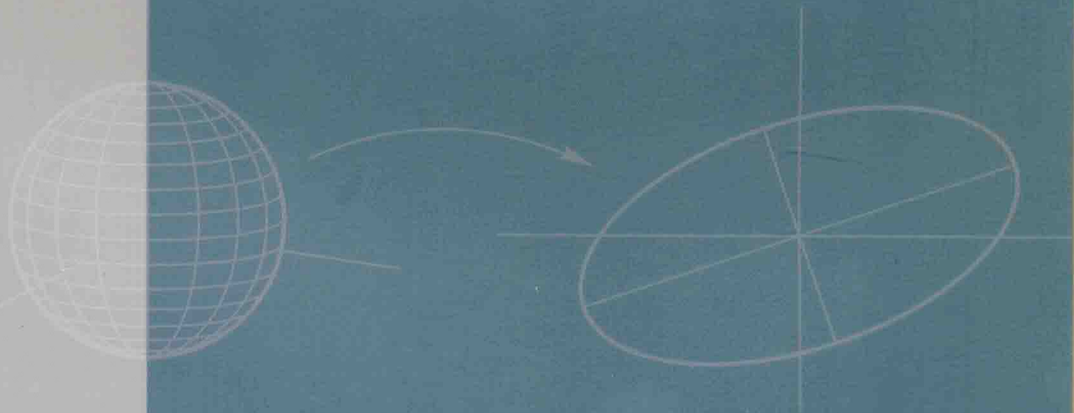
线性代数疑难问题选讲

蒲和平

Answers to Selected Perplexed Questions in Linear Algebra



高等教育出版社

线性代数疑难问题选讲

Xianxing Daishu Yinan Wenti Xuanjiang

蒲和平

高等教育出版社·北京

内容提要

本书对工科类线性代数课程中一些疑难问题作了较为深入的讨论。其内容主要涉及四个方面：一是对教材中一些重要的概念、理论和方法作剖析，揭示包含其中的数学原理与思想，归纳总结一些重要的数学方法；二是对于一些容易混淆的概念辨明它们之间的区别与联系；三是对教材中一些常用而又没给出证明的定理补充证明，并对部分内容作了适当的延伸；四是收集整理了大量的应用实例供读者参考。

本书可作为线性代数课程的教学参考书，对教师的教学与学生的学习都有很好的启迪与帮助。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数疑难问题选讲 / 蒲和平主编．-- 北京：高等教育出版社，2014.8

ISBN 978-7-04-040392-3

Ⅰ．①线… Ⅱ．①蒲… Ⅲ．①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ．① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 162162 号

策划编辑	蒋　青	责任编辑	蒋　青	特约编辑	师钦贤	封面设计	赵　阳
版式设计	范晓红	插图绘制	黄建英	责任校对	刘娟娟	责任印制	张泽业

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市华骏印务包装有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	11.5	版　　次	2014年8月第1版
字　　数	200千字	印　　次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	21.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40392-00

前言

线性代数是高等学校理工科各专业的一门公共基础课程，该课程涉及学生面宽，基础性强，应用范围广，具有一定的抽象性；该课程对培养学生能力、提高学生素质具有重要的奠基作用。因此，加强线性代数课程的建设，提高线性代数课程的教学质量是一件具有深远意义的工作。为了帮助广大线性代数课程教师(特别是青年教师) 深入钻研教材，准确把握教材内容，提高教学质量，我们编写了这本《线性代数疑难问题选讲》，旨在为任课教师提供一本有益的教学参考书，同时也为广大学生深入理解线性代数课程知识提供良好的帮助与指导。

本书不以知识总结与解题技巧为目的，而是从历史的、全局的、多角度的去分析线性代数课程知识的意义与内在联系，帮助教师站在一个较高的平台驾驭教材。本书内容主要涉及以下四个方面：一是针对教材中的一些疑难问题 (一些重要的概念、理论、方法) 加以剖析，揭示这些问题的实质以及包含其中的数学原理与思想，使我们明确学习与教学目标，对其中部分问题还介绍了具体的处理与讲授方法。二是对于一些容易混淆的概念辨明它们之间的区别与联系，归纳总结一些重要的数学方法。三是对教材中一些常用而又没给出证明的定理补充证明，对教材内容作适当的延伸与拓展，为教师开阔视野搭建必要的平台。最后针对现行教材普遍存在的应用实例较少的现象，本书收集整理了大量的应用实例 (第六章)，这些例子涉及物理、化学、生物、经济、交通、几何、生活等领域，是教学中很好的素材，供读者选用。

为了适应不同层次读者的需求，本书所写内容可分为两个层次：大部分问题是为深入理解线性代数课程的内容而写的，各问题之间相对独立，读者可根据自己的情况有选择地阅读；部分问题是教材内容的延伸与拓展，可供教师及学有余力的学生参考。

本书以问题与解答的形式展开，这些问题部分来自于教师的教学实践与教学研究，部分来自于教学中的学生提问，内容都是作者多年教学工作的积累与总结，编写时还参考了国内外大量的资料。为便于理解，对较为抽象的问题我们都给出了具体例子，部分例子是我们编创的，具有一定的新意，教学中可有针对性地选用。多年的教学实践及青年教师培训表明，书中涉及的问题，以及对这些问题的认识与处理方法都是十分重要的。期望本书能对教师的教学起到有力的推

动作用，对学生的学习起到启迪思维、开阔视野的作用。

本书由蒲和平编写，在编写初期，电子科技大学李厚彪、何军华、干泰彬三位老师参加了部分内容的编写工作。“高等学校大学数学教学研究与发展中心”为本书的编写提供了项目研究资助；在编写过程中得到了西安交通大学马知恩教授的悉心指导与热情帮助，还得到了电子科技大学黄廷祝教授、谢云荪教授的支持与帮助，他们对本书的编写提出了很多宝贵的意见与建议，在此一并表示衷心的感谢！

限于作者水平，不妥之处在所难免，恳请同行专家及读者批评指正。

作者

2014 年 3 月于成都

目录

第一章　矩阵

问题 1.1　矩阵乘法中的几个问题

(1) 矩阵的乘法为什么要像教材中那样定义

矩阵是线性代数的主要研究对象, 是解决线性问题的有力工具. 在矩阵的运算中, 从形式上看, 加法与数乘都与数或向量的对应运算相一致, 容易被初学者接受. 但矩阵的乘法却是一种不常见的规则, 会使初学者感到 “奇异”, 甚至难以理解. 事实上, 矩阵的乘法规则并不是数学家的刻意所为, 从下面两个方面我们可以看到矩阵乘法定义的自然性与科学性.

1° 描述实际问题的需要

例 1.1.1　三家商店 S_i $(i=1,2,3)$ 销售四种食品 F_j $(j=1,2,3,4)$, 每单位售价的价格矩阵为 (以元计):

$$\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \end{array}.$$

矩阵每一行的元表示每家商店 4 种食品的单位售价. 若欲在 3 家商店 S_i $(i=1,2,3)$ 分别购买 F_j 食品 x_j 个单位 $(j=1,2,3,4)$, 试问: 应分别付给 3 家商店多少金额? 并用矩阵表示.

解　记 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}$ 表示购买量矩阵. 根据给定的单位售价, 应分别付给

3 家商店的金额为

$$S_1 : 17x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 21x_4,$$
$$S_2 : 15x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 19x_4,$$
$$S_3 : 18x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 19x_4.$$

用 3×1 矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 17x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 21x_4 \\ 15x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 19x_4 \\ 18x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 19x_4 \end{pmatrix}.$$

由于所用金额应该是单位售价与购买量之积, 因此, 我们自然可把上面的金额矩阵看作是单位售价矩阵与购买量矩阵的乘积, 即有

$$\begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 21x_4 \\ 15x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 19x_4 \\ 18x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 19x_4 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

这就给出了两个矩阵相乘应该遵循的规则.

2° 科学表示与计算的需要

我们将上面的例子作以下两个方面的延伸:

一方面的延伸是: 给定确定的金额 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, 反求各商品的购买量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, 这就是求解线性方程组 $\begin{cases} 17x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 21x_4 = b_1, \\ 15x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 19x_4 = b_2, \\ 18x_1 + 8x_2 + 15x_3 + 19x_4 = b_3 \end{cases}$ 的问题, 按上面 "乘法" 的约定, 该方程组就可简记为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. 这种表示很像我们熟知的一元一次方程, 这不仅简化了方程组的表示, 在以后的学习中我们会感受到这种简化带来的很多好处.

另一方面的延伸是: 如果我们计划在这 3 家商店分两批次购买对应的 4 种食品, 假设两次的购买量分别为 $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix}$, 若用 $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{pmatrix}$ 分别表示两次购买需付出的对应金额, 按上面的“乘法”约定, 自然会有

$$\begin{pmatrix} 17 & 7 & 11 & 21 \\ 15 & 9 & 13 & 19 \\ 18 & 8 & 15 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \\ x_{14} & x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix},$$

其中 b_{ij} 也就是等式左端前一个矩阵的第 i 行元与后一个矩阵的第 j 列对应元乘积之和.

通过上面的描述, 我们就会很自然地得到教材中矩阵乘法的“定义”.

有了矩阵乘法的概念, 我们再来看看线性变换的复合运算问题:

例 1.1.2 设有两个线性变换

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \\ y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \\ y_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2. \end{cases}$$

试求出从 z_1, z_2 到 x_1, x_2 的线性变换.

解 将两线性变换分别用矩阵表示为

$$\text{(I) } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \quad \text{(II) } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}.$$

将 (II) 代入 (I), 得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$$

可见 $\boldsymbol{AB}$ 就是从 z_1, z_2 到 x_1, x_2 的线性变换的矩阵.

如果将以上运算用分量形式具体写出, 应为

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{12}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) + a_{13}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2), \\ x_2 = a_{21}(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + a_{22}(b_{21}z_1 + b_{22}z_2) + a_{23}(b_{31}z_1 + b_{32}z_2), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2, \\ x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2. \end{cases}$$

易见

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

就是复合变换 $z \to y \to x$ 的矩阵, 由此会进一步加深我们对矩阵乘法“定义”的认识.

最后谈谈矩阵乘法对矩阵意义的影响. 我们通常说, 矩阵是一张数表, 对这张数表我们定义了多种运算, 如加法、数乘、转置等; 当有了矩阵的乘法, 这张“静”态的数表就“动”了起来, 可用它来表示一个线性变换 $\mathcal{A}: \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 同时任意一个线性变换也都可以用矩阵来表示 (问题 4.8 定理 4.8.3), 这就使得矩阵的意义更加丰富, 其应用的范围也更为广泛.

(2) 矩阵乘法还有其他定义形式吗

数学中的各种概念都不是凭空产生的, 它通常是具体问题的概括与抽象. 与已有概念作类比或延伸也是一种常见的方式. 比如, 能否像矩阵加法那样, 将矩阵的乘法规定为对应元之积 (这也是初学者常提出的问题)? 其实这样的乘积定义是有的, 同时也能找到它的一些应用背景, 历史上有很多人都曾研究过这类运算. 除此之外, 矩阵乘积还有一些其他的定义, 这些定义在理论与应用方面都很有价值. 下面介绍两个不同的乘法定义.

定义 1.1.1 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵, 定义两矩阵的乘法为

$$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = (a_{ij}b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的这种乘法称为 **Hadamard** (阿达马, 法国数学家, 1865—1963) 积, 或 Schur (舒尔, 1875—1941) 积.

这种运算简单, 显然满足交换律 ($\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \circ \boldsymbol{A}$), 并且具有很丰富的结构和各种有趣的结果, 例如:

定理 1.1.1 (Schur 积定理) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵. 则当 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是半正定矩阵时, $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 也是半正定矩阵; 特别地, 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵, 那么 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

这表明, 矩阵的正定性 (或半正定性) 在 Hadamard 积运算下是封闭的, 但这对普通矩阵乘法运算未必成立, 因为两个正定矩阵的乘积未必是对称的, 从而也未必是正定的矩阵. 另外, 该运算还有与普通矩阵乘法运算不一样的其他性质, 如:

定理 1.1.2 (Oppenheim (奥本海姆) 不等式) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵, 那么

$$|\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}|\geqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}|\boldsymbol{B}|\geqslant|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AB}|,$$

且最左端等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵, 中间等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵, 因此左右两端等号成立的充要条件为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为对角矩阵.

由此可知, Hadamard 积矩阵的行列式不同于普通矩阵乘法的行列式性质:

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

Hadamard 积还有许多有趣的问题值得研究, 例如 Hadamard 积的逆、Hadamard 积的特征值和特征向量、Hadamard 积的对角化等问题.

另外一种应用较为广泛的矩阵乘积叫 “Kronecker 积” (克罗内克, 1823—1891), 它的定义为

定义 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times q}$, 定义

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B}\\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}_{mp\times nq}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 Kronecker 积 (或称直积, 张量积).

这种乘积具有很丰富的结构和有趣的结果, 它在张量代数、矩阵方程求解、统计的正交设计、信号传输预处理、自动控制、规划理论和图像处理等工程领域中都有着广泛的应用. 有兴趣的读者可以查询相关的书籍, 在此不作详述.

任何一种运算, 只有具备了坚实的应用背景和良好的运算律, 才能得以广泛的应用, 才具有其强大的生命力.

在教学中我们发现学生经常不知道为什么要如此定义一些数学概念, 而习惯于从老师那里得到问题和结果. 在课堂上, 很多学生常常有这样的想法: 所有与数学有关的课程都是系统的、逻辑严密的, 是 “完美” 的、“无懈可击” 的; 并产生一种这样一种错觉: 数学就是从定义到定理最后才应用到实际中去的. 所有这些都潜移默化地阻碍了学生创造力的发展, 抑制了他们在思维上的主动性和

积极性. 德国数学家 Cantor (康托尔, 1845—1918) 曾说"数学的本质在于它的自由". 因此, 适当鼓励学生大胆尝试一些新的运算, 给以正确的引导, 也不失为体现数学的"自由"精神之策, 这对学生创新能力的培养很有好处.

(3) 如何理解双重求和符号的可交换性

在矩阵的乘法结合律的证明中, 要用到双重求和符号的次序交换. 对这个问题, 初学者经常报以疑问. 若我们根据双重求和的意义将其"平铺"开来, 就很容易从"直观"上得以理解, 事实上 $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$ 是下面 $m\times n$ 个数的求和:

$$
\begin{gathered}
a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1m},\\
a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2m},\\
a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots, a_{3m},\\
\cdots,\\
a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots, a_{nm}.
\end{gathered}
$$

如果将上面的 $m\times n$ 个数先按行求和, 有

$$\sum_{j=1}^{m}a_{1j}+\sum_{j=1}^{m}a_{2j}+\sum_{j=1}^{m}a_{3j}+\cdots+\sum_{j=1}^{m}a_{nj}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right);$$

先按列求和, 有

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}+\sum_{i=1}^{n}a_{i2}+\sum_{i=1}^{n}a_{i3}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}a_{im}=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right),$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right).$$

(4) 矩阵的乘法运算要注意哪些问题

初学者在矩阵的运算方面经常会犯一些习惯性的错误, 究其原因是将实数乘法的性质套用到了矩阵乘法上, 现就矩阵乘法运算中要注意的问题作几点评述.

1° 不是任意两个矩阵都可以相乘

按矩阵乘法的定义, 只有乘积左侧矩阵的列数与右侧矩阵的行数相等, 两矩阵才能相乘. 因而只有方阵才有幂运算, 才有多项式运算; 在矩阵作分块乘积时, 左侧矩阵列数的划分必须与右侧矩阵行数的划分相同, 也就是说如果左侧矩阵

在某两列之间添加了一条竖线来分块, 那么乘积右侧的矩阵就必须在相应的两行之间添加一条横线来作相应的分块, 反之亦然.

2° 矩阵乘法不满足交换律

交换顺序后两矩阵不一定能相乘, 即使能乘也未必相等. 因此当 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ 时, 下列等式均是错误的:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 &= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}),\\
(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 &= \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + 2\boldsymbol{AB},\\
\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{B}^3 &= (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2),\\
(\boldsymbol{AB})^2 &= \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2.
\end{aligned}$$

那么上面各等式成立的条件是什么? 显然 $\boldsymbol{AB}$ 可交换是它们都成立的充分条件, 但非共同 (仅是前两式) 的必要条件!

一般来说, $\boldsymbol{AB}$ 可交换是两矩阵多项式可交换

$$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{B}) = g(\boldsymbol{B})f(\boldsymbol{A}) \quad (f(x), g(x) \text{ 是多项式函数})$$

的充分条件, 但两矩阵多项式可交换的必要条件却各有各的不同.

两矩阵乘积的可交换性是一个形式简单而传统的问题, 但鲜有简洁有效的判别方法, 下面是一些较简单的特殊情况:

例 1.1.3 (1) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶对 (反) 称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换的充要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换的充要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 为反称矩阵.

例 1.1.4 与任一 n 阶矩阵可交换的矩阵只能是数量矩阵.

证 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 与任一 n 阶矩阵可交换. 记 $\boldsymbol{E}_i(c)$ 为单位矩阵的第 i 行乘数 c 所成的初等矩阵, $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是单位矩阵交换第 i, j 两行所成的初等矩阵, 则由

$$\boldsymbol{E}_i(2)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_i(2) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

可得 $a_{ij} = 0\ (i \neq j)$, 即 $\boldsymbol{A}$ 是对角矩阵.

再由 $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}\ (i \neq j)$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

例 1.1.5 设 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ (当 $i \neq j$ 时 $a_i \neq a_j$), 则与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

例 1.1.6 设 $\boldsymbol{AB} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B}$, 其中 α, β 为非零常数, 则 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可交换.

证 由 $\boldsymbol{AB}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}$ 可得

$$(\boldsymbol{A}-\beta\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{I})=\alpha\beta\boldsymbol{I},\quad \frac{1}{\alpha\beta}(\boldsymbol{A}-\beta\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}\quad (\boldsymbol{I}\text{ 是单位矩阵}),$$

于是

$$\frac{1}{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}-\alpha\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\beta\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I}.$$

由此可得

$$\boldsymbol{BA}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}.$$

矩阵乘积的可交换性还与矩阵的特征向量有关, 我们将在问题 4.9 中作些讨论.

3° 矩阵乘法不满足消去律

矩阵乘法不满足消去律是指: 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{O}$ 为零矩阵).

由此派生出的结果有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}.$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC},\quad \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}.$$

那么, 在什么条件下矩阵乘法消去律是正确的? 即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$?

容易证明, 以下结论是正确的:

例 1.1.7 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵, $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{B}$ 为行满秩矩阵.

我们只需证明结论中的第一部分, 因为第二部分可由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 两边取转置而得到. 下面用两种方法来予以证明.

证法 1 充分性. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵, 若 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的, 则必有 $m\geqslant n$, 且经过一系列初等行变换可将 $\boldsymbol{A}$ 化为标准形 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ (其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{O}$ 是零矩阵). 即存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 所以由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 及 $\boldsymbol{P}$ 可逆可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

必要性. 若 $\boldsymbol{A}$ 不是列满秩的, 设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$. 记 $\boldsymbol{QB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$ (其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 r 行的矩阵), 则 $\boldsymbol{AB}=$

$\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}$, 由此可得 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B}_2$ 可为任意非零矩阵, 从而 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$.

证法 2 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量一定是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量, 而该方程组只有零解的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关, 即 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩矩阵.

显然, 对可逆矩阵而言, 乘法消去律总是成立的.

问题 1.2 计算一个矩阵的方幂有哪些常见方法

方阵的任意次方幂计算是一件困难的事, 没有一种通用的方法能直接找到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^n$ 的关系. 但对一些特殊矩阵或满足一定条件的矩阵, 也有一些方法可循.

(1) 用归纳法计算

当一个矩阵的阶数不高, 并且通过低次幂计算能找到 $\boldsymbol{A}^n$ 与 n 关系的, 可用归纳法证明这种关系, 并用于计算.

例 1.2.1 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 计算 $\boldsymbol{A}^n$.

解 经简单计算易得

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

假设 $\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \dfrac{k(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$ 成立, 则

$$\boldsymbol{A}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \dfrac{k(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix},$$

由数学归纳法得 $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$.