



一个数学家应当了解什么是好的数学，
什么是不好的数学或不太好的数学……那么什么是好的数学呢？

比如解方程就是。

像方程这样的数学思想，其价值是永恒的、不断发展的，

所以说它是好的数学。

【美】陈省身

HAO **DE** **SHUXUE**
好的数学

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{i\pi} = -1$$

数的故事

HAO
DE
SHUXUE

好的
数学

数的故事



图书在版编目 (C I P) 数据

好的数学 数的故事 / 韩雪涛著. — 长沙 : 湖南科学技术出版社, 2014. 1

ISBN 978-7-5357-7299-2

I. ①好… II. ①韩… III. ①数—普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 234187 号

好的数学 数的故事

著 者: 韩雪涛

责任编辑: 赵 龙

出版发行: 湖南科学技术出版社

社 址: 长沙市湘雅路 276 号

<http://www.hnstp.com>

邮购联系: 本社直销科 0731-84375808

印 刷: 长沙瑞和印务有限公司

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂 址: 长沙市井湾路 4 号

邮 编: 410004

出版日期: 2014 年 1 月第 1 版第 1 次

开 本: 880mm×1230mm 1/32

印 张: 12

字 数: 290000

书 号: ISBN 978-7-5357-7299-2

定 价: 28.00 元

(版权所有 · 翻印必究)

前言



一提到数学这个词，大多数人头脑里闪现的第一样东西可能就是数，似乎数学就是关于数的学科。这种认识并不准确，因为数仅仅是数学家关心的一类对象，但这种对数学的自然反应却折射出数对于数学的重要性。数，作为日常生活中出现的数量关系的度量，确实是数学最基本的概念。现代数学中的纯粹数学、计算数学都是围绕数的概念建立起来的。毫不夸张地说，数是数学的核心，是一种无处不在的力量，亦是锻造大量称之为数学的原材料。

然而对于什么是数，这样一个看似非常简单的问题，却无法形成一个标准的答案。

在一开始，人们对数的认识仅限于计算个数，对数的了解限于用于计数的自然数。然而后来各种各样的数扩充到这个大家庭中来了。如零、负数、无理数、实数……甚至对哪些有资格被称为数，数是一种真实的存在，还是人的思维创造物，在不同的数学家眼中还存在着争论。

并且，这种对数的概念的不断扩充，在数学上也并非是一蹴而就的事。像许多数学概念那样，事实上数的演进经历了极其漫长、复杂的过程，或由于偶然，或由于需要，或由于稀奇，或由于探索的需求，或只是游刃于某个思维领域。而这种数的扩张也正是贯穿数学历史中的一条明显的红线。

本书正是沿着这条数学发展历史上的明线，在数的世界里做

一番漫游，我们将去追溯历史，去了解关于数的发展的有趣的事情。希望通过这番漫游，能够把数学中的一个侧面即“数”的内容尽可能通俗地、准确地传达给一般读者，使读者对数这一概念有个完整的概括的印象。同时通过这番漫游，能了解：数学是什么？在数学的殿堂中有着什么样的奇珍异宝？数学家是一些什么样的人？在数学发展史上曾发生了哪些迷人的故事？数学的魅力何在？……等等有趣的事情。朋友们，你们可有兴趣去了解这一切？

只要你有足够的了解事物根由的好奇心，足够的耐心与不多的数学知识，那么你从本书获得的回味毫无疑问会远远超出任何一本武侠小说。闲话少说，来，让我们一起踏上遨游数学海洋的小舟，去做一次丰富而有趣的航行吧！

李平涛



目 录

第一章 自然数	1
数的起源	1
数觉	2
迈出第一步：计数	4
一种计量数多少的办法	5
另一种计数的办法	11
抽象数概念的初步形成	14
数字记数法	20
早期记数符号的出现	20
符号的简化：进位制的使用	21
关键的第三步：位值制的使用	30
重要的数	43
数 0	43
数 1	48
形形色色的数的问题	50
算术：数的计算	50
数论	56
数论萌芽	56
近代与现代数论	63
数的神秘意义与数字的迷信	65
小结	72
第二章 分数	79
分数的产生	79
分数的记法	85

分数的运算	87
几类特殊分数	91
埃及分数	91
小数	94
近似分数	98
加成法	99
连分数法	102
小结	109
第三章 负数	113
负数的产生	113
负数的运算	128
小结	131
第四章 无理数	135
无理数的诞生与第一次数学危机	135
无理数的解决方案	140
无理数地位的初步确立	147
庞大的无理数家族	150
代数数	150
超越数	154
几个特殊的无理数	157
无理数 $\sqrt{2}$	157
自己动手求近似值的一种方法	159
$\sqrt{2}$ 的连分数表示	159
$\sqrt{2}$ 与纸张	161
圆周率 π	162
圆周率的计算历程	163
π 的其他计算方法：蒲丰投针实验及其他	174
圆周率 π 与美	176
数 e	179
黄金分割数	181

小结	188
第五章 实数	192
实数理论的建立	192
无理数严格定义的建立	192
戴德金的实数理论	193
公理化思想	198
有理数的理论	202
整数理论	204
自然数的理论	205
实数琐谈	208
实数的分类与性质	208
实数的逼近	211
实数的实在性	213
离散与连续	215
无限之谜	216
换角度看数系的推广	221
小结	227
第六章 复数	229
序曲：一元三次方程的故事	230
复数的引入	236
复数地位的确立	251
复数直观意义的建立	253
看待复数的另一种方式	259
最美的公式	260
小结	265
第七章 四元数	269
关于型的永恒性的代数基础	270
四元数的产生	274
四元数的性质	277
从四元数到向量	279
从四元数到超复数	280

数学的客观性	284
代数结构观点的形成:	287
从代数结构的观点来看数的推广:	294
小结	304
第八章 超限数	307
康托尔与他的集合论	307
再谈无限之谜	315
康托尔对无穷大的新见解	320
比较数集的大小	321
构造性与存在性	327
步入超穷数王国	329
小结	337
第九章 数系巡礼	342
数系拓展中的几个问题	343
数学发展的非逻辑性	343
数学发展的动力	350
数系扩展中的态度	355
不同数学态度的根源	358
数学的特点	362
抽象性	363
精确性	364
应用的广泛性	368
参考文献	370

第一章 自然数

当我们开始数的漫游时，我们应该从何处开始我们的航行呢？

大概没有比从自然数开始再自然不过的了。有些读者或许会产生这样的疑问：我们在幼儿园甚至早在刚学会说话后就已经会数 1、2、3……；到小学时，我们已能用 1、2、3……这样的数字来记数，并进行加、减、乘、除四则运算了。对于我们已如此熟悉的数，对于这些再容易不过的事情，还有必要为它们耽误我们的航行吗？确实，在当代社会，孩提时代就已获得数的观念，它显得如此“自然”，以致于它的使用已成为无意识的事情了。然而当我们从最简单的 1、2、3 开始，一同走过这段旅程后，或许你会惊讶地发现：自然数的产生竟有着极其漫长且曲折的历史，自然数的园地亦是一片既熟悉却又很陌生的土地呢！

让我们启程吧！

数的起源

人类究竟在何时和怎样才产生出数的概念的？如果要讲述这个关于数的起源的故事，那么“在很久很久很久以前……”这样的开头对于我们要讲的故事来说是再恰当不过的了。数的产生，



是从离开我们极其遥远的人类生存时期开始的。那个时期未曾留下任何书面的文献，因为数的概念在人类发明文字——这一记录人类自己思想的符号——之前很早就产生了。数学史家一般都从以下几个方面考察数学的起源和早期发展：

1. 考古工作中挖掘的古代人类的遗物，如劳动工具，建筑，生活用具等；
2. 现存的原始部落的日常生活、语言；
3. 各民族语言发展的历史和它们之间的比较研究。

借助于此，对数的概念的起源，我们就能形成一个大致轮廓了。对于大多数读者来说，了解这样一个大概也就可以了。下面我们做的就是去了解人类是怎样逐渐一步步地获得了数的最初知识的。

数 觉

人类之所以能够产生数的观念，首先，是由于人类即使在最古老的年代，也已经有了某种对数的朦胧意识。比如说人能够区分有与没有的差别；此外当在一个小的集合中，增添或者去掉东西时，人能够觉察到其中有所变化，会意识到是“多了”或是“少了”。这种觉察数之有无与数之多少的能力，被数学史家称为“数觉”。可以相信，早在进化的蒙昧时期，人类就已经具有这种能力了。

其实，有实例表明若干种动物看来也具有一种与人类相类似的原始数觉。如，在有些鸟类的鸟巢中若是有四个蛋，那么你可以放心地拿去一个，鸟没有觉察；但是如果拿掉两个，这鸟通常就要逃走了。鸟会用某种奇怪的方法来辨别二和三。

下面这一则有趣的故事能够更好地说明鸟所具有的这种

本领。

有个田主决心要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦。他试了好多次想惊动它，始终没有成功：因为人一走近，乌鸦就离开了巢，飞走了。它会栖在远远的树上守着，等到人离开了望楼，才肯飞回巢去。有一天，这田主定下了一个计策：两个人走进望楼，一个留着，一个出来走开了。但是乌鸦并不上当：它老等着，直到留在望楼里的人也走了出来才作罢。这个试验一连作了几天：两个人，三个人，四个人，都没有成功。末了，用了五个人：也像以前一样，先都进了望楼，留一个在里面，其他四人走出来，离开了。这次乌鸦却数不清了；它不能辨别四与五，马上就飞回巢里去了。

至于这只乌鸦的结局如何可就不言而喻了。

现在我们所要说的是，我们的远祖是具有这种数觉的智力水平的。不过辨别数目时，如果仅靠数觉，其范围是十分有限的。一个论据是：许多语言几乎都带有这种早期局限性的痕迹。如英文的 *thrice* 和拉丁文的 *ter*，都同样的有双重意义：三倍和许多。而我们古汉语中的“三”不也常泛指多吗？其实，我们现代人在数觉方面也不过如此，并无明显进步。有精密的实验结果证实：普通文明人的直接视觉数觉，很少能超过四，至于触觉数觉，范围甚至还要小些。

说到这里，你或许已开始觉得这种数觉有些幼稚的可笑，而具有这种数觉的能力也实在不是一件什么大不了的事情。确实，这在现代人看来，是那么的微不足道。可是，这毕竟是一个好的起点。在没有数的概念之前，人的这种朦朦胧胧的数觉或数的意识，是认识的第一步。正是这种比鸟类高明不了多少的原始数觉，奠定了人类产生数这一概念的基础。如果没有这种基本的数觉，会怎么样呢？答案很简单：如果没有这种简单的数觉，那么人类就根本不可能产生出后来的数的概念。当然了，如果人类只



有这种数觉的话，在对数的概念的认识上，也就不会比鸟类有什么进步了。

让我们现代人感到庆幸的是，在一连串内在的与外在的特殊条件影响下，人类在数觉之外，学会了另一种技巧，这种技巧注定了使他们未来的生活受到巨大的影响。这技巧就是计数，并且，正是由于有了计数，我们赢得了用数来表达我们的宇宙的惊人成就。下面我们所要叙述的就是这种技巧的形成。

迈出第一步：计数

在了解人类迈出的第一步之前，先让我们简单看一下当时我们的远祖已经具备了哪些有利的条件。

先看内在条件。前面我们已经提到过人类的数觉能力，这当然是人产生数概念的第一个基本条件。另外，这种时候人类已经能够直立行走。可不要小瞧这一点，后面我们将会看到在数的概念形成中，直立行走，从而解放出双手是人类能够产生出数的概念的一个重要方面。

在外在的条件方面。人类社会正处于原始社会。在早期生产力非常低下。人们每天外出狩猎以维持生存。很可能经常空手而回不足果腹。但随着生产力的提高，带回的食物可能会多少有了点富余，也就慢慢地出现了剩余物。

在生活中这种数与量的变化的影响下，人类借助于原始的数觉，开始逐渐形成“无”与“有”的区别。这是人类最早形成的数学概念。当“有”经常出现时，人类认识到不同数量的差别，于是有了“多”与“少”的数学概念。在认识“多”与“少”的差别的过程中，人类迈出的第一步大概是知道了“一”和“多”的不同。从多中，首先分出“一”，很可能是经过了非常困难的

阶段才作出的。而这一过程究竟发生在人类何种阶段，恐怕也不是一个容易回答的问题了。曾有人把这种分出解释为，人通常总用一只手拿一件物品，这便把一从多中分了出来。事情是否真得如此不是我们这本书中所要阐述的了。我们需要了解的是任何概念的产生都有赖于在朦胧中划一条界限。没有1的概念就没有数的概念，把1从混沌一片中解放出来，这是数的认识的开端。不过，这时除1之外的那些数还是一个模糊的“多”，或者可看成是一个简单的否定——非一。也就是说，在计数的开端首先建立了一和不确定得多（或非一）这两个概念。大概又经过了很长的时间，原始民族才又从多中区别出2、3等不同的数。对于很多原始民族来说，对“多”所做出的区分到很小的数就停止了，他们从所谓的“多”中区分中的无非是前面几个数而已，大概多于三个的时候就不算多吧。如南非布须曼族，只知1、2、多；澳大利亚土人有的可以数到4；再好些的到5、6。剩下的就进入不加区分的混沌一片了。实际上，许多原始民族用于数的单独的名称只有1和2，间或也有3，超过这几个数时，便说“许多，很多，太多”。

但是，对于另外一些民族来说，随着其生产力水平的提高，较大的数目在生产、生活中越来越多的出现。在这种背景下，这些民族开始形成一种新的技巧：计数。

一种计量数多少的办法

事实上，人们在想出数之前很久就已经以艰难而辛苦的方法进行着计数了。因为说来可能有些奇怪，人们根本不用数字也能够计数。许多古代的计数趣闻正可以反映出这一点。

在大约公元前9至前8世纪，著名的《荷马史诗》中记载着一个故事：俄底修斯刺瞎了独眼巨人波吕斐摩斯并离开了库克罗



普斯国，不幸的盲目巨人每天坐在山洞口照料他的羊群。早晨羊儿外出吃草，每出来一只，他就在一堆石子中捡起一粒石子。晚上羊儿返回山洞，每进去一只，他就扔掉一粒石子。当他把早晨捡起的石子都扔光时，他就确信所有的羊全返回了山洞。

在人类的计数史上，“巨人数羊”现在看来是趣闻的故事，在当时，却是人类智慧的结晶呢。这里所用的办法被称为一一对应的方法。其方法是将一个集合中的每一事物和另一个集合中的每一事物相对应，一个对一个，直到某一集合或两个集合中的事物同时配完为止。通过这种方法能够让我们甚至在不知道事物的具体数目的情况下，明了两类事物的多少关系。如果某一集合的事物先配完，那么说明它的数目少于另一个集合的数目；如果两个集合的事物同时配完，那么说明两个集合有着相同的元素。

其实，这种办法在现在我们也在经常使用着。

比如，设想我们现在走进一个教室。在我们面前有两个集合：一个是座位，一个是人。我们不用计数，就可以知道这两个集合是否相等，如果不相等，哪个多些。因为要是所有的座位都坐满了人，同时没有人站着，我们不用计数就知道两个集合相等。要是座位已经满了，而仍有人站着，我们不用计数就知道人多而座位少了。

古代人最早大概就是采用这种方法来计数的。当他们猎取到比如说一些野兔，他们就近取材，发现这些野兔的数目恰好可以与一个人的耳朵一一对应起来。于是，他们就可以用“有像我的耳朵那么多”这样的话来说明野兔的数目。如果下一次猎取的野猪也恰有这么多，他们同样可以用“有像我的耳朵那么多”这样的话来表示野猪的数目。慢慢地，“有像我的耳朵那么多”这样的话可能被简略成“人的耳朵”这样的说法。进一步，“人的耳朵”后来就成了一个可以代表某一数目的代表性集合。只要一些物品的数目恰好是我们所熟知的2，那么原始人就可以说有“人

的耳朵”那么多。当然，物品的数目不可能总是2，当出现其他数目的物品时，他们只需要采用同样的方法，找其他的一个代表集合就是了，用不同的代表集合来代表不同的数目。比如说表示数四时，就说“像牲口的脚那么多”。这样，对不同的数目找到不同的代表集合，较少数目的计数问题就解决了。原始人类恐怕就是这样做的吧。他们先是用人和动物的身体部分作为对一些物品的口头表达。而慢慢地，这些叙述的语句又被相应的简称所代替。就这样，代表集合的语句以及其简称被用来称呼数的数目，如说“有耳朵一样多”，或者简单说“耳朵”。再往后，这些名称便作为数字的称呼而巩固下来。于是，人们开始用词“耳朵”或“手”或“翅膀”等表示我们更熟悉的数字2；用“兽足”表示我们熟悉的数字4，或者“手指”来表示数字5等等。到后来，这种读音固定下来，就成为抽象数的读音。这大概正是部分数字读音的由来吧。这种推测，可以从语言学中得到部分证实。据研究，汉语中“二”的读音就源于“耳”，意思是像耳朵一样多。藏语中的“二”源于“翼”，意思是像鸟的翅膀一样多。

在这一时期，原始人有了许多不同的代表集合来表示不同的数目。等到人们要算某一事物的个数时，只需要在这些代表集合中，把能和它匹配的那一个代表集合找出来并用相应的语句或其简称来表达就行了。

运用这种方法，原始人就能够（当然是在小的范围内）回答“物体有多少个”这一问题了。不过，这种回答并不如同我们现在的回答方式，如说某物有2个、5个等等。因为那时人们对数的理解还没有达到这一步。在他们的意识中数是十分具体、十分形象的，它既不能同量分开，也不能同形分开，也就是说，只有同量和形结合在一起，必须依附着所指的物体，他们才能懂得数。在这一时期当提及二、五时，人们脑海中浮现出的是与之对照的实物：人的耳朵、手指之类。这种时候人们对数的认识还是



非常具体的，是与实物相联系的。

用一些代表集合来表示数目，是原始人计数史上的一大进步。这意味着人类在形成数的概念上完成了第一次抽象。不过，用这种方法毕竟存在着一些不足：首先，这种办法并不要求数目按照从小到大的次序排列，因而这些用来表示数目的代表集合完全可能是乱七八糟堆放在一起，毫无次序的；其次，由于代表集合是如此具体与混杂，利用这种办法，想抽象出数的概念是不可能的；再次，当需要计的数目比较大时，这种办法即使不说失效，也可以说显得极其笨拙。而恰恰随着生产、生活的需要，较大的数目越来越多的出现。于是，建立在同样原则上的一种解决问题的办法被原始人类使用了。

这种方案有着同样的简单性，就是选取代表集合时，不再用没有关联的不同实物来表示，而是用同一种事物的不同数目来表示。如一块石头来作为数目1的代表集合；两块石头来作为数目2的代表集合；三块石头作为数目3的代表集合等等。这种事物也可以取其他的東西来替代，人们习惯上是就近取材的。石子、竹片、树枝、贝壳之类都曾被不同的民族用来作为计数的实物。

用这种办法计数，可以找到一些实例。如在马来亚语和阿兹特克语中，数词“一”、“二”、“三”在字面上指的是“一块石头”、“两块石头”、“三块石头”；在南太平洋纽埃岛人的语言中，这三个数词在字面上的意思则是“一个果子”、“两个果子”、“三个果子”；而爪哇语中这三个词的意思则是“一颗谷粒”、“两颗谷粒”、“三颗谷粒。”

用石头、贝壳之类东西计数的好处是容易找到。但是也存在一些问题：其一是这些东西容易散乱；其二是无法长久地保留。为了解决这类缺点，后来人们开始采取结绳的方式来计数。这就是历史上的结绳计数。所谓结绳就是在一条绳上打上结，在这种计数方式的完善中，人们又曾用不种颜色的结来表示出不同的