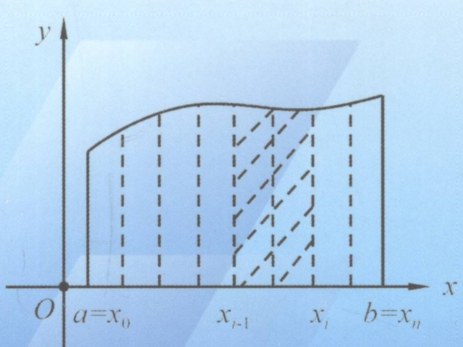
首都师范大学初等教育学院组织编写

$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_4, \cdots$

CALCULUS FOR ELEMENTARY TEACHERS

为教师的微积分

郜舒竹　编著



首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

为教师的微积分

Calculus For Elementary Teachers

首都师范大学初等教育学院组织编写

郜舒竹　编著

首都师范大学出版社
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

为教师的微积分 / 郜舒竹编著. —北京：首都师范大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5656-0835-3

Ⅰ.①为…　Ⅱ.①郜…　Ⅲ.①微积分—师范大学—教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 144011 号

WEI JIAOSHI DE WEIJIFEN
为教师的微积分
郜舒竹　编著

责任编辑　孙志强
首都师范大学出版社出版发行
地　址　北京西三环北路 105 号
邮　编　100048
电　话　68418523(总编室)　68982468(发行部)
网　址　www.cnupn.com.cn
北京集惠印刷有限责任公司
全国新华书店发行
版　次　2012 年 7 月第 1 版
印　次　2012 年 7 月第 1 次印刷
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　14
字　数　254 千
定　价　28.00 元

前　言

本书是为本专科小学教育专业编写的数学教材，其目的在于使得未来小学教师了解微积分的基本思想和基本方法，沟通小学数学、中学数学课程内容与微积分的联系，进而加深对小学数学和中学数学课程内容的理解. 长期以来，在小学教育专业的课程设置中一直存在着"拼盘"现象，也就是多数课程都是从其他已有专业"借"来之后"拼凑"而成的，缺乏具有小学教师自身特点的专业课程.

按照通常的理解，小学教师的知识结构中应当包括四个方面的知识：第一是诸如数学、语文这样的学科知识（本体型知识，英译为 Subject Matter Knowledge）；第二是与教与学有关的知识（条件型知识，英译为 Conditional Knowledge），包括教育学、心理学以及教学法等；第三是关于自然科学、社会科学以及人文方面的知识（通识型知识，英译为 General Knowledge 或 Liberal Knowledge）；第四是通过个人实践和反思获得的知识（经验型知识或反思型知识，英译为 Experience Knowledge 或 Reflective Knowledge）.

需要注意的是这四类知识并不是以"拼盘"形式存在于头脑中的，而应当是相互关联、融会贯通的. 因此可以归纳出小学教师知识的特征，除了"正确性"之外，还应当包括"解释性"和"融通性". 以微积分课程为例，在数学专业的微积分课程强调的是严谨的逻辑，工科专业则强调计算和应用，而在小学教育专业则应当强调微积分历史发展中蕴含的文化因素，以及这些内容与中小学数学之间的联系，使得未来教师能够用更高的观点看待小学数学的课程内容. 本书就是按照这种思想编写的，之所以命名为"为教师的微积分"，就是力图与其他专业微积分课程有所区别，充分体现小学教育专业的专业特征.

全书共分 5 章，基本上涵盖了一元函数微积分的核心内容，内容编排突破了传统的"先导数，后积分"的编排顺序，而是将二者"融为"一体，把导数和积分看为一个问题的两个方面，就像小学数学中可以将加法和减法同时进行认识一样. 书中部分内容参考了相关文献，凡重要引用都在当页以脚注形式注明.

首都师范大学初等教育学院的五位研究生：范素杰、李硕琦、王海娇、徐蕾、郑丽丽为本书的资料整理和编写工作付出了辛勤的劳动. 另外九位研究生：陈阳、郝红蕾、庞雪兰、孙婷婷、王明珠、王少华、向飞、杨洋、周璇为本书初稿作了审读和校对工作，在此一并表示衷心感谢.

本书无论在选材和编排方面都是一种尝试，疏漏、不当甚至错误或许存在，期望读者提出批评指正，以期使之完善.

郜舒竹

2012 年 2 月

于北京

目　　录

第一章 函数与极限

第一节 函数与极限的初步认识

一、运动的眼光

运动的眼光是相对于静态而言的. 例如小学阶段求长方形面积的教学方法是把边长为 1 的小正方形往长方形里面摆，数有多少个小正方形，则此长方形面积为几(见图 1.1). 如果用运动的眼光看(见图 1.2)，可以把长方形看成是一条线段沿着垂直于这条直线的方向平移得到的图形. 这样长方形的面积就可以看成是长方形的一条边 a 沿其邻边 b 匀速划过的轨迹，a 的长度可以看成是线段运动的速度 v，b 即 a 运动的时间 t，时间 t 是一个持续变化的量，即 x，已知运动学中路程 $s=vt$，得到 $s=ax$，x 的取值范围从 0 到 b，当 $x=b$ 时，则可用运动思想得知长方形面积 $S=ab$.

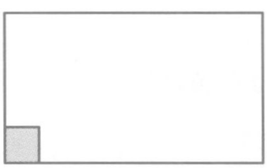


图 1.1

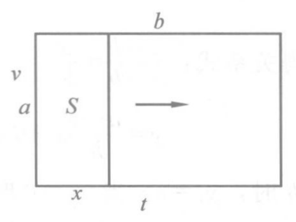


图 1.2

运动的思想体现了函数的思想，把速度和路程看成是 x 的函数，求路程就要找到运动的速度与时间之间的关系. 当边长作为速度时，重点是找到时间，即自变量. 如求三角形的面积，要找到底边(速度)y 与高(时间)h 之间的关系. 下面通过几个求积问题进一步体会运动的思想.

例 1.1 如图 1.3 所示，$\triangle ABC$ 中，底边 BC 垂直于 AD，并向上运动至 A 点. 起始速度为 a，匀减速至速度为 0，求 BC 在运动过程中所经过的路程.

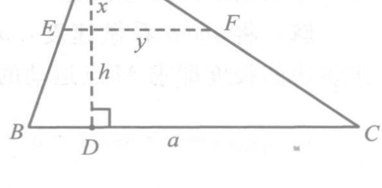


图 1.3

解：由$\frac{y}{a}=\frac{x}{h}$推出$y=\frac{a}{h}x$，其中$x\in[h,0]$.

将x看做时间，y看做BC运行的速度.

由位移公式$s=v_0t+\frac{1}{2}mt^2$，其中m是物体运动中的加速度.

由于加速度是未知的，因而使用物体的平均速度来计算其运行的路程.

由$y=\frac{a}{h}x$，其中$x\in[h,0]$. 当$x_1=h$时，$y_1=a$；当$x_2=0$时，$y_2=0$.

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{a}{2}$$

$$s=yh=\frac{1}{2}ah$$

由此可知
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$$

例 1.2 如图 1.4 所示，梯形$ABCD$，下底为a，上底为b，高为h. a以垂直于h、指向b的方向做匀减速运动. 其运动时间为x，速度为y. 求y与x的关系及a到b所经过的路程.

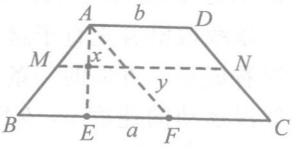


图 1.4

解：过点A做边CD的平行线与底边BC交于F点.

由图可得关系式：$\frac{y-b}{a-b}=\frac{x}{h}$

$$y=\frac{a-b}{h}x+b，其中 x\in[h,0]$$

当$x_1=h$时，$y_1=a$；当$x_2=0$时，$y_2=b$.

平均速度
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2}(a+b)$$

$$s=yh=\frac{1}{2}(a+b)h$$

由此可知
$$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$$

例 1.3 如图 1.5 所示，动点M沿斜边匀速向上运动，求三角形的斜边长度.

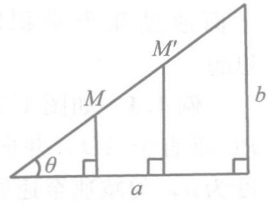


图 1.5

解：将$\sec\theta$看做速度，a边即M点运动的时间，求斜边的长度即求M点运动的路程，即

$$s_{M走过的路程}=a\cdot\sec\theta=a\cdot\sqrt{1+\tan^2\theta}=a\cdot\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}$$

用运动的眼光看待几何图形，则求积问题就变成了寻求路程、速度和时间三个量之间关系的问题. 这就是牛顿“流数法”的基本思路.

二、奇特的函数

函数的形式不尽相同，以下这三个奇特的函数就有着各自的独特之处.

(一) 取整函数

$$y=f(x)=[x],\ x\in(-\infty,\ +\infty)$$

符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 此函数的图形如图 1.6 所示.

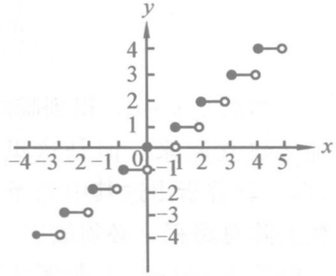


图 1.6

从这个函数的图像可以看出，取整函数是跳跃的、断开的、逐步上升的，数学家发明这个函数是为了说明函数可以是间断的，而且可以有无限多个间断点.

(二)绝对值函数

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

此函数图像如图 1.7 所示.

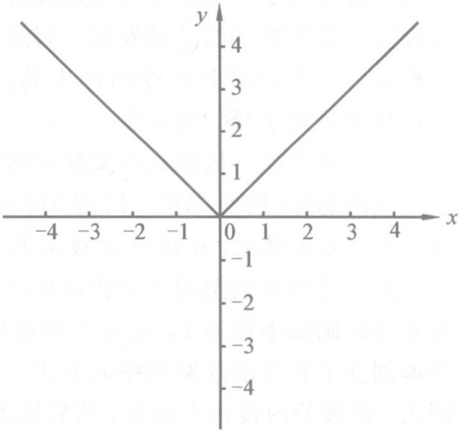


图 1.7

绝对值函数图像的特殊之处在于 $x=0$ 这一点上，这个函数在整个定义域上是连续的，但是在 $x=0$ 处有个“尖”，它的单调性突然发生了变化，在后面的章节中会继续学习到这个点，我们叫它“拐点”，函数在这一点上不可导，具体的证明到后面再进行详细的学习.

(三)狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{是有理数}\\ 0, & x\ \text{是无理数}\end{cases}$$

狄利克雷(Dirichlet，1806—1859)函数说明了一个很重要的问题——函数的图像并不是都可以画出来，而且实轴上的任意一点都可能是间断的，即此函数的自变量可以认为是连续量，而此函数的因变量则显然不是连续量. 因为在数轴上，无理数是随处都存在的，那么这个图像根本画不出来. 读者还可以考虑一个问题，有理数加上一个有理数肯定得到一个有理数，一个有理数加上一个无理数得到一个无理数，那么一个无理数加上一个无理数的结果是无理数还是有理数?

三、极限问题的提出

早在17世纪时，牛顿曾经把连续量称为流量，把变化率称为流数，把自变量理解为时间. 例如自由落体运动中，即把路程看做流量，流数就是瞬时速度. 用符号表示牛顿推导流数的方法是：对自由落体的运动规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$，给时间 t 一个微小的改变 h(他称之为“瞬”—moment)，则平均速度为

$$\frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{h}=gt+\frac{1}{2}gh$$

然后令 $h=0$，得到瞬时速度为 gt. 根据类似的推导，微积分的演算系统也随之建立起来. 但是这里的瞬 h 究竟是什么呢？贝克莱(Berkeley，1685—1753)就曾指出这其中的矛盾错误. 因为在计算平均速度时，需要用 h 作为除数去除总路程，必须假设 $h\neq0$，但是最后为了得到瞬时速度，又必须令 $h=0$，才能算出 $v=gt$. h 非零又是零，h 到底是什么？这个矛盾由此产生，数学家对此困惑了很长时间. 达朗贝尔指出要想说清楚这点，必须用极限的思想，但在当时他并没有把它说清楚. 直到19世纪，柯西才真正用极限的概念把这个问题基本解释清楚，魏尔斯特拉斯最终用 $\varepsilon-\delta$ 的语言，彻底解决了这个难题，从而推动了近代数学的蓬勃发展. 因此可以说，极限是当人们需要求非匀速运动过程中某一点的瞬时速度而产生的，匀速运动不需要求极限，而变速运动需要，这里体现了“瞬”的特点.

在中国古代，极限观在文献中就有记载，其中最著名的是《庄子·天下篇》中记载的惠施(约前370— 约前310)的一段话：“一尺之锤，日取其半，万世不竭.”①公元3世纪，中国著名数学家刘徽(263年左右)成功地把极限思想应用于实践，其中最典型的方法就是在计算圆的面积时建立的“割圆术”. 由于刘徽所采用的圆的半径为1，这样圆的面积在数值上即等于圆周率 π，所以说刘徽成功地创立了科学的求圆周率的方法. 刘徽采用的具体做法是：在半径为一尺的圆内，作圆的内接正六边形，然后逐渐倍增边数，依次算出内接正六边形、正十二边形、…、直至 6×25 (192)边形的面积. 他利用公式 $S_{2n}=n\cdot\frac{r\cdot l_n}{2}$($l_n$ 为内接正 n 边形的边长，S_{2n} 为内接 $2n$ 边形的面积)来求正多边形的面积. 刘徽认为，割得越细，多边形的边数越多，圆内接正多边形的面积与圆的面积之差越小，而内接正多边形与圆周之间存在的空隙当多边形的边数不断加倍时被逐渐“穷竭”，即“割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆和体，而

① 杜瑞芝. 数学史辞典[Z]. 济南：山东教育出版社，2000.

无所失矣”．这就是“割圆术”方法中所反映的极限思想，是我国古代数学思想史上的重大成果之一．战国时期，墨家用“超越”定义无穷．极限即无穷与无限．极限是一个变化的无限逼近的趋势．

在推导图形面积公式时，把未知的问题转化为已知的问题是常用的思想方法．那么求圆的面积主要难在哪里呢？因为圆是曲边，由于圆的形状的特殊性，导致圆的面积较其他多边形较难求出．在历史上求圆的面积主要有两种方法．

第一种方法，作圆内接正多边形，化未知为已知，“化曲为直”用直线逼近、代替曲线是推导圆面积公式的基本思想，即刘徽的“割圆术”．用这种方法推导圆面积公式的过程中渗透着无穷与无限的“极限”思想．

例 1.4　作圆内接正 n 边形，先求正 n 边形的面积，从而推导圆面积公式．

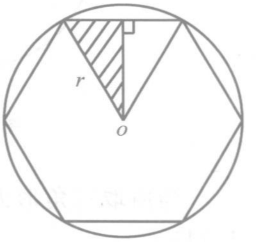


图　1.8

解： $S_{阴}=底\times高\times\frac{1}{2}$

$$=r\times\sin\frac{\pi}{n}\times r\times\cos\frac{\pi}{n}\times\frac{1}{2}$$

$$S_{正n边形}=n\times2\times\frac{1}{2}\times r\times\sin\frac{\pi}{n}\times r\times\cos\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

当 n 无限大时，用极限思想思考下面的单位圆中：

$\sin\theta$ 相当于 θ 对边，θ 相当于 θ 所对的弧长．

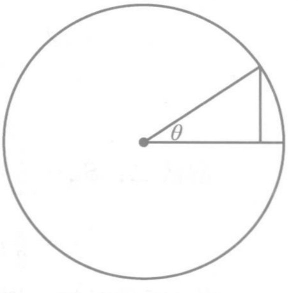


图　1.9

当 $n\to\infty$ 时，$\theta\to0$，此时直观上可以看出，θ 的对边与弧长趋于相等，即 $\frac{\sin\theta}{\theta}\to1$．

将 $n\frac{\sin 2\pi}{n}$ 变形，即 $n\frac{\sin 2\pi}{n}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times2\pi$

随着 n 的增大，$\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\to1$

因此，当 $n\to\infty$ 时，　$n\frac{\sin 2\pi}{n}\to2\pi$

$$\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}\to\pi r^2$$

即圆面积公式为　$S=\pi r^2$

注：$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$ 是一个重要极限，具体的证明过程讲解将在本章第四节加以阐释.

第二种方法，将圆看成是运动而来的，这种运动分为两种：旋转扫过运动和扩充运动. 从运动的角度求圆的面积公式：

(1)旋转法(见图 1.10)

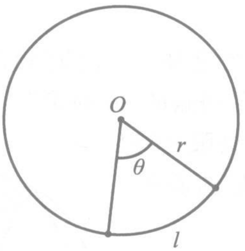


图　1.10

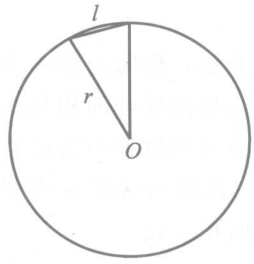


图　1.11

当所取三角形无限小的时候，可以将三角形近似地看成直角三角形(见图 1.11).

解法一：$S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}lr$

将 l 看做时间，把面积 S 看成路程 s，则有

$$v=\frac{s}{t}=\frac{S}{l}=\frac{\frac{1}{2}lr}{l}=\frac{1}{2}r$$

$$s_{\text{路}}=v\cdot t_{\text{圈}}=\frac{1}{2}r\cdot 2\pi r=\pi r^2$$

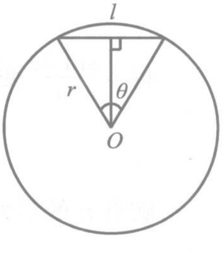


图　1.12

解法二：$S_{\text{扇}}=\dfrac{1}{2}r\times\sin\dfrac{\theta}{2}\times r\times\cos\dfrac{\theta}{2}\times 2$

$=\dfrac{1}{2}r^2\times\sin\theta$

将 θ 看做时间，把面积 S 看成路程 s，则有

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin\theta}{\theta}$$

当 θ 趋近于 0 时，可看成$\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$，所以

$$v=\frac{1}{2}r^2$$

$$s_{\text{路}}=v\cdot t_{\text{圈}}=\frac{1}{2}r^2\cdot 2\pi=\pi r^2$$

由以上解法可以看出，用运动的眼光看圆，可以把弧长作为时间变量，也可以把角作为时间变量. 根据所取时间的参数不同，方法可以分为两种. 所谓参数方程，实际上就是改变自变量，很多问题中自变量的选择不唯一. 这两种方法的思维方式不一样，也是根据这两种思维方法，牛顿提出了新的思维方式，将微积分与运动力学结合起来.

(2)扩散法(见图 1.13)

将圆看成由一个点不断扩散而成的图形，即设周长为 y，半径为 x，把周长看成速度 v，把半径看成时间 t，则

$$y=2\pi x$$

当 $x=0$，$y=0$ 时，$\bar{y}=\pi r$；

当 $x=r$，$y=2\pi r$ 时，$S=\bar{y}\cdot r=\pi r^2$.

从这个实例可以看出运用运动的方法来求面积要比静态方法拥有更多的选择路径.

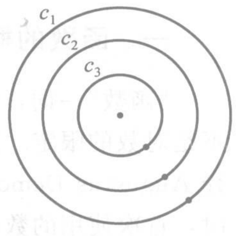


图 1.13

例 1.5　用运动的观点求圆的周长.

解：如图 1.14 所示：把圆 n 等分，弦长 $s=\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot r\cdot 2$

将 θ 看做时间，则有

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot r\cdot 2}{\theta}=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot r}{\dfrac{\theta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}r$$

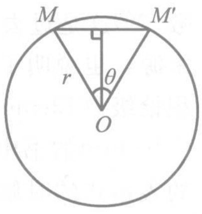


图 1.14

当 $\theta\to 0$ 时，$\dfrac{\sin\theta}{\theta}\to 1$，$\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\to 1$，$v\to r$

因此，$s_{路}=v\cdot t=r\cdot 2\pi=2\pi r$，即 $c=2\pi r$.

求圆的周长在这里借用了以直代曲以及无限分割的极限思想.

习题 1.1

1. 试用多种方法证明圆的面积公式：$S=\pi r^2$.
2. 试用多种方法证明圆台的体积公式：$V=\dfrac{\pi h}{3}(a^2+b^2+ab)$

   (其中 a 为上底面圆半径，b 为下底面圆半径，h 为圆台的高).
3. 设一矩形面积为 A，试将周长 c 表示为宽 x 的函数.
4. 举例说明运动的思想与静态思想的区别.
5. 用运动的思想证明勾股定理，并与静态方法作比较.
6. 用运动的观点求面积，与静态的方法有什么区别？

7. 用运动的思想求体积，与静态的方法有什么区别？

8. 用运动的思想如何求周长？

9. 为什么会出现极限的概念？

第二节　函数的概念及性质

一、函数的概念

“函数”一词，表面看是用“函”限定“数”．但其数学意义并不是指称数，也不是对数的限定．这一词汇是清代著名学者李善兰（1811－1882）在1859年翻译Augustus Demorgan所著的《代数学原理》(The Elements of Algebra)一书时，首次使用的数学术语．原书中“Function”一词的解释为：“以任何方式包含x的表达式都是x的函数，所以$a+x$和$a+bx^2$都是x的函数.”①．李善兰把“Function”翻译为“函数”，解释为“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数.”②这是过去一百多年前人们对“函数”的理解，这句话既说明了函数名称的来源，也说明了函数的意义．这一解释更接近李善兰翻译的另一本名为《代微积拾级》(Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus)的书中对“Function”的定义：“当一个变量等于一个包含另一个变量的表达式的时候，第一个变量就叫做第二个变量的函数.”③综上可以看出，李善兰用“函数”这个词汇的用意，其中的“数”是“变数”，也就是现在所说的“变量”；而“函”是包含的意思．二者组合在一起叫做“函数”，表达的就是“变量包含变量”的关系，比如“$a+x$”是一个变量，包含着变量“x”，那么“$a+x$”就是“x”的函数．所以“函数”指称的不是数，而是变量之间的包含关系，与当时人们对“函数”的认识是吻合的．现在数学中对函数的理解事实上已经发生了变化，是集合与集合之间的“对应”关系，而不仅仅是变量之间的“包含”关系了．④ 再如：函数$y=x^2+x+1$，存在着两个变量，即x和y，两者的关系是一个包含另一个，所以说：“凡此变数函彼变数者，则此为彼之函数.”在这里

① Augustus De Morgan. The Elements of Algebra[M]. 2ed. London: Printed for Taylor and Walton, 1837: 168.

② 燕学敏．晚清数学翻译的特点——以李善兰、华蘅芳译书为例[J]．内蒙古大学学报：自然科学版，2006(5).

③ Elias Loomis. Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus[M]. New York: Nineteen Edition. Harper & Brothers Publishers, 1865: 113.

④ 郜舒竹，张平仁，王智秋．数学术语的隐喻歧义及其人文内涵[J]．课程教材教法．2011(2).

此变数就是指 y，彼变数就是指 x.

在中学阶段，函数这一概念通过解析表达式引入．例如，对于物理里面作直线运动的物体，由 $s=vt$，s 随时间 t 的变化而变化．当 $t=0$ 时，$s=0$；当物体以速度 v 匀速运动时，$s=vt$，$t\geqslant 0$；当物体以匀加速度 a 运动时，速度 $v=at$，初速度为 v_0，路程 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，当初速度 $v_0=0$ 时，路程 $s=\frac{1}{2}at^2$，$t\geqslant 0$．由此可以看出，上述情况中每一个 $t\geqslant 0$ 范围内的 t 的值都确定了唯一一个与它对应的 s 值．这就确定了 s 是 t 的函数．然而，并不是每一个函数都是由某一公式确定的.①

在高等数学中对函数有如下定义：

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于给定的每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．y 的取值范围叫函数的值域．对于定义域内自变量 x 的每一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，函数注重的是一种对应关系，一般是由一个自变量来决定一个因变量，则此时因变量就叫做这个自变量的函数．在直角坐标系中，每一个 x 值只对应一个 y 值.

现有的函数定义主要是这样的，有两个集合，一个是 A 集合，一个是 B 集合，这里面分别有很多元素，函数就是指这两个集合的一种关系，并且这个关系可以用函数来表示.

集合之间的关系分为以下几种：第一种是“一一对应”关系；第二种是“多对一”关系，第三种是“一对多”关系．在这三种关系中，“一一对应”和“多对一”关系都可以构成函数的关系，这保证了 A 中的每个元素，在 B 中都有唯一的元素与之对应；而“一对多”是不可以的．可以这样理解，若“一对多”成立函数，那么函数关系中的 $\because a=b\ \therefore f(a)=f(b)$ 就显然不成立了.

定义 1.2 用两个以上表达式表达的函数关系叫分段函数.

例如
$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1\\ x-1, & x<1\end{cases}$$

$x=1$ 称为分段点.

定义域的求法原则如下：

(1)分母不为零.

(2)$\sqrt{x}$，$x\geqslant 0$.

(3)$\ln x$，$x>0$.

---

① 邓东皋，尹小玲．数学分析简明教程[M]．2 版．北京：高等教育出版社，2007.