测、季节灾变预测、波形预测和系统预测等几种类型.

灰色决策包括灰靶决策、灰色关联决策、灰色统计、聚类决策、灰色局势决策和灰色层次决策等.

灰色控制的主要内容包括本征性灰色系统的控制问题和以灰色系统方法为主构成的控制,如灰色关联控制和 GM(1,1)预测控制等.

灰色优化技术包括灰色线性规划、灰色非线性规划、灰色整数规划和灰色动态规划等.

根据读者反馈的信息,本书第二版删去了第一版中的部分内容,同时,增加了灰色组合模型和灰色投入产出两章.

1.3 灰数及其运算

一、灰数

灰色系统用灰数、灰色方程、灰色矩阵等来描述,其中灰数是灰色系统的基本"单元"或"细胞".

我们把只知道大概范围而不知其确切值的数称为灰数.在应用中,灰数实际上指在某一个区间或某个一般的数集内取值的不确定数.通常用记号"$\otimes$"表示灰数.

灰数有以下几类:

1°仅有下界的灰数

有下界而无上界的灰数记为$\otimes \in [\underline{a}, \infty]$或$\otimes(\underline{a})$,其中$\underline{a}$为灰数$\otimes$的下确界,它是一个确定的数.我们称$[\underline{a}, \infty)$为$\otimes$的取数域,简称$\otimes$的灰域.

一棵生长着的大树,其重量便是有下界的灰数,因为大树的重量必大于零,但不可能用一般手段知道其准确的重量,若用$\otimes$表示大树的重量,便有$\otimes \in [0, \infty)$.

2°仅有上界的灰数

有上界而无下界的灰数记为$\otimes \in (-\infty, \bar{a}]$或$\otimes(\underline{a})$,其中 $\bar{a}$ 是灰数$\otimes$的上确界,是确定的数.

一项投资工程,要有个最高投资限额,一件电器设备要有个承受电压或通过电流的最高临界值.工程投资、电器设备的电压、电流容许值都是有上界的灰数.

3°区间灰数

既有下界 $\underline{a}$又有上界 $\bar{a}$ 的灰数称为区间灰数,记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$.

海豹的重量在 20～25 公斤之间,某人的身高在 1.8～1.9 米之间,可分别记为

$$\otimes_1 \in [20, 25], \quad \otimes_2 \in [1.8, 1.9]$$

4°连续灰数与离散灰数

在某一区间内取有限个值或可数个值的灰数称为离散灰数,取值连续地充满某一区间的灰数称为连续灰数.

某人的年龄在 30 到 35 岁之间,此人的年龄可能是 30,31,32,33,34,35 这几个数,因此年龄是离散灰数.人的身高、体重等是连续灰数.

5°黑数与白数

当$\otimes \in (-\infty, \infty)$或$\otimes \in (\otimes_1, \otimes_2)$,即当$\otimes$的上、下界皆为无穷或上、下界都是灰数时,称$\otimes$为黑数.

当$\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 且 $\underline{a} = \bar{a}$ 时,称$\otimes$为白数.

为讨论方便,我们将黑数和白数看成特殊的灰数.

6°本征灰数与非本征灰数

本征灰数是指不能或暂时还不能找到一个白数作为其“代表”的灰数，比如一般的事前预测值、宇宙的总能量、准确到秒或微秒的“年龄”等都是本征灰数.

非本征灰数是指凭先验信息或某种手段，可以找到一个白数作为其“代表”的灰数.我们称此白数为相应灰数的白化值，记为$\tilde{\otimes}$，并用$\otimes(a)$表示以a为白化值的灰数.如托人代买一件价格100元左右的衣服，可将100作为预购衣服价格$\otimes(100)$的白化数，记为$\tilde{\otimes}(100)=100$.

从本质上看，灰数又可以分为信息型、概念型、层次型三类.

1°信息型灰数，指因暂时缺乏信息而不能肯定其取值的数.如：预计某地区今年夏粮产量在100万吨以上，$\otimes\in[100,\infty)$；估计某储蓄所年底居民储蓄存款总额将达7 000万到9 000万元，$\otimes\in[7\ 000,9\ 000]$；预计郑州地区5月份最高气温不超过36℃，$\otimes\in[0,36]$.这些都是信息型灰数.由于暂时缺乏信息，不能肯定某数的确切取值，而到一定时间后，通过信息补充，灰数可以完全变白.如上述三个灰数，一旦预言的时间终了，就会变成完全确定的数.

2°概念型灰数也称意愿型灰数，指由人们的某种观念、意愿形成的灰数.如：某人希望至少获得1万元科研经费，并且越多越好，$\otimes\in[10\ 000,\infty)$；某工厂废品率为1%，希望大幅度降低，当然越小越好，$\otimes\in[0,0.01]$.这些都是概念型灰数.

3°层次型灰数，由层次改变形成的灰数.有的数，从系统的高层次，即宏观层次、整体层次或认识的概括层次上看是白的；可到低层次上，即到系统的微观层次、分部层次或认识的深化层次则可能是灰的.例如，一个人的身高，以厘米度量是白的，若精确到万分之一毫米就成灰的了.有的数，在某个小范围内是白的，在大范围内就成灰的了.例如叫张三的人，某个学校只有1人，全市大学有4～6人，$\otimes\in[4,6]$已是灰数；若在全国范围内考虑，就更加说不清了.

二、区间灰数的运算

设有灰数$\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$；$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，用符号$*$表示$\otimes_1$与$\otimes_2$间的运算，若$\otimes_3=\otimes_1*\otimes_2$，则$\otimes_3$亦应为区间灰数，因此应有$\otimes_3\in[e,f]$，$e<f$，且对任意的$\tilde{\otimes}_1$，$\tilde{\otimes}_2$，$\tilde{\otimes}_1*\tilde{\otimes}_2\in[e,f]$.

法则 1.3.1 设$\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$，$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，则$\otimes_1$与$\otimes_2$的和记为$\otimes_1+\otimes_2$，且

$$\otimes_1+\otimes_2\in[a+c,b+d] \tag{1.3.1}$$

例 1.3.1 设$\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[5,8]$，则$\otimes_1+\otimes_2\in[8,12]$.

法则 1.3.2 设$\otimes\in[a,b]$，$a<b$，则

$$-\otimes\in[-b,-a] \tag{1.3.2}$$

法则 1.3.3 设$\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$，$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，则

$$\otimes_1-\otimes_2=\otimes_1+(-\otimes_2)\in[a-d,b-c] \tag{1.3.3}$$

例 1.3.2 设$\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[1,2]$，则

$$\otimes_1-\otimes_2\in[3-2,4-1]=[1,3],\quad \otimes_2-\otimes_1\in[1-4,2-3]=[-3,-1]$$

法则 1.3.4 设$\otimes\in[a,b]$，$a<b$，$a\neq0$，$b\neq0$，且$ab>0$，则

$$\otimes^{-1}\in\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right] \tag{1.3.4}$$

例 1.3.3 设$\otimes\in[2,4]$,则$\otimes^{-1}\in[0.25,0.5]$.

法则 1.3.5 设$\otimes_1\in[a,b]$,$a<b$,$\otimes_2\in[c,d]$,$c<d$,则

$$\otimes_1\cdot\otimes_2\in[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}] \tag{1.3.5}$$

例 1.3.4 设$\otimes_1\in[3,4]$,$\otimes_2\in[5,10]$,则

$$\otimes_1\cdot\otimes_2\in[\min\{15,30,20,40\},\max\{15,30,20,40\}]=[15,40]$$

法则 1.3.6 设$\otimes_1\in[a,b]$,$a<b$,$\otimes_2\in[c,d]$,$c<d$,且$c\neq0$,$d\neq0$,$cd>0$,则$\otimes_1/\otimes_2=\otimes_1\cdot\otimes_2^{-1}$,即

$$\otimes_1/\otimes_2\in\left[\min\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\},\max\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\}\right] \tag{1.3.6}$$

例 1.3.5 设$\otimes_1\in[3,4]$,$\otimes_2\in[5,10]$,则

$$\otimes_1/\otimes_2\in\left[\min\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{5},\frac{4}{10}\right\},\max\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{5},\frac{4}{10}\right\}\right]=[0.3,0.8]$$

法则 1.3.7 设$\otimes\in[a,b]$,$a<b$,k为正实数,则

$$k\cdot\otimes\in[ka,kb] \tag{1.3.7}$$

定理 1.3.1 区间灰数不能相消、相约.

也就是说,灰数的自差,一般不等于零,仅当减数与被减数取数一致[1)]时,灰数的自差才等于零.灰数自除,情况类似.

例 1.3.6 设$\otimes\in[2,5]$,则

$$\otimes-\otimes\begin{cases}=0, & \text{取数一致}\\ \in[-3,3], & \text{取数非一致}\end{cases}\qquad \frac{\otimes}{\otimes}\begin{cases}=1, & \text{取数一致}\\ \in\left[\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right], & \text{取数非一致}\end{cases}$$

定义 1.3.1 设$R(\otimes)$为一灰数集.若对任意的$\otimes_i,\otimes_j\in R(\otimes)$,有$\otimes_i+\otimes_j$,$\otimes_i-\otimes_j$,$\otimes_i\cdot\otimes_j$,$\otimes_i/\otimes_j$均属于$R(\otimes)$(商运算时要满足法则 1.3.6 的规定),则称$R(\otimes)$为一灰数域.

定理 1.3.2 区间灰数全体构成灰数域.

定义 1.3.2 设$E(\otimes)$为区间灰数集,若对于任意$\otimes_i,\otimes_j,\otimes_k\in E(\otimes)$,有

1° $\otimes_i+\otimes_j=\otimes_j+\otimes_i$;

2° $(\otimes_i+\otimes_j)+\otimes_k=\otimes_i+(\otimes_j+\otimes_k)$;

3° 存在零元素$0\in E(\otimes)$,使$\otimes_i+0=\otimes_i$;

4° 对任意$\otimes\in E(\otimes)$,有$-\otimes\in E(\otimes)$,且使得$\otimes+(-\otimes)=0$;

5° $\otimes_i\cdot(\otimes_j\cdot\otimes_k)=(\otimes_i\cdot\otimes_j)\cdot\otimes_k$;

6° 存在单位元$1\in E(\otimes)$,使$1\cdot\otimes_i=\otimes_i\cdot1=\otimes_i$;

7° $(\otimes_i+\otimes_j)\cdot\otimes_k=\otimes_i\cdot\otimes_k+\otimes_j\cdot\otimes_k$;

8° $\otimes_i\cdot(\otimes_j+\otimes_k)=\otimes_i\cdot\otimes_j+\otimes_i\cdot\otimes_k$,

则称$E(\otimes)$为灰色线性空间.

定理 1.3.3 取数一致的区间灰数全体构成灰色线性空间.

---

1) 参见定义 1.4.3.

1.4 灰数白化与灰度

有一类灰数是在某个基本值附近变动的，这类灰数白化比较容易，我们可以其基本值为主要白化值. 以 a 为基本值的灰数可记为$\otimes(a)=a+\delta_a$ 或$\otimes(a)\in(-,a,+)$，其中 δ_a 为扰动灰元，此灰数的白化值$\tilde{\otimes}(a)=a$. 如今年的科研经费在 5 万元左右，可表示为$\otimes(50\ 000)=50\ 000+\delta$，或$\otimes(50\ 000)\in(-,50\ 000,+)$，它的白化值为 50 000.

对于一般的区间灰数$\otimes\in[a,b]$，我们将白化值$\tilde{\otimes}$取为

$$\tilde{\otimes}=\alpha a+(1-\alpha)b,\alpha\in[0,1] \tag{1.4.1}$$

定义 1.4.1 形如$\tilde{\otimes}=\alpha a+(1-\alpha)b,\alpha\in[0,1]$的白化称为等权白化.

定义 1.4.2 在等权白化中，取 $\alpha=\frac{1}{2}$ 而得到的白化值称为等权均值白化.

当区间灰数取值的分布信息缺乏时，常采用等权均值白化.

定义 1.4.3 设区间灰数$\otimes_1\in[a,b]$，$\otimes_2\in[c,d]$，$\tilde{\otimes}_1=\alpha a+(1-\alpha)b,\alpha\in[0,1]$，$\tilde{\otimes}_2=\beta c+(1-\beta)d,\beta\in[0,1]$，当 $\alpha=\beta$ 时，我们称$\otimes_1$ 与$\otimes_2$ 取数一致；当 $\alpha\neq\beta$ 时，称$\otimes_1$ 与$\otimes_2$ 取数非一致.

在灰数的分布信息已知时，往往采取非等权白化. 例如某人 2000 年的年龄可能是 40 岁到 60 岁，$\otimes\in[40,60]$是个灰数. 根据了解，此人受初、中级教育共 12 年，并且是在 60 年代中期考入大学的，故此人年龄到 2000 年为 58 岁左右的可能性较大，或者说在 56 岁到 60 岁的可能性较大. 这样的灰数，如果再作等权白化，显然是不合理的. 为此，我们用白化权函数来描述一个灰数对其取值范围内不同数值的"偏爱"程度.

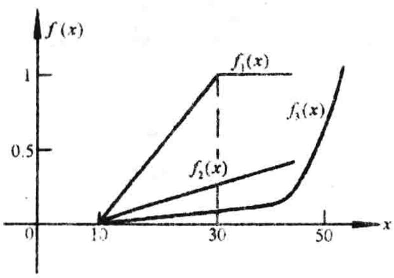

图 1.4.1

对概念型灰数中表示意愿的灰数，其白化权函数一般设计为单调增函数. 图 1.4.1 中白化权函数 $f(x)$ 表示了贷款额这一灰数及其受"偏爱"的程度. 其中，直线用来表示"正常愿望"，即"偏爱"程度与资金（万元）成比例增加. 不同的斜率表示欲望的强烈程度不同，$f_1(x)$表示较为平缓的欲望，认为给 10 万元不行，给 20 万元就比较满意，给 30 万元就足够了；$f_2(x)$表示愿望强烈，给 35 万元也只有 20%的满意程度；$f_3(x)$表明即使给 40 万元，满意程度才达到 10%，但给到 50 万元就行了，即非要接近 50 万元不可，几乎没有减少的余地.

一般说来，一个灰数的白化权函数是研究者根据已知信息设计的，没有固定的程式. 函数曲线的起点和终点一般应有其含意. 如在外贸谈判中，就有一个由灰变白的过程. 开始谈判时，甲方说我的出口额至少要有 5 亿美元，乙方说我的进口额不大于 3 亿. 这样，成交额这一灰数将在 3 亿与 5 亿之间取值. 其白化权函数可将起点定为 3 亿，终点定为 5 亿.

定义 1.4.4 起点、终点确定的左升、右降连续函数称为典型白化权函数.

典型白化权函数一般如图 1.4.2(a)所示.

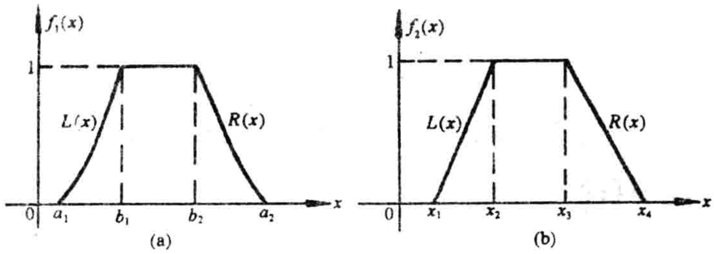

图 1.4.2

$$f_1(x)=\begin{cases}L(x), & x\in[a_1,b_1)\\ 1, & x\in[b_1,b_2]\\ R(x), & x\in(b_2,a_2]\end{cases}$$

我们称 $L(x)$ 为左增函数，$R(x)$ 为右降函数，$[b_1,b_2]$ 为峰区，a_1 为始点，a_2 为终点，b_1，b_2 为转折点.

在实际应用中，为了便于编程和计算，$L(x)$ 和 $R(x)$ 常简化为直线[如图 1.4.2(b)所示]，这样

$$f_2(x)=\begin{cases}L(x)=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x\in[x_1,x_2)\\ 1, & x\in[x_2,x_3]\\ R(x)=\dfrac{x_4-x}{x_4-x_3}, & x\in(x_3,x_4]\end{cases}$$

定理 1.4.1 设 X 为实数空间，$Y\subseteq[0,1]$，映射 $f:X\to Y$，$x\mapsto f(x)$ 满足典型白化权函数的条件，则 f 具有下述性质：

1° $f(\varnothing)=\varnothing$；

2° $f(X)=Y$；

3° $A,B\subseteq X$，若 $A\subseteq B$，则 $f(A)\subseteq f(B)$；

4° 若 $A\neq\varnothing$，则 $f(A)\neq\varnothing$；

5° $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

6° $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

定义 1.4.5 设 f 为典型白化权函数，$Y\subseteq[0,1]$，$f^{-1}(y)=\{x\mid f(x)=y,y\in Y\}$，称 f^{-1} 为 f 的反函数.

定义 1.4.6 设 X，Y 为拓扑空间，映射：$f:X\to Y$，$x\mapsto f(x)$ 是一一到上的. 若 f 和 f^{-1} 皆连续，则称 f 为同胚.

命题 1.4.1 灰数的白化权函数是同胚函数.

定义 1.4.7 对图 1.4.2(a)所示的白化权函数，称

$$g^{\circ}=\frac{2|b_1-b_2|}{b_1+b_2}+\max\left\{\frac{|a_1-b_1|}{b_1},\frac{|a_2-b_2|}{b_2}\right\} \tag{1.4.2}$$

为⊗的灰度.

g° 的表达式是两部分的和，其中第一部分代表峰区大小对灰度的影响，第二部分代表 $L(x)$ 和 $R(x)$ 覆盖面积大小对灰度的影响，一般说来，峰区越大，$L(x)$ 和 $R(x)$ 的覆盖面积