

FORTRAN

有限元程序设计

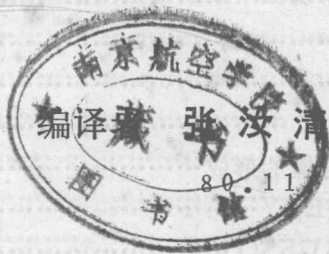
编译者 张汝清

前 言

目前国内外编写的有限元法的教科书，大都着重于理论分析和方法的论述，或不涉及程序的编写，或仅将其作为附录处理。但是，从有限元的基本理论到程序的实施之间还有一个很大的鸿沟，应该说越过这一步还是比较费劲的。本教材的目的，在于帮助初学者跨过这一鸿沟。尤其是近几年来，在对研究生和本科学生的教学中，深感有必要编写一本“有限元程序设计”教材，以适应教学的需要。因此，我们根据 E.HINTON 和 D.R.J.OWEN 所著 Finite Element Programming 编译而成这本教材。在有些地方略作删减。

原教材内容精炼，取材新颖，深入浅出的讨论了梁、平面和板弯曲三类问题的有限元程序设计，自始至终贯穿抛物线等参单元，采用最新的波前解法，用 FORTRAN 编写，是一本好的教材，值得推荐。但由于编译者水平较低，加上时间仓促，错误之处难免，请读者批评指正。

本教材在编译过程中，得到刘崇德、李润芳、龚剑霞三位老师的帮助，审阅了教材的全部底稿，提出了许多改正的意见，特此表示感谢。



436344

目 录

第一章 绪 论

1.1 有限元分析的一般过程	1
1.2 有限元的位移法	2
1.3 有限元程序结构	7
1.4 变量命名法	9

第二章 单元的组集和刚度方程的解法

2.1 一维轴向载荷杆件的单元组集	11
2.2 二维等参元的单元组集	13
2.3 单元组集的FORTRAN程序——子程序ASSEMB	15
2.4 方程组的解法	19
2.5 对称矩阵和带状矩阵	30

第三章 输入与输出

3.1 绪 言	32
3.2 输入数据	33
3.3 控制数据	33
3.4 几何数据	35
3.5 边界条件	36
3.6 材料特性	37
3.7 子程序INPUT	39
3.8 中间节点坐标值的形成	43
3.9 子程序NODEXY	43
3.10 子程序 GAUSSQ	45

第四章 等参梁元

4.1 绪 言	48
4.2 单元的确定	49
4.3 雅可比矩阵	51
4.4 应变的确定	51
4.5 应力——应变关系	52
4.6 刚度矩阵的计算	52
4.7 一致节点力	53

4.8 单元合成应力	53
4.9 数值积分	53
4.10 子程序	55

第五章 平面应力 / 应变的单元特性

5.1 基本理论	75
5.2 形状函数	76
5.3 子程序SFR2	78
5.4 雅可比矩阵和笛卡儿坐标形状函数的导数	81
5.5 子程序 JACOB2	81
5.6 应变矩阵 B	85
5.7 子程序 BMATPS	86
5.8 弹性常数矩阵 D	87
5.9 子程序MODPS	88
5.10 应力矩阵 S	89
5.11 子程序 DBE	90
5.12 单元刚度矩阵	90
5.13 子程序STIFPS	91
5.14 计算单元应力	96
5.15 子程序 STREPS	97

第六章 板的弯曲问题

6.1 基本理论	103
6.2 形状函数和它的笛卡儿坐标导数	106
6.3 应变矩阵 B	107
6.4 子程序BMA TPB	108
6.5 弹性刚度矩阵 D	110
6.6 子程序MODPB	110
6.7 应力矩阵 DB	111
6.8 单元刚度矩阵	112
6.9 子程序 STIFPB	117
6.10 计算单元的应力	117
6.11 子程序 STRFPB	118

第七章 等效节点载荷

7.1 绪 言	122
7.2 平面应力/应变情况下的重力荷载	124
7.3 在平面应力/应变情况下, 作用在单元边界上的单位长度的法向和切向载荷	128
7.4 在平面应力或平面应变条件下固体受热荷载作用	135
7.5 节点载荷和载荷的组合子程序	142
7.6 板弯曲情况的载荷数据	146

第八章 方程解法子程序

8.1 绪 言	152
8.2 波前解法的一般叙述	153
8.3 波前求解程序的预处理段	153
8.4 目标公式, 活动变量和消去变量数组	154
8.5 实际的组合和消去过程	158
8.6 回代阶段	164
8.7 方程再求解的便利条件	166
8.8 波前方法的讨论	166
8.9 波前解法子程序	168

第九章 数据校核和差错诊断

9.1 绪 言	186
9.2 差错诊断子程序CHECK1	187
9.3 数据反映子程序 ECHO	189
9.4 差错诊断子程序CHECK2	190
9.5 差错诊断说明	198
9.6 说明性的例子	199

第十章 程序构造和数值例子

10.1 绪 言	205
10.2 公共区的编制	205
10.3 组合程序	206
10.4 数值例子	213

第一章 绪 论

1.1 有限元分析的一般过程

在本教材里，我们限于讨论线性平衡问题的有限元方法的程序设计，而且，仅详细地叙述结构分析有限元位移法的程序。

为了便于说明，我们简要地回顾一下有限元法。在有限元法中，连续体是被划分成由有限个节点相连接的一系列单元，这个方法，就是大家熟知的离散化。

至少，对于结构上的应用来说，基本平衡方程可由系统的总势能为极小这一条件得出，这个总势能 π 可写成为

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T \epsilon dV - \int_V [\delta]^T p dV - \int_S [\delta]^T q ds \quad (1.1)$$

式中 σ 和 ϵ 分别表示应力向量和应变向量， δ 是任一点的位移向量， p 是每单位体积的体力向量，而 q 是外加表面力向量。积分区域取为结构的整个体积 V 和载荷的表面积 s 。

式 (1.1) 中右边的第一项表示变形能，而第二和第三项分别表示体力和分布表面力的势能。

在有限元位移法中，假设只有节点上的位移是未知的，因而，单元内位移的变化借助于插值函数用节点值来描述。所以，

$$\delta = N \delta^e \quad (1.2)$$

式中 N 是插值函数通常称为形状函数，而 δ^e 是单元的节点位移向量。单元内的应变用单元节点位移表示为

$$\epsilon = B \delta^e \quad (1.3)$$

式中 B 是应变矩阵，其组成元素通常为形状函数的导数。最后，应用弹性矩阵 D ，可把应力和应变的关系表示为

$$\sigma = D \epsilon \quad (1.4)$$

只要适当地选择形状函数，使泛函的被积函数中没有奇异性存在，则把每个单元的势能迭加起来，就可以得到连续体的总势能，因此，

$$\pi = \sum_e \pi_e \quad (1.5)$$

式中 π_e 表示单元 e 的总势能。应用式(1.1)，就能写出

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\delta^e]^T [B]^T D B \delta^e dV - \int_{V_e} [\delta^e]^T [N]^T p dV - \int_{s_e} [\delta^e]^T [N]^T q ds \quad (1.6)$$

式中 V_e 是单元的体积， s_e 是受载单元表面面积。将单元 e 的总势能对于节点位移 δ^e 实行极小化，得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta^e} &= \int_{V_e} ([B]^T D B) \delta^e dV - \int_{V_e} [N]^T p dV - \int_{s_e} [N]^T q ds \\ &= K^e \delta^e - F^e \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\text{式中 } F^e = \int_{V_e} [N]^T p dV + \int_{s_e} [N]^T q ds \quad (1.8)$$

是单元的等效节点力，而

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T D B dV \quad (1.9)$$

称作单元刚度矩阵。对全部单元写出 (1.7) 式，并求各项之和使之等于零，就得出整个连续体系统的平衡方程。然后，求解这些方程可得到节点位移。

对平衡问题，推导有限元解法的基本步骤可归纳为

(一) 将连续体划分成有限个单元。

(二) 计算单元的刚度阵和各载荷项。

(三) 组集单元刚度阵和各载荷项生成总的刚度阵和总载荷向量。

(四) 求解所得到的线性代数方程组确定节点位移。

(五) 再计算其他辅助参量，如位移法中的应力值。

1.2 有限元的位移法

在本教材内自始至终采用等参单元，这是一个慎重的选择。因为，一本教材如果使用各种不同类型的单元将会使读者陷于混乱。

1.2.1 基本的节点变量—广义位移

如果选择位移作为基本未知量，而应力是由计算出的位移场来决定的，这种方法称为位移法。由于它类似于矩阵分析中的位移法，所以工程技术人员比较感兴趣。这种方法的主要步

骤，已在 1.1 节里作了简要的叙述。

另一种方法是将应力作为基本未知量，它类似于矩阵分析中的力法。如果将应力和位移二者同时作为变量，这种方法就叫做混合法或杂交法。在本教材内仅讨论位移法。

通常将所采用的位移变量称为广义位移。因为其分量，从其直接的物理意义来说可能不都是位移。例如，图 1.1 表明情况，在板的弯曲分析中，在第 i 个节点上，除了垂直挠度 W_i 而外，还有在 xz 和 yz 平面内的相应的转角 θ_{xi} 和 θ_{yi} 也被选择来作为位移变量。而节点力必须作相应的选择，它们称为广义力。在结构分析中的基本要求就是广义位移和相应的广义力的乘积必须构成功的单位。

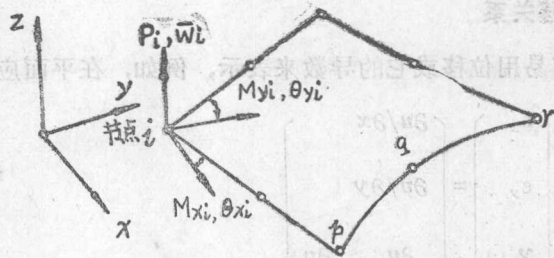


图 1.1 板弯曲单元的广义力和广义位移

广义位移和广义力，对于每个单元可以写成为分块列阵形式：

$$\delta^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} \quad F^e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

这里，假设一个单元具有 n 个节点。例如在板弯曲问题中，(1.10) 式中的元素通常为：

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} W_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad F_i = \begin{Bmatrix} P_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

式中 P_i 是垂直于板的节点荷载， M_{xi} 和 M_{yi} 分别表示作用在 xz 和 yz 平面内的节点力矩，如图 1.1 所示。

对于二维弹性力学问题，广义力和广义位移比较简单，即：

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad F_i = \begin{Bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

式中 u_i , v_i 和 P_{xi} , P_{yi} 分别表示节点位移和节点力的笛卡儿坐标分量。

由(1.2)式，单元内任一点的位移可表示为

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\delta^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \delta_i \quad (1.13)$$

式中

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n] \quad (1.14)$$

而 $\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}$, 这里, \mathbf{I} 是 $r \times r$ 阶单位阵, r 是每个节点变量的数目。函数 N_i , 在节点 i , 其值为 1, 在其余节点 ($j \neq i$) 其值为 0。

1.2.2 应变—位移关系

单元内的应变很容易用位移或它的导数来表示, 例如, 在平面应力的情况下, 应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

将式(1.13)的位移代入, 得到

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta^e = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta_i \quad (1.16)$$

式中

$$\mathbf{B}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

因此, 单元的应变就可借助于应变矩阵 \mathbf{B} 直接用节点位移表示。

1.2.3 本构法则

应力和应变的关系也取决于应力状态。例如对于平面应力情况, 容易证明, 应变可用应力分量表示为

$$\varepsilon_x - \varepsilon_x^0 = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y$$

$$\varepsilon_y - \varepsilon_y^0 = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\gamma}{E}\sigma_x \quad (1.18)$$

$$\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^0 = \frac{2(1+\gamma)}{E}\tau_{xy} \quad (1.18)$$

式中 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 是应力分量, $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ 是初应变, 而 E 和 γ 分别表示弹性模量和泊松比。如将(1.18)式对应力求解, 并用 σ^0 表示初应力, 例如热应力, 则应力向量写成为

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon^0) + \sigma^0 \quad (1.19)$$

式中弹性矩阵 D 为

$$D = \frac{E}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\gamma}{2} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

而 $[\sigma^0]^T = [\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0]$ (1.21)

因此, 由(1.19)式, 通过矩阵 D , 应力就可由应变完全确定。

1.2.4 平衡方程—虚功

考察一个单元的平衡, 其上除节点上作用的力而外, 还受有分布的体力。在平面应力情况下, 这些分布力可以表示为

$$P = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

式中 X 和 Y 是材料单位体积的笛卡儿坐标体力分量。

单元的基本平衡方程, 已在 1.1 节中, 用求泛函极值的方法推导出来。另一种方法是直接应用虚功原理导出, 此时, 还包括初应力和初应变。现考察一个单元, 其上作用有节点力 F^e 和体力 P , 并形成平衡的应力场 σ 。设这个单元有任意节点虚位移 δ_*^e , 形成相容的内部位移和应变分布, 分别为 δ_* 和 ε_* 。于是, 由虚功原理有

$$[\delta_*^e]^T F^e + \int_{V_e} [\delta_*]^T P dV = \int_{V_e} [\varepsilon_*]^T \sigma dV \quad (1.23)$$

其中对整个单元体积求积, 应用(1.13)和(1.16)得出

$$[\delta^e]^T \{ F^e + \int_{V_e} [N]^T P dV \} = [\delta^e]^T \int_{V_e} [B]^T \sigma dV \quad (1.24)$$

因为节点虚位移是任意的，所以对于所有 δ^e 的值，上面的表达式必须成立。因此

$$F^e + \int_{V_e} [N]^T P dV = \int_{V_e} [B]^T \sigma dV \quad (1.25)$$

将(1.19)式的 σ 代入得

$$F^e + \int_{V_e} [N]^T P dV = \left\{ \int_{V_e} [B]^T D B dV \right\} \delta^e - \int_{V_e} [B]^T D \epsilon^0 dV + \int_{V_e} [B]^T \sigma^0 dV \quad (1.26)$$

或

$$F^e + F_p^e + F_{\epsilon^0}^e + F_{\sigma^0}^e = K^e \delta^e \quad (1.27)$$

式中

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T D B dV \quad (1.28)$$

$$F_p^e = \int_{V_e} [N]^T P dV \quad (1.29)$$

$$F_{\epsilon^0}^e = \int_{V_e} [B]^T D \epsilon^0 dV \quad (1.30)$$

$$F_{\sigma^0}^e = \int_{V_e} [B]^T \sigma^0 dV \quad (1.31)$$

应该强调的是，方程(1.23)~(1.27)仅仅考虑的是一个单元。对结构中的全部单元，应分别写出式(1.27)，进行迭加。表达式(1.28)~(1.31)分别定义为单元刚度矩阵，体力的等效节点力、初应变和初应力载荷。可以看出，单元刚度矩阵(1.28)相同于由泛函的方法得到的(1.9)，而体力的节点力表达式(1.29)与(1.8)式中对应的项一致。

正如在1.1节中所指出的，对于整个结构则应将刚度方程(1.27)组集起来，并求解出节点位移。应用方程(1.16)和(1.19)，单元的应力就可由关系式

$$\sigma = D(B\delta^e - \epsilon^0) + \sigma^0 \quad (1.32)$$

得出。单元刚度方程的组集留在第二章作详细地讨论。

1.2.5 边界上的分布载荷

假设单元表面上受到表面力

$$t = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

式中 t_x 和 t_y 分别表示 x 和 y 方向每单位表面面积上的分力。这样，在方程(1.23)的左边增加一项

$$\int_{S_e} [6^*]^T t dS \quad (1.34)$$

(1.34)式中的积分要遍及整个受载单元表面。这就必然在方程(1.27)的左边增加等效节点力 F_i^e ，这里

$$F_i^e = \int_{S_e} [N]^T t dS \quad (1.35)$$

这样就将分布表面载荷作为等效节点力处理。在得到组集的刚度方程之后，已知的位移边界条件是在节点上直接引入给定的值。使用的方法留在第二章和第八章里详细讨论。

1.3 有限元程序结构

本教材提出的程序是采用一种模块化的方法，用独立的子程序来完成各种主要的有限元的运算。图 1.3 表示的是整个的程序结构，安排了子程序的详细的次序。基本的有限元步骤是用主子程序来完成，而依赖辅子程序来完成次要的运算。如图 1.3 所示，一个辅子程序也可以和 2~3 子程序搭配。主子程序的调用次序是由主程序段即主要的程序块控制。每个子程序的功能在本章的后面部分叙述。从图 1.3 可以看出，词尾 B ， PS ， PB 出现在一些子程序名中，它们分别表示梁，平面应力/应变和板的弯曲问题，同样地，用词尾 1 或 2 来区分一维几何情况（梁）和二维问题（平面应力/应变及板弯曲）。

有限元位移法的程序结构自然地分成三段。

第一段 半理论的方面如象输入和输出

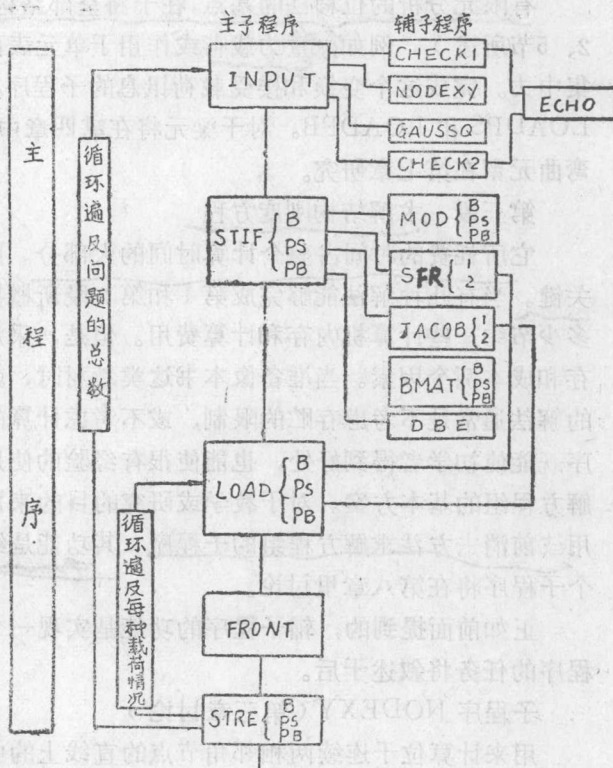


图1.3 程序结构

尽管输入、输出是有限元分析中技术要求最低的方面，但从工程应用的观点来看，输入、输出又是最重要的。

关于控制输入的子程序将在第3章中详细的讨论。数据输入的子程序叫做INPUT(参看图1·3)，而且这段子程序对本书提出的各种单元是相同的。不使用单独的子程序输出结果，而是在结果一旦求得之后就马上把结果输出。位移是在求解方程组的子程序FRONT中输出，而应力分量是在应力计算子程序中输出，对于梁，平面应力/应变和板弯曲情况，其子程序分别为STREB、STRES和STREPB。

第二段 刚度和应力矩阵以及载荷向量的形成

正是在这段中，有限元理论的基本表达式差不多全部都要用上。对结构分析的位移法而言，这个过程明显地是仿效刚架结构矩阵分析所采用的步骤。

在第四章讨论梁元的刚度矩阵和应力矩阵的形成。第五章讨论平面应力、平面应变问题，而在第六章研究板弯曲的情况。形成刚度矩阵和应力矩阵的子程序，对于梁、平面和板弯曲的问题分别称为STIFB、STIFPS和STIFPB。在依次求解节点位移以后，应用应力矩阵可确定应力分量或合成应力，完成这功能的子程序对于梁单元，平面单元，及板单元分别为STREB、STREPS、STREPB。

有限元分析的位移法的基点，在于将全部结构载荷转换成等效节点力(如第1、2、4和1、2、5节所述)。例如重力载荷或作用于单元表面的压力必须变换成等效的作用于节点上的集中力。完成这个变换和接受载荷信息的子程序，对于梁、平面和板元分别是LOADB、LOADPS和LOADPB。对于梁元将在第四章中作详细地叙述，而对于平面应力/应变和板弯曲元留在第七章研究。

第三段 求解结构刚度方程

它所耗费的时间占整个计算时间的大部分。因此，为了求得有效的解答方程组的解法是关键。当有几种解法能够完成第1和第2段所概括的运算时，则其中的最佳方法只不过是能多少节约一些计算机内存和计算费用。但是，采用何种求解方程组的解法，将明显地影响内存和成本两个因素。当准备像本书这类教材时，就会立即出现进退两难的情况。因为最简单的解法通常是不考虑存贮的限制，或不考虑计算的效果或二者都不考虑。我们力图提供的程序既能使初学者得到好处，也能使很有经验的使用者感兴趣。这里，提出了一种用波前法求解方程组的基本方案。对于教学或研究的目的来说，这个程序是适宜的。子程序FRONT是用波前消去方法求解方程组的子程序，其功能是组集单元刚度并求解未知的位移和反力，这个子程序将在第八章里讨论。

正如前面提到的，辅子程序的功能是实现一个或几个主子程序所要求的计算。每个辅子程序的任务将叙述于后。

子程序 NODEXY (第三章讨论)

用来计算位于连续两相邻角节点的直线上的中间节点的坐标。例如，在图1·1中，中间节点 q 是在节点 p 和 r 的线上，则可不必给定节点 q 的坐标，这样可减少数据输入量。这个子程序可以检查确定中间节点的座标是否已经给出，如果没有给出，则可由线性插值函数确定。

子程序 GAUSSQ (第三章讨论)

确定数值积分中高斯积分点的位置和加权系数。

子程序 MODB, MODPS, MODPB (第四, 五和六章讨论) 这些子程序是分别形成梁、平面应力/应变和板弯曲问题的 D 矩阵 (在 1.19 式中定义的)。

子程序 SFR1, SFR2 (第四章和第五章)

对一维和二维情况分别应用这些程序计算形状函数及其对局部坐标的导数。

子程序 JACOB1, JACOB2 (第四和第五章)

对一维和二维情况, 分别用这些子程序计算雅可比矩阵和它的逆阵以及形状函数的笛卡儿坐标导数。

子程序 BMATB, BMATPS, BMATPB (第四、五和六章)

对梁、平面应力/应变和板弯曲问题分别用这些子程序计算应变矩阵 B (由 1.16 式定义的)。

子程序 DBE (第四章)

计算矩阵乘积 DB 以便于确定应力。

子程序 CHECK1 (第九章)

控制参数 (例如每个节点的自由度等) 一经读入子程序 INPUT 中, 子程序 CHECK1¹ 就被调来校核这个数据段。如果发现错误, 立即打印出诊断信息, 而且, 在其功能失效之前, 重复其余的数据。

子程序 CHECK2 (第九章)

其余的数据一经由子程序 INPUT 送入, 就用子程序 CHECK2 校核, 如还有错误由诊断信息发出信号, 并且, 在其功能失效之前重复其余的数据。

子程序 ECHO (第九章)

这个子程序仅在至少有一个错误已由子程序 CHECK1 或 CHECK2 发现之后, 由行式打印机读入其余的数据。

1.4 变量命名法

为了选择好变量的名称, 使所采用的各种变量名称的含意一目了然, 从而有助于读者理解程序解程序输出, 所有变量名称都由 5 个字母组成, 这在简写中有时会引起一些困难。但是, 其优点是使程序表达简练。例如, 如下的变量名称已在程序中采用:

NMATS	不同的材料的数目。
PROPS	材料性能的数组。
NEVAB	单元变量的数目。
NNODE	每个单元的节点数目。
NDOFN	每个节点的自由度数目。

此外, 还将采用“公共字根”原理, 这时, 采用相同的基本变量名, 同时, 按照变量的字头, 特别是:

- (I) 字头 I, J 或 L 用于表示循环变量,
- (II) 字头 K 表示计数,

(III) 字头M表示最大值。

(IV) 字头N表示给定的数。

例如, IPOIN, NPOIN, MPOIN 分别表示某一特定的节点, 该课题所具有的节点数目以及程序所允许的最大节点数目。

同样地, 循环语句的一般形式为

```
KEVAB= 0
DO 1 INODE=1, NNODE
DO 1 IDOFN=1, NDOFN
1 KEVAB=KEVAB+1
```

它表明每个单元的节点数和每个节点的自由度数分别作外循环和内循环标号的范围。字头K使用于 KEVAB 中, 表明为整个单元变量 NEVAB 计数。

控制参数 (例如, 公共自由度数) 一般输入于程序 INPUT 中。子程序 CHECK 就控制参数按这个参数表, 如要打印出诊断信息, 而且, 在其可能失效之前, 重复其余的数据。子程序 CHECKS (第九章) 其余的数据一系于程序 INPUT 输入, 用于程序 CHECKS 表格, 如没有排除由诊断信息输出信号, 并且, 在其可能失效之前重复其余的数据。子程序 CHECK (第九章) 这个子程序仅在一个错误已由子程序 CHECK 或 CHECKS 发现之后, 由程序打印输入数据。

3.4 变量命名法

除了控制参数之外, 程序中的每个变量都按一定的命名法命名。命名法如下: 所有变量名都由6个字母组成, 没有空格, 没有下划线。但是, 某些变量名可以包含下划线, 以便在程序中采用。

- INODE: 每个单元的节点数目。
 - IDOFN: 每个节点的自由度数目。
 - NEVAB: 单元变量的数目。
 - PROPS: 材料性能的数据。
 - INMAT: 不同的材料数目。
- 此外, 还将采用“公共”前缀, 有时, 采用相同的基本变量名, 同时, 按照需要时, 采用“公共”前缀。
- (I) 字头I: 用于表示材料性能。
(II) 字头K: 表示材料性能。

知的单元节点位移向量是

$$\delta^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \delta^{(2)} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad \delta^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

我们使用最小势能原理导出这个问题的刚度方程。每个单元的总势能可单独求得，例如，单元①的总势能可表示为

$$\begin{aligned} \pi^{(1)} &= \frac{1}{2} [\delta^{(1)}]^T \mathbf{K}^{(1)} \delta^{(1)} - [\delta^{(1)}]^T \mathbf{F}^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} [u_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3) + u_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3) \\ &\quad + u_3(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3)] - [A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3] \end{aligned} \quad (2.3)$$

结构的总势能，为每个单元的势能之和，即

$$\pi = \pi^{(1)} + \pi^{(2)} + \pi^{(3)} \quad (2.4)$$

应用最小势能原理，我们得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial u_1} &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 - A_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_2} &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 - A_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_3} &= a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33} + b_{11})u_3 + b_{12}u_4 + b_{13}u_5 - (A_3 + B_1) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_4} &= b_{12}u_3 + b_{22}u_4 + b_{23}u_5 - B_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_5} &= b_{13}u_3 + b_{23}u_4 + (b_{33} + c_{11})u_5 + c_{12}u_6 + c_{13}u_7 - (C_1 + B_3) = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_6} &= c_{12}u_5 + c_{22}u_6 + c_{23}u_7 - c_2 = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial u_7} &= c_{13}u_5 + c_{23}u_6 + c_{33}u_7 - c_3 = 0 \end{aligned} \right\} (2.5)$$

整个组集的平衡方程可用矩阵的形式表示为